Red Matemática Antioquia

Antioquia la más educada

Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las matemáticas en Antioquia

2012 - 2015

facebook.com/RedMatematicaAntioquia

@redmatematicant

redmatematica@antioquia.gov.co

Gobernación de Antioquia

Sergio Fajardo Valderrama
Gobernador de Antioquia
Felipe Andrés Gil Barrera
Secretario de Educación de Antioquia
Horacio Arango Marín
Director Red Matemática Antioquia
Asesor Secretaria de Educación de Antioquia
Duqueiro Antonio Espinal Chavarría
Subsecretario para el Mejoramiento de la Calidad Educativa.
Adriana Toro
Subsecretaria Administrativa
María Isabel Castro Roldán
Asesora Red Matemáticas Antioquia

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Coordinación Plan de Mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en Antioquia.
Carlos Hernando Montenegro Escobar
Presidente
Jaime Alberto Amaya Gómez
Representante Sociedad Colombiana de Matemáticas en Medellín
Andrés García Pérez
Director Ejecutivo

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Escuela de Matemáticas
Coordinación Académica
Ignacio Mantilla Prada
Rector
Carlos Alfredo Salazar Molina
Vicerrector Sede Medellín
Luis Alfonso Vélez Moreno
Decano Facultad de Ciencias Sede Medellín
John Bayron Baena Giraldo
Director Escuela de Matemáticas

Equipo Editorial

Jorge Cossio Betancur
Jorge Enrique Mejía Laverde
Diego Mejía Duque
Débora María Tejada Jiménez

Revisión de Texto

Débora María Tejada

Diagramación

John Bayron Baena Giraldo
Bibiana López Rodríguez
Mauricio Andrés Osorio Lema

Trigonometría y de Geometría Analítica
© Gobernación de Antioquia
© Secretaría de Educación
© Sociedad Colombiana de Matemáticas
© Universidad Nacional de Colombia - Sede
© **John Bayron Baena Giraldo**
© Eddye Bustamante M
© Daniel Cabarcas J © Oscar I Giraldo G
© José M Jiménez U © Blanca A León I
© Bibiana López R © Mauricio A Osorio L
© Carlos A Vélez L © Beatriz Villa
Diseño de carátula: Alejandro Arango Lince
ISBN:
Primera edición: marzo de 2015
Impreso y hecho en Medellín, Colombia
Todos los derechos reservados.
Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra -incluido el diseño tipográfico y de portada-, sea cual fuere el medio, electrónico o mecánico, sin el consentimiento por escrito de la Gobernación de Antioquia y la Secretaría de Educación.
Hecho el depósito legal.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA,
Guías de clase para 90 lecciones

Autores

John Bayron Baena G.
Eddye Alejandro Bustamante M.
Daniel Cabarcas J.
Oscar Iván Giraldo G.
José Manuel Jiménez U.
Blanca Aurora León I.
Bibiana López R.
Mauricio Andrés Osorio L.
Carlos Augusto Vélez L.
Beatriz Villa

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

Tabla de Contenido

Página

Prólogo

Uno de los objetivos de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (SCM) es el mejoramiento de la enseñanza y la difusión de las Matemáticas en nuestro medio. Teniendo presente este objetivo, la Gobernación de Antioquia invitó a la SCM a diseñar un plan de trabajo para mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Departamento de Antioquia. Las razones de esta invitación se ven reflejadas en los resultados en el área de Matemáticas de las pruebas SABER (mayo de 2012) y de los exámenes de admisión de la Universidad de Antioquia (mayo de 2012), y en los resultados de la Prueba de Matemáticas de Antioquia (Olimpiadas del Conocimiento, julio de 2012): la nota promedio en Matemáticas, considerando estos tres exámenes, fue de 1.9 sobre 5.

Con el fin de enfrentar el problema del bajo nivel matemático de los estudiantes de los últimos grados de la educación secundaria en el departamento de Antioquia, la SCM diseñó el "Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en las instituciones educativas de Antioquia". Este texto, que llega hoy a sus manos, es uno de los muchos productos que el Plan quiere entregarle a Antioquia y hace parte de una colección de cinco textos, dedicados a las guías de clase para 90 lecciones, en las áreas de Precálculo, Álgebra, Trigonometría-Geometría Analítica, Geometría Euclidiana y Aritmética. Los textos de la colección fueron escritos para ayudarles a los maestros en la preparación de sus clases.

Las Matemáticas son como un edificio. Para que el edificio se sostenga firmemente es necesario que tenga buenas bases. Los conceptos elementales que se recogen en los textos de esta colección son las bases que debe haber construido, con ayuda de sus maestros, un alumno de secundaria que aspire a entrar a la Universidad. Se observará que en ellos se ha tratado de describir en detalle los pasos a seguir en cada tema, ejercicio o problema propuesto. Pensamos, basados en nuestra propia experiencia, que ésta es una buena manera de dictar una clase de Matemáticas. Volviendo a la analogía inicial, así como un muro del edificio se construye poco a poco colocando cada uno de los ladrillos que lo componen, la solución de un ejercicio o problema matemático es una sucesión ordenada de pasos lógicos y coherentes. Si en la construcción del muro faltan ladrillos o hay ladrillos mal colocados es muy posible que el muro se derrumbe. Si en la solución de un problema matemático los pasos están mal concatenados o faltan pasos, probablemente la solución sea incorrecta.

Así como un deportista debe dedicar muchas horas diarias a su entrenamiento, para poder soñar con triunfar, si queremos mejorar nuestra comprensión de las Matemáticas es necesario repasar lo mismo muchas veces, aunque parezca monótono y repetitivo, de esta forma podremos enfrentar con mayor lucidez la construcción del edificio de las Matemáticas.

Finalmente es importante señalar que estos textos no pretenden ser un tratado de Pedagogía. Más bien constituyen un conjunto articulado de conocimientos matemáticos que un docente de secundaria puede enseñar de manera efectiva con el uso de los saberes pedagógicos adquiridos en su formación académica. Responden entonces estos textos a nuestra convicción de que si se quiere enseñar bien algo no son suficientes ni las estrategias pedagógicas utilizadas ni el uso de las nuevas tecnologías informáticas, es indispensable tener previamente un conocimiento sólido de la materia que queremos enseñar.

Carlos Montenegro
Presidente, Sociedad Colombiana de Matemáticas

Prefacio

Mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre es un reto. Los conceptos matemáticos básicos tienen cierto grado de complejidad y en consecuencia es crucial que los textos matemáticos que se escriban para apoyar el proceso de su enseñanza y aprendizaje usen un lenguaje claro que concentre su atención en los aspectos realmente importantes de estos conceptos y facilite su comprensión.

El presente texto es un conjunto de guías de clase en Trigonometría y Geometría Analítica para los maestros de la educación secundaria del Departamento de Antioquia, dentro del programa "Antioquia la más Educada", liderado por el Gobernador Sergio Fajardo Valderrama. Consideramos que estas guías constituyen una síntesis del material que es indispensable presentar en el aula de clase por parte del maestro. De allí que la exposición hecha en ellas de las nociones matemáticas básicas, que deben ser del conocimiento de todo bachiller antes de su ingreso a la universidad, sea lo más clara posible. Para alcanzar este objetivo hemos reducido la terminología matemática a la estrictamente necesaria y hemos prescindido de temas accesorios, que consideramos no son esenciales para la formación matemática de los estudiantes y que por el contrario pueden despertar en ellos un rechazo al estudio de las Matemáticas. Insistimos en que la función principal de este material es, de una parte, ayudarle al docente en su tarea cotidiana de preparación de clases, y de otra, brindarle al estudiante un resumen de los conocimientos mínimos que debe tener sobre la materia. Es por ello que en lugar de hablar de libro o de texto hemos preferido usar la palabra "guías" para referirnos a este material. En la bibliografía los lectores encontrarán libros y textos que les permitirán complementar el conocimiento básico que les brindan estas guías. Finalmente tenemos la esperanza de que las guías de clase, que hoy ponemos a consideración de los lectores, mejoren su percepción de la importancia de las Matemáticas y de su inmenso poder en la solución de problemas concretos, tanto de las ciencias naturales como de la vida cotidiana.

Comité Editorial

Lección 1

Conceptos básicos de la geometría I

En las primeras cinco lecciones de este curso presentaremos los diversos aspectos de la geometría, fundamentales para el posterior desarrollo de los temas de la trigonometría. Suponemos que los estudiantes han tenido la oportunidad de conocer, en un curso previo de geometría, los resultados que aquí se presentan. Estas primeras lecciones están orientadas a presentar en forma breve las definiciones, conceptos y resultados, con el propósito de unificar la notación y destacar los resultados principales.

Iniciaremos nuestro estudio con los conceptos de punto, recta y plano. Luego serán tratados el círculo y sus elementos principales y por último estudiaremos el concepto de ángulo desde el punto de vista de la geometría.

Rectas, rayos y planos

El punto de partida de la geometría es la existencia de sus elementos básicos: el punto, la recta, los planos, y las relaciones entre ellos, las cuales establecen sus propiedades. Propias del lenguaje de la geometría son las relaciones de existencia, unicidad, congruencia y paralelismo, entre otras.

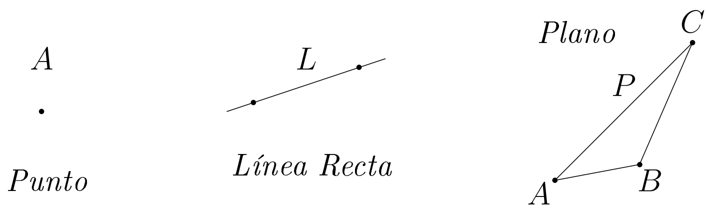


Figura 1.1

Se dice que tres puntos son ***colineales*** si están sobre una línea recta. Los puntos, rectas y planos deben satisfacer las siguientes propiedades

Propiedad 1: Por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta.

Propiedad 2:
Por tres puntos no colineales pasa uno y sólo un plano.

Si dos puntos A y B están situados sobre una recta L, denotaremos esta recta por AB. El ***segmento de recta*** $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos de la recta AB, localizados en el tramo limitado por A y B.

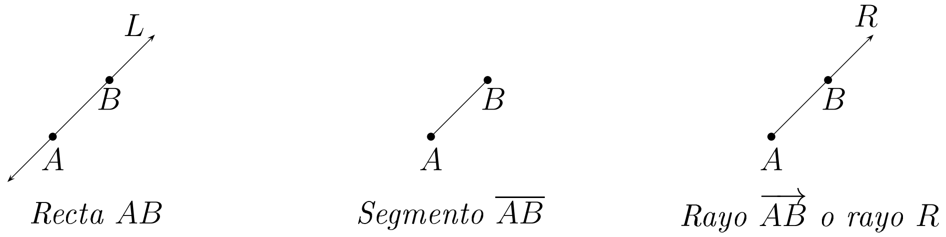


Figura 1.2

Dada una recta L y un punto A sobre esta recta, el punto A divide la recta en dos conjuntos de puntos, que denominaremos ***semirrectas*** o ***rayos*** con origen A. Para cualquier otro punto B sobre esta recta denominaremos rayo $\overrightarrow{AB}$ a la semirrecta con origen A que contiene el punto B. En algunas ocasiones a la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ también se le denomina rayo R.

Los segmentos de recta se miden en unidades de longitud. Estas unidades pertenecen a un sistema de medida. Generalmente usaremos las unidades de longitud del Sistema Métrico Decimal. Dependiendo del objeto que se va a medir utilizaremos como unidad el milímetro, el centímetro, el metro, y el kilómetro, entre otros, abreviados, respectivamente, por mm, cm, m y km. Si dos segmentos de recta tienen la misma longitud diremos que son ***congruentes***.

Circunferencia y círculo

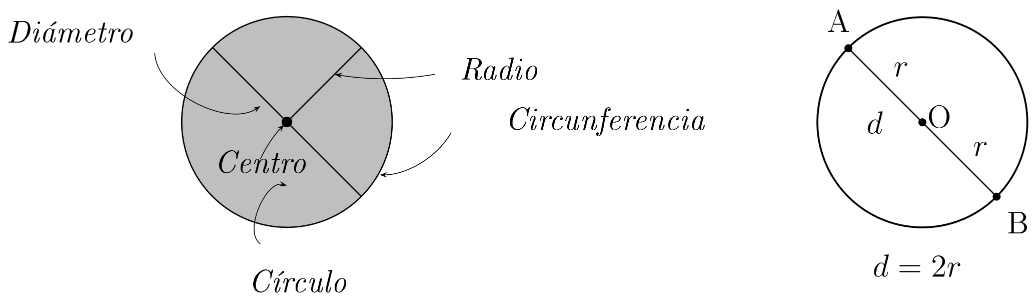


Figura 1.3

La ***circunferencia*** es el conjunto de los puntos de un plano que equidistan o están a la misma distancia de otro punto fijo en el mismo plano llamado ***centro*** . A esta distancia fija la llamamos ***radio*** de la circunferencia y la denotamos por r.

El ***círculo*** es una figura plana limitada por una circunferencia. Llamamos ***diámetro*** de la circunferencia a todo segmento de recta que une dos puntos sobre la circunferencia y pasa por el centro. Si d es la longitud del diámetro, $d = 2r$. Véase la figura 1.3.

Cuando se divide la longitud C de una circunferencia por d, el resultado es la constante π:

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = \pi.$$

La longitud de la circunferencia es $C = 2\pi r$.

El área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$.

El número π es una de las constantes más importantes de las matemáticas. Su valor aproximado con dos cifras decimales es $3,14$, y con cuatro cifras decimales es $3,1416$. Ordinariamente escribiremos $\pi \approx 3.14$, ó $\pi \approx 3.1416$.

Ejemplo

- Una circunferencia tiene un radio de 5 cm. La longitud de la circunferencia es $C = 2\pi\, r = 10\pi$ cm. El área del círculo es $A = \pi r^2 = \pi(5)^2$ cm$^2 = 25\pi$ cm^2.
- Una circunferencia tiene un diámetro de 2 metros. El radio es 1 metro. La longitud de la circunferencia es $C = 2\pi\, r = 2\pi(1)$ m $= 2\pi$ m. El área del círculo es $A = \pi r^2 = \pi(1)^2$ m$^2 = \pi$ m^2.

Ángulos

Un ***Ángulo*** es la abertura formada por dos rayos que tienen un origen común, llamado ***vértice*** del ángulo. Cada uno de los rayos R_1 y R_2 se denomina **lado del ángulo**. Se utilizan varias notaciones para denotar los ángulos. Las más comunes son

- $\angle AOB$, en términos de las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. También puede usarse $\angle BOA$. Observe que en esta notación la letra O, que designa al vértice, va en el centro.
- En ocasiones los ángulos se denotarán por una letra minúscula a, b, c, $\ldots$.
- También es muy usual usar letras griegas como α (alfa), β (beta), γ (gamma), δ (delta), φ (fi), λ (lambda), $\ldots$
- También se utilizará la letra O que denota el vértice del ángulo.

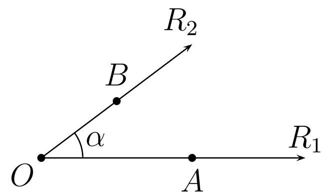


Figura 1.4

Ejercicios

1. El radio de una circunferencia es r. Encuentre el diámetro y la longitud de la circunferencia C y el área del círculo A, para los valores dados de r.
   (a) $r = 5$ cm,
   (b) $r = 2$ m,
   (c) $r = 1.5$ km.
2. El diámetro de una circunferencia es d. Encuentre el radio y la longitud de la circunferencia C y el área del círculo A, para los valores dados de d.
   (a) $d = 4$ cm,
   (b) $d = 5$ m,
   (c) $d = 14$ km.
3. Si el radio de una circunferencia se duplica.
   (a) ¿En cuál proporción cambia el diámetro?
   (b) ¿En cuál proporción cambia la longitud C de la circunferencia?
   (c) ¿En cuál proporción cambia el área A del círculo?
4. Si el diámetro de una circunferencia se reduce a la mitad.
   (a) ¿En cuál proporción cambia el radio?
   (b) ¿En cuál proporción cambia la longitud C de la circunferencia?
   (c) ¿En cuál proporción cambia el área A del círculo?

Lección 2

Conceptos básicos de la geometría II

En esta lección estudiaremos los conceptos de ángulo central y arco de circunferencia y la medida de ángulos en grados sexagesimales. En este curso desarrollaremos dos sistemas para medir ángulos, el sistema sexagesimal que utiliza grados sexagesimales y el sistema circular que utiliza radianes. Este último será estudiado más adelante en la lección 8.

Ángulos centrales y arcos

Definición 2.1

Dada una circunferencia de radio r y centro O, un ***ángulo central*** de la circunferencia es un ángulo con vértice en O cuyos lados son rayos o segmentos de recta que cortan la circunferencia. En la parte izquierda de la figura 2.1 se muestra el ángulo central α y los rayos R_1 y R_2 con origen en O.

Dados dos puntos A y B sobre la circunferencia, el ***arco de circunferencia*** $\overset{\frown}{AB}$ es la porción de la circunferencia comprendida entre los puntos A y B. Véase la parte derecha de la figura 2.1.

Los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ determinan un ángulo central α. Se dice que el ángulo α subtiende al arco $\overset{\frown}{AB}$. También es común decir que el arco $\overset{\frown}{AB}$ subtiende al ángulo α.

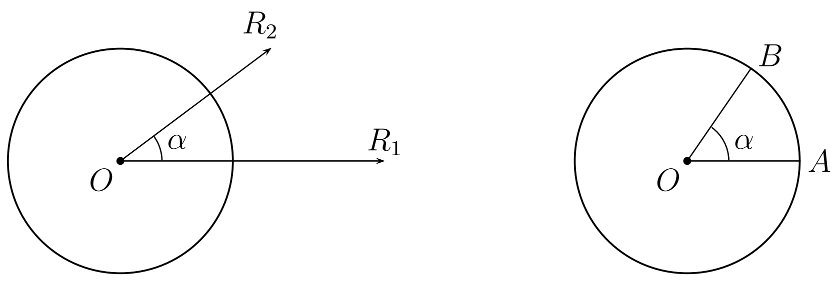


Figura 2.1

Medida de ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad. Utilizaremos dos unidades de medida: el grado sexagesimal y el radián.

Sistema sexagesimal

Dividimos una circunferencia en 360 arcos de igual medida. Cada uno de estos arcos subtiende un ángulo central cuya medida es un ***grado sexagesimal***, escrito $1°$.

De acuerdo con esta definición, el ángulo que subtiende una circunferencia mide $360°$.

Ejemplo 2.1

El ángulo subtendido por un cuarto de circunferencia mide $90°$.

Para medir ángulos se utiliza el transportador. En el transportador, que se presenta en la figura 2.2, se aprecian las 180 divisiones de una ***semicircunferencia***.

Ejemplo 2.2

En la figura 2.2, el ángulo α que forman los rayos R_1 y R_2 es un ángulo de $55°$.

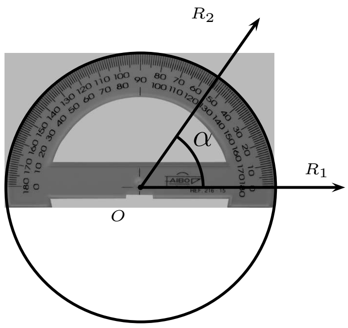


Figura 2.2

Con el propósito de simplificar la escritura utilizaremos la misma notación para representar tanto el ángulo como su medida. El texto completo nos va a permitir interpretar correctamente en qué sentido se utilizan los símbolos. Por ejemplo escribimos $a = b$ para significar que la medida del ángulo a es igual a la medida del ángulo b. También podremos escribir $\alpha + \beta = 180°$, para indicar que la suma de las medidas en grados de los ángulos α y β es $180°$.

Clasificación de los ángulos según su medida

- ***Ángulo nulo***: es el ángulo que mide $0°$.
- ***Ángulo agudo***: es el ángulo que mide más de $0°$ y menos de $90°$.

- ***Ángulo recto***: es el ángulo que mide exactamente 90°.
- ***Ángulo obtuso***: es el ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.
- ***Ángulo llano***: es el ángulo que mide 180°.

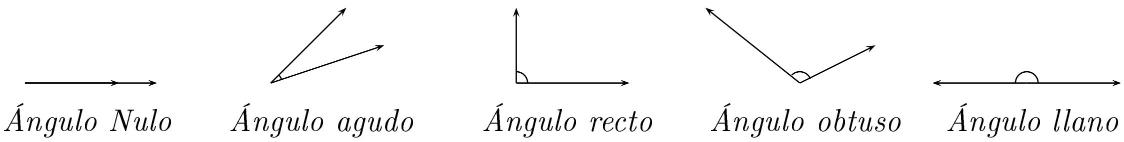


Figura 2.3

Ángulos congruentes, complementarios y suplementarios

- ***Ángulos congruentes***: decimos que dos ángulos son ***congruentes*** si tienen la misma medida. Si los ángulos α y β son congruentes escribimos $\alpha \cong \beta$.
- ***Ángulos complementarios***: dos ángulos son ***complementarios*** si la suma de sus medidas es 90°.
- ***Ángulos suplementarios***: dos ángulos son ***suplementarios*** si la suma de sus medidas es 180°.

Ejemplo 2.3

En la figura 2.4 se representan los ángulos a y b, los cuales son congruentes. Los ángulos c y d son complementarios y los ángulos e y f son suplementarios.

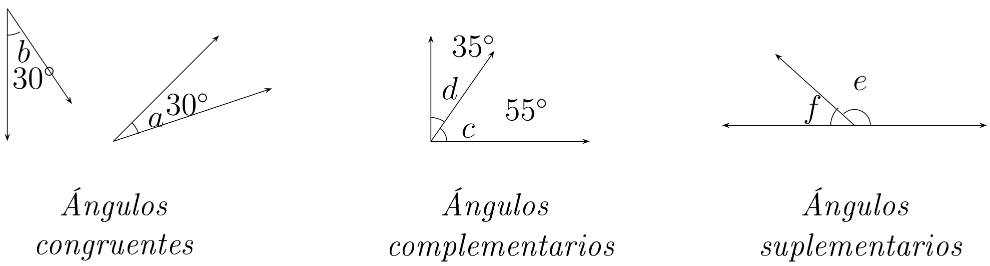


Figura 2.4

Si dos ángulos α y β son complementarios, decimos que α es el ángulo complementario de β. Similarmente, si dos ángulos α y β son suplementarios decimos que α es el ángulo suplementario de β.

Ejemplo 2.4

El ángulo complementario del ángulo a cuya medida es 60° es el ángulo b cuya medida es 30°, puesto que $\quad 90° - 60° = 30°$.

Nota 2.1

Por comodidad y cuando no haya lugar a confusión, simplemente diremos el ángulo complementario de $60°$ es $30°$.

Ejemplo 2.5

El ángulo suplementario de $60°$ es $120°$, puesto que $180° - 60° = 120°$.

Grados, minutos y segundos

Un grado puede ser dividido en ***minutos y segundos***, en la misma forma que una hora se divide en minutos y segundos. Un grado se divide en 60 partes iguales llamadas minutos ($'$) y cada minuto se divide en 60 segundos ($''$).

Ejemplo 2.6

Si un ángulo a mide 50 grados, 15 minutos y 10 segundos escribimos

$$a = 50°15'10''.$$

Ejercicios

1. Clasifique cada uno de los siguientes ángulos como nulo, agudo, recto, obtuso o llano; explique si el ángulo no es ninguno de los anteriores:
   (a) $\alpha = 35°$,
   (b) $\beta = 110°$,
   (c) $\gamma = 180°$,
   (d) $\nu = 0°$,
   (e) $\eta = 190°$.
2. Dados los siguientes ángulos, encuentre sus ángulos complementarios:
   (a) $30°$,
   (b) $45°$,
   (c) $55°$.
3. Dados los siguientes ángulos, encuentre sus ángulos suplementarios:
   (a) $30°$, (b) $45°$, (c) $75°$, (d) $120°$, (e) $135°$, (f) $180°$.

Lección 3

Conceptos básicos de la geometría III

Estudiaremos las nociones de paralelismo y perpendicularidad de líneas rectas en el plano. En geometría se estudian varios resultados importantes relativos a la igualdad de ciertos pares de ángulos tales como los ángulos opuestos por el vértice, los ángulos correspondientes, los ángulos alternos internos y los ángulos alternos externos; éste será el tema de esta lección.

También estudiaremos propiedades importantes relativas a las medida de los ángulos interiores en un triángulo y las nociones básicas sobre semejanza de triángulos. Sobre este último tópico estudiaremos uno de los resultados más destacadas de la geometría y fundamental para el desarrollo de la trigonometría: el teorema de Tales, sobre semejanza de triángulos.

Intersección de rectas, perpendicularidad y paralelismo.

Se dice que dos rectas L_1 y L_2 situadas en un mismo plano se interceptan en un punto O del plano, si las dos rectas tienen a O como su único punto en común. En la figura 3.1, las rectas L y H se interceptan en O.

Si dos rectas L_1 y L_2 están situadas en un mismo plano y no se interceptan en ningún punto se dice que son ***paralelas*** y escribiremos $L_1 \| L_2$.

Si dos rectas L y H se interceptan formando ángulos rectos, se dice que son ***perpendiculares*** y escribiremos $L \perp H$.

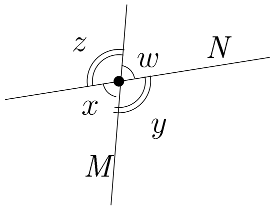
Rectas paralelas *Rectas perpendiculares*

Figura 3.1

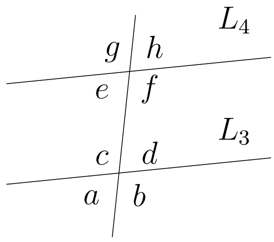
Cuando dos rectas M y N se interceptan, se forman cuatro ángulos x, y, z y w como se muestra en la figura 3.2. Los ángulos x y w se denominan ***opuestos por el vértice***. Igualmente son opuestos por el vértice los ángulos y y z.

Teorema 3.1

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



Ángulos opuestos por el vértice



Pares de ángulos

Figura 3.2

Ejemplo 3.1

En la figura 3.2, $x \cong w$ y $z \cong y$, por ser ángulos opuestos por el vértice.

Ejemplo 3.2

Si la figura 3.2, el ángulo x mide $75°$, calcule las medidas de los ángulos y, w y z.

Los ángulos x y w son congruentes por ser opuestos por el vértice, por lo cual w mide $75°$.

Como x y z son ángulos suplementarios, entonces $z = (180 - 75)° = 105°$.

Como los ángulos z y y son opuestos por el vértice, tenemos que $y = 105°$.

Observe que cuando las letras x, y, z, w denotan las medidas de los ángulos escribimos el símbolo "$=$".

Ángulos y rectas paralelas

Definición 3.1

Cuando dos rectas paralelas L_3 y L_4 se cortan por una recta transversal como se muestra en la figura 3.2 se forman 8 ángulos. Cuatro ángulos son interiores a las dos rectas paralelas y cuatro ángulos son exteriores a ellas. Algunos pares de estos ángulos aparecen con mucha frecuencia en la geometría y cumplen una importante propiedad como veremos en el Teorema 3.2.

- Son ***ángulos correspondientes*** los pares

$$a \text{ y } e; \quad b \text{ y } f;$$
$$c \text{ y } g; \quad d \text{ y } h.$$

- Son ***ángulos alternos internos*** los pares

$$c \text{ y } f; \quad d \text{ y } e.$$

- Son ***ángulos alternos externos*** los pares

$$a \text{ y } h; \quad b \text{ y } g.$$

Teorema 3.2

Si las rectas L_3 y L_4 de la definición anterior son paralelas, entonces los dos ángulos que forman cada uno de los pares en la definición anterior son congruentes.

Ejemplo 3.3

En la parte derecha de la figura 3.2 observamos que

- $a \cong e$ por ser ángulos correspondientes.
- $b \cong c$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
- $c \cong f$ por ser ángulos alternos internos.

Triángulos

Dados tres puntos no colineales A, B y C, se llama ***triángulo*** ABC y se denota por ΔABC, a la región del plano limitada por los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Los puntos A, B y C se denominan ***vértices*** del triángulo y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se denominan los lados del triángulo.

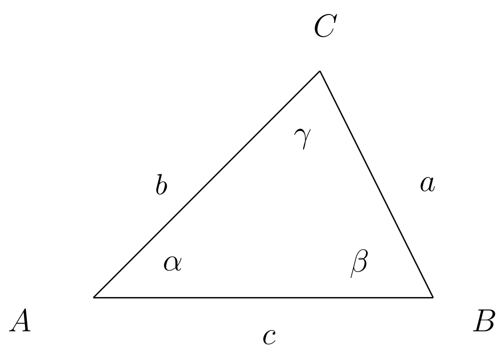


Figura 3.3

Un triángulo tiene tres ángulos interiores, denotados en la figura 3.3 por α, β y γ.

Cuando se utilizan letras mayúsculas para denotar los vértices de un triángulo usualmente los lados opuestos a estos vértices se denotan con las letras minúsculas correspondientes, como se aprecia en la figura 3.3. Con frecuencia se utilizan estas letras para denotar tanto el lado como su longitud. Por ejemplo la frase $a = 5$ cm, significa que el lado a tiene una longitud igual a 5 cm.

Ejemplo 3.4

El ***perímetro*** p de un triángulo es la suma de las longitudes de sus tres lados:

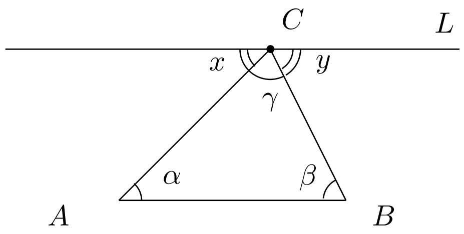
$$p = a + b + c.$$

Si los lados a, b y c del triángulo de la figura 3.3 miden 3, 4 y 6 centímetros, respectivamente, el perímetro del triángulo p es igual a

$$p = a + b + c = 3 + 4 + 6 = 13 \text{ cm}.$$

Teorema 3.3

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Figura 3.4

Prueba

Usaremos la notación de la figura 3.4. Por el punto C, trazamos una recta L paralela a la recta AB. Denominamos x y y a los ángulos que forman las recta L y los segmentos de recta $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Observemos que los ángulos x, γ y y forman un ángulo llano. Entonces tenemos

$$x + \gamma + y = 180°.$$

Por otra parte, de acuerdo con el teorema 3.2, $x \cong \alpha$ y $y \cong \beta$ por ser ángulos alternos internos. Así, reemplazando tenemos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ejemplo 3.5

Si en la figura 3.4 $\alpha = 55°$ y $\beta = 65°$, calcule γ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°, \quad \text{entonces} \quad \gamma = 180° - \alpha - \beta = (180 - 55 - 65)° = 60°.$$

Ejercicios

1. Si en la figura 3.2 el ángulo z mide 100°, calcule las medidas de los ángulos x, y y w.
2. Si en la figura 3.2 $d = 77°20'$, (a) determine cuáles ángulos son congruentes con d por ser ángulos correspondientes. (b) Calcule la medida del ángulo b y determine cuáles ángulos son congruentes con b por ser alternos externos.
3. Si en la figura 3.2 $b = 98°$, calcule las medidas de los ángulos a, c, d, e, f, g y h.
4. Si en la figura 3.3, $\alpha = 50°$ y $\gamma = 75°$, calcule β.
5. Si en la figura 3.3, $\alpha = \beta = 50°$, calcule γ.

Lección 4

Conceptos básicos de la geometría IV

En esta lección consideraremos la semejanza de triángulos y veremos uno de los teoremas más usados en la trigonometría relativo a este tema: el teorema de Tales.

Triángulos semejantes

Definición 4.1

Se dice que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ en la figura 4.1 son ***semejantes*** si

$$\alpha \cong \alpha', \beta \cong \beta' \text{ y } \gamma \cong \gamma' \tag{4.1}$$

y se verifica la siguiente proporción entre sus lados correspondientes:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}. \tag{4.2}$$

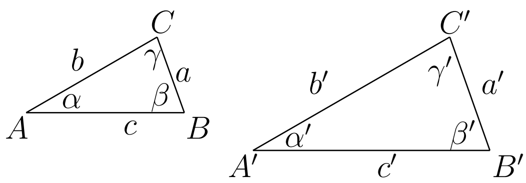


Figura 4.1

Se acostumbra escribir $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, para representar la semejanza entre estos dos triángulos. El orden en la escritura de los vértices es muy importante porque indica la correspondencia entre los ángulos congruentes. Los pares de ángulos que aparecen en la ecuación (4.1) se denominan ***ángulos correspondientes***.

En los triángulos semejantes ΔABC y $\Delta A'B'C'$, decimos que dos lados son ***correspondientes*** si se oponen a ángulos correspondientes. Así, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son lados correspondientes. Igualmente, los pares de lados $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ y $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ son lados correspondientes.

Dado que las condiciones necesarias para que un par de triángulos sean semejantes son muy exigentes puesto que requieren la congruencia en los ángulos y la proporcionalidad en los lados dadas en (4.1) y (4.2), es importante encontrar hipótesis mínimas que garanticen que las condiciones (4.1) y (4.2) se cumplan. Uno de los resultados más importantes en esta dirección, fundamental en la trigonometría, es el siguiente teorema.

Teorema de Tales Toda recta paralela a un lado de un triángulo dado y que intercepta a los otros dos lados, determina un segundo triángulo semejante al primero.

Si en el triángulo ΔABC trazamos la recta $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Véase la figura 4.2.

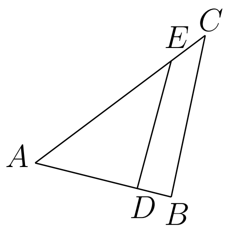
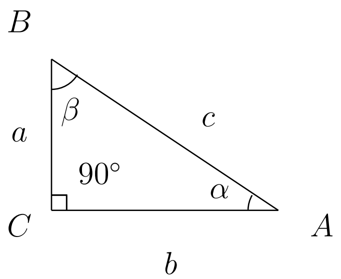


Figura 4.2

Triángulos rectángulos

Definición 4.2

Un ***triángulo rectángulo*** es aquél que tiene un ángulo recto. En el triángulo rectángulo se llama ***hipotenusa*** al lado opuesto al ángulo recto. Los ***catetos*** son los lados que forman el ángulo recto.



Catetos a y b.

Hipotenusa c.

Figura 4.3

Se denota el triángulo rectángulo de la figura 4.3 por ΔACB, teniendo en cuenta que el vértice correspondiente al ángulo recto va en el centro.

El siguiente teorema es inmediato a partir del teorema 3.3, puesto que $90° + \alpha + \beta = 180°$.

Teorema 4.1

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Ejemplo 4.1

Si en la figura 4.3 $\alpha = 50°$, determine el ángulo β.

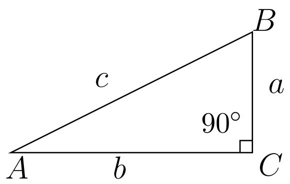
Sabemos por el teorema 4.1 que los ángulos α y β en la figura 4.3 son complementarios. Así $\alpha + \beta = 90°$. Despejando β tenemos que

$$\beta = 90° - \alpha = (90 - 50)° = 40°.$$

La trigonometría se inició con el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Una de las relaciones bien conocidas en la geometría es la que existe entre las longitudes de los catetos y de la hipotenusa. Recordemos el teorema que describe dicha relación.

Teorema de Pitágoras.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Figura 4.4

Ejemplo 4.2

1. Si en el triángulo rectángulo de la figura 4.4 el cateto a mide 5 cm y la hipotenusa 13 cm, encuentre la longitud del cateto b.

   Solución
   Con la notación indicada en la figura 4.4, por el teorema de Pitágoras tenemos

   $$13^2 = 5^2 + b^2, \qquad 169 = 25 + b^2,$$
   $$b^2 = 169 - 25 = 144, \qquad b = \pm 12.$$

   Como b es una longitud, descartamos la solución negativa.

   $$b = 12 \text{ cm}.$$

2. Juan recorre la siguiente trayectoria desde un punto O: camina 8 km al norte, 3 km al oeste, 7 km al norte y por último 11 km al este. ¿A qué distancia está del punto de partida?

   Solución
   En la figura 4.5, describimos la trayectoria que siguió Juan. Debemos calcular la longitud d del segmento de recta $\overline{OQ}$; el triángulo ΔODQ es rectángulo y la longitud de su hipotenusa es d; la longitud de uno de sus catetos es $m + n$ y la del otro es b.

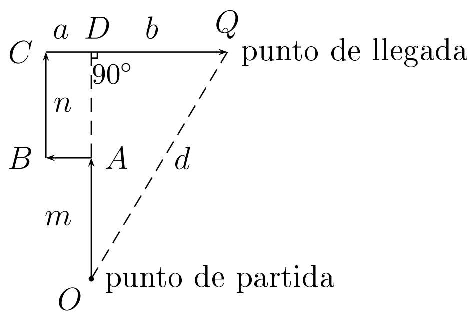


Figura 4.5

$$m + n = 15, \quad b = 8.$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 8^2 + 15^2 \quad = 64 + 225 \quad = 289,$$

$$d = \pm\sqrt{289} = \pm 17;$$

como d es una longitud, descartamos la solución negativa.

R. Juan se encuentra a 17 km del punto de partida.

Ejercicios

1. Con la notación de la figura 4.1, si los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes, encuentre la longitud indicada
   (a) $a = 1$, $b = 2$, $a' = 3$, $b' = ?$.
   (b) $b = 10$, $c = 15$, $b' = 12$, $c' = ?$.
   (c) $a = 2$, $b = ?$, $a' = 9$, $b' = 11$.
   (d) $a = 2$, $b = ?$, $a' = 2$, $b' = 9$.
2. Es posible que dos triángulos semejantes tengan lados correspondientes congruentes? Explique
3. Encuentre las medidas de x y y en cada uno de los triángulos de la figura 4.6

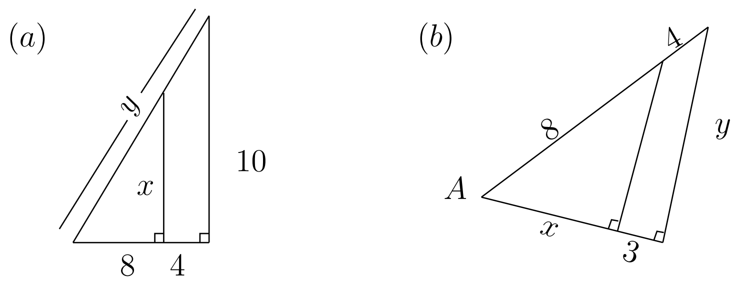


Figura 4.6

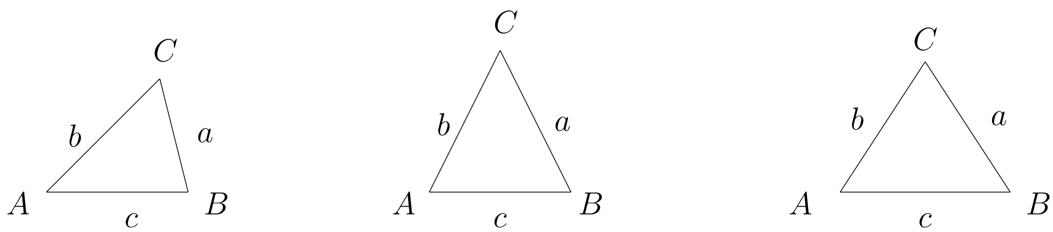
Lección 5

Conceptos básicos de la geometría V

Esta lección está dedicada al desarrollo de importantes ideas acerca de los triángulos isósceles y equiláteros.

Clasificación de los triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados

- ***Triángulo equilátero***. Sus tres lados son congruentes.
- ***Triángulo isósceles***. Es aquél que tiene dos lados congruentes.
- ***Triángulo escaleno***. Las longitudes de sus tres lados son diferentes.



$a \neq b, a \neq c, b \neq c$ | $a = b$ | $a = b = c$

Triángulo escaleno | *Triángulo isósceles* | *Triángulo equilátero*

Figura 5.1

Teorema 5.1

En un triángulo a ángulos congruentes se oponen lados congruentes.

Rectas del triángulo: base, altura, mediana y bisectriz

- ***Una base*** de un triángulo es cualquiera de sus lados.
- Una ***altura*** de un triángulo es el segmento de recta trazado desde un vértice del triángulo, perpendicularmente al lado opuesto o a su prolongación. En un triángulo hay tres alturas, una desde cada vértice.

- ***Una mediana*** es el segmento de recta trazado desde un vértice del triángulo, al punto medio del lado opuesto. En un triángulo hay tres medianas, una sobre cada lado.

- ***Una bisectriz*** es una recta que divide un ángulo interior de triángulo en dos ángulos congruentes. Consecuentemente en un triángulo hay tres bisectrices, una para cada ángulo.

En la figura 5.2 se representan: la altura $\overline{CD}$ sobre el lado $\overline{AB}$ en el triángulo ΔABC; la mediana $\overline{GH}$ del lado $\overline{EF}$ en el triángulo ΔEFG y la bisectriz $\overline{JK}$ del ángulo $\angle IJH$ en el triángulo ΔIJH.

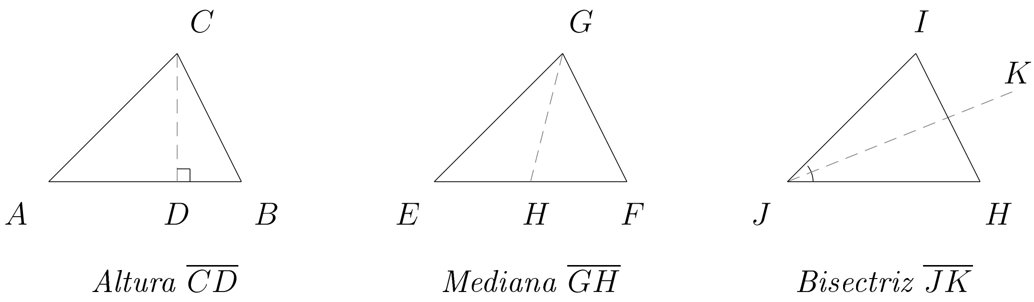


Figura 5.2

Triángulos isósceles y equiláteros

Los triángulos isósceles tienen características importantes. Para establecerlas vamos a dar un par de definiciones:

- En un triángulo isósceles el ***ángulo vértice*** es el ángulo comprendido entre los dos lados congruentes.

- Se llama ***base*** de un triángulo isósceles al lado opuesto al ángulo vértice.

Teorema 5.2

Si el triángulo ΔABC es isósceles, entonces los ángulos de la base son congruentes. En el triángulo isósceles en la figura 5.3, $\beta \cong \gamma$.

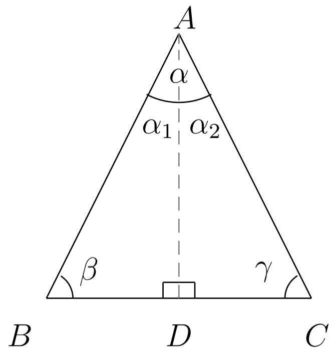


Figura 5.3

Como consecuencia de los teoremas 5.2 y 5.1 tenemos las siguientes caracterizaciones de los triángulos isósceles y equiláteros.

Teorema 5.3

Un triángulo es isósceles si y sólo si los ángulos de la base son congruentes.

Teorema 5.4

Un triángulo es equilátero si y sólo si sus tres ángulos son congruentes.

Teorema 5.5

La bisectriz del ángulo vértice de un triángulo isósceles es también altura y mediana de la base.

En la figura 5.3 se muestra el triángulo isósceles ΔABC, en el cual $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. La base es el lado $\overline{BC}$ y como consecuencia del teorema 5.5, la recta $\overline{AD}$ es al mismo tiempo altura sobre la base, bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y mediana de la base.

Así, los ángulos $\angle ADB$ y $\angle ADC$ son rectos, los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ son congruentes y así mismo los ángulos α_1 y α_2 son congruentes.

Ejemplo 5.1

Si el ángulo α en un triángulo isósceles como el de la figura 5.3 mide 80°, encuentre los ángulos β y γ.

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y β y γ son congruentes, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$80^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ \quad y \quad \beta = \gamma.$$

Reemplazando la segunda igualdad en la primera y despejando β tenemos

$$2\beta = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ,$$

$$\beta = 50^\circ = \gamma.$$

Ejemplo 5.2

Si el ángulo β en un triángulo isósceles como el de la figura 5.3 mide $60°$, encuentre los ángulos α y γ.

Como β y γ son congruentes y la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$ tenemos que $\gamma = 60°$ y

$$\alpha + 60° + 60° = 180°,$$

$$\alpha = 180° - 120° = 60°.$$

En consecuencia, en este caso, el triángulo es equilátero.

Teorema 5.6

En un triángulo equilátero, la bisectriz de cada uno de sus ángulos es también altura y mediana del lado opuesto.

Ejercicios

1. Determine todos los lados y ángulos en los triángulos que aparecen en las gráficas (a), (b), (c) y (d) de la figura 5.4.

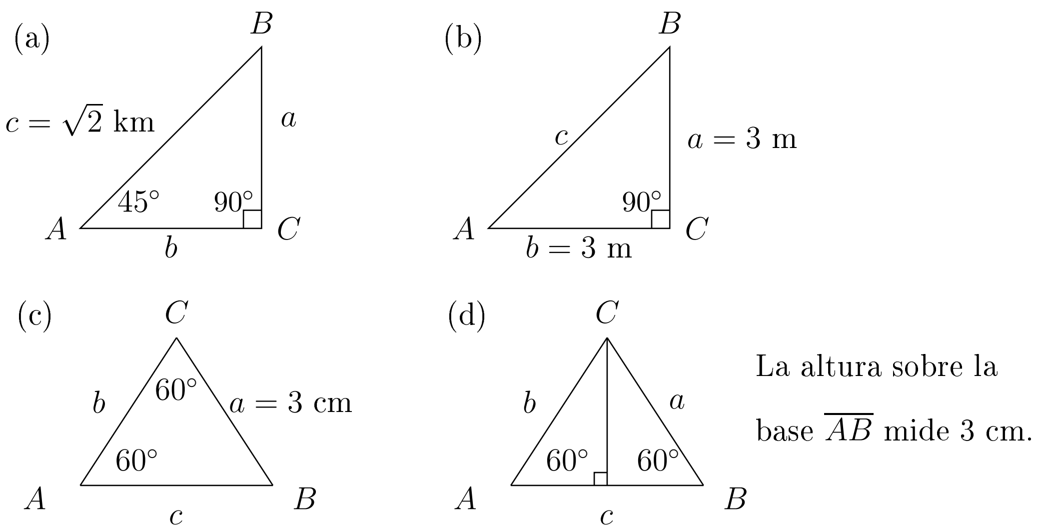


Figura 5.4

2. Si el ángulo β en un triángulo isósceles como el de la figura 5.3 mide $55°$, encuentre los ángulos α y γ.

3. Si el ángulo α en un triángulo isósceles como el de la figura 5.3 mide $85°$, encuentre los ángulos β y γ.

Lección 6

El conjunto de los números reales I

En esta lección iniciamos el estudio del conjunto de los números reales, con la definición de sus principales subconjuntos. Veremos además, la escritura decimal de los números reales y su representación como puntos sobre la recta real. Suponemos que el lector conoce los elementos básicos de la teoría de conjuntos y del álgebra.

Conjuntos numéricos

Los siguientes conjuntos numéricos son subconjuntos importantes del conjunto de los números reales.

1. El conjunto que se utiliza para contar es el conjunto de los ***números naturales*** . Lo denotaremos por $\mathbb{N}$ y está dado por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

2. El conjunto de los ***números enteros***, denotado por $\mathbb{Z}$, es el conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\};$$

   $\mathbb{Z}$ contiene todos los números naturales, sus inversos aditivos, y el cero.

3. El conjunto de los ***números racionales o fraccionarios***, denotado por $\mathbb{Q}$, está formado por los cocientes de los números enteros. Recordemos que no está definida la división por 0; por esto definimos este conjunto por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

   El número a se conoce como ***numerador*** y el número b como ***denominador***.

   El conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales, debido a que si a es un entero, $a = \frac{a}{1}$ y éste es un número racional.

4. Existen números reales que no pueden escribirse como el cociente de dos números enteros. Estos números se denominan ***números irracionales***; el conjunto de los números irracionales se denota por $\mathbb{I}$.

   Algunos ejemplos de números irracionales son los números $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$, $\sqrt{3} = 1.732050808\ldots$ y $\pi = 3.141592654\ldots$.

5. El conjunto de los ***números reales***, denotado por $\mathbb{R}$, es la unión de los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$; es decir:
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Representación decimal de los números reales

Todos los números reales tienen una representación decimal, la cual tiene o bien la forma $r = b.a_1a_2a_3\ldots a_n$ o la forma $r = b.a_1a_2a_3\ldots$.

El número b es un entero y los números que aparecen después del ***punto decimal*** denotados por a_i, llamados ***dígitos***, son números enteros, tales que $0 \leq a_i \leq 9$. La sucesión de dígitos $a_1a_2a_3\ldots$ ó $a_1a_2\ldots a_n$ se denomina ***parte decimal*** de r.

Para obtener la representación decimal de un número racional $\frac{a}{b}$, dividimos el numerador a por el denominador b. Cuando dividimos a por b tenemos dos posibilidades:

1. La parte decimal tiene un número finito de dígitos. Por ejemplo, $r_1 = \frac{3}{4} = 0.75$. En este caso $b = 0$ y la parte decimal 75, solamente tiene dos dígitos.

2. La parte decimal tiene un número ilimitado de dígitos. Por ejemplo, para el número racional $r_2 = \frac{4}{3}$, la representación decimal es $r_2 = 1.333333\ldots$. Así, $b = 1$y con los puntos suspensivos indicamos que la parte decimal tiene un número ilimitado de dígitos. El dígito 3 se repite indefinidamente.

Diremos que un número real tiene una representación decimal ***periódica*** si a partir de uno de sus dígitos, la parte decimal adopta la forma $ppppp\ldots$, donde p es una colección de dígitos. Diremos que la representación decimal periódica tiene un ***período*** p. Denotaremos la parte de la representación decimal que se repite con período p con una línea horizontal en la parte superior del período. Es decir $pppppp... \equiv \overline{p}$. Esto lo ilustramos en los ejemplos 6.1, 6.2 y 6.3.

Ejemplo 6.1

El número racional $r_2 = \frac{4}{3} = 1.3333\ldots$ tiene una representación decimal periódica cuyo período es 3. Escribiremos también $r_2 = 1.\overline{3}$.

Ejemplo 6.2

El número $r_3 = \frac{2}{7}$ tiene la representación decimal $r_3 = 0.285714285714285714\ldots$, su período es 285714 y podemos escribir $r_3 = 0.\overline{285714}$.

Ejemplo 6.3

El número $r_4 = 12.13\overline{456}$ también se puede escribir como $r_4 = 12.13456456456\ldots$ y tiene período $p = 456$.

En cursos más avanzados de matemáticas se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 6.1

Si el número r es un número racional, su representación decimal tiene un número finito de dígitos o es periódica. Reciprocamente, si la representación decimal de un número real r tiene un número finito de dígitos o es periódica, el número r es un número racional.

El teorema 6.1 significa por una parte, aquello que ya esperabamos a partir de los ejemplos anteriores: la representación decimal de un número racional tiene un número finito de dígitos o es periódica.

Sin embargo, el teorema dice mucho más: la representación decimal de un número dado x tiene un número infinito de dígitos y no es periódica si y sólo si el número x es un irracional. Así, el teorema nos da una forma para comprender mejor el conjunto de los números irracionales.

Ejemplo 6.4

La representación decimal del número irracional $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$, no es periódica y con los puntos suspensivos indicamos que tiene un número ilimitado de dígitos.

Nota 6.1

Los números irracionales son indispensables en el curso que iniciamos y los usaremos frecuentemente. Sin embargo, el cálculo de la representación decimal de un número irracional es un problema difícil que se estudia en cursos más avanzados de matemáticas.

Nota 6.2

En la práctica aproximaremos los números irracionales, utilizando números racionales cuya parte decimal tenga un número finito de dígitos. Por ejemplo, en lugar de efectuar cálculos con $\pi = 3.14159\ldots$, trabajaremos con $\pi \approx 3.14$. Éste será el tema de la próxima clase.

Ejemplo 6.5

Veamos la conversión de la medida de un ángulo dado en grados minutos y segundos a grados decimales y viceversa.

Supongamos que la medida del ángulo a está dada como $a = G^\circ m' s''$, entonces primero tomamos la medida en grados, como la parte entera de la representación decimal de a y luego convertimos los minutos y segundos a fracciones teniendo en cuenta que un grado tiene 60 minutos y 3600 segundos.

Por ejemplo, para convertir la medida del ángulo $a = 30^\circ 15' 12''$ a grados decimales procedemos como sigue:

$$a = \left(30 + \frac{15}{60} + \frac{12}{3600}\right)^\circ = (30 + 0.25 + 0.00\bar{3})^\circ = 30.25\bar{3}^\circ.$$

También podemos representar grados decimales en grados, minutos y segundos, teniendo en cuenta que la parte entera del decimal es la medida en grados. Luego convertimos la parte decimal a minutos obteniendo minutos decimales y luego convertimos la parte decimal de éstos a segundos, teniendo en cuenta que se debe aproximar el decimal que representa los segundos, para que no tenga cifras decimales.

Ejemplo 6.6

Exprese $\alpha = 52.203°$ en grados, minutos y segundos

$$\begin{aligned}\alpha &= 52° + 0.203(60)' \\ &= 52° + 12.18' = 52 + 12' + 0.18(60)'' = 52° + 12' + 10.8'' \\ &\approx 52° + 12' + 11'' \\ &\approx 52°\ 12'\ 11''.\end{aligned}$$

Recta real

Existe una correspondencia ***biunívoca*** entre el conjunto de los números reales y los puntos sobre una recta. A cada número real le corresponde un único punto sobre la recta y recíprocamente, con cada punto sobre la recta asociamos un número real único.

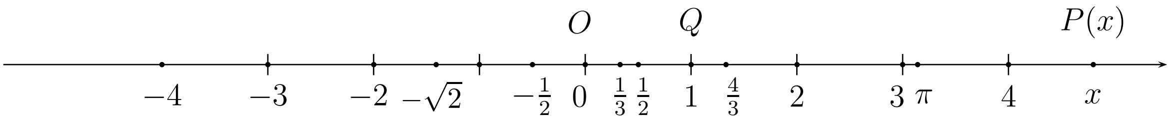


Figura 6.1

Esta correspondencia se efectúa de la siguiente forma: tomamos por conveniencia una recta horizontal. Sobre esta recta marcamos un punto fijo O, denominado ***origen***, que representa el número real 0. Seleccionamos una unidad de longitud y un punto Q a la derecha de O a una distancia de una unidad de O. El punto Q representa el número real 1.

Luego asociamos el punto situado a la derecha de O a una distancia de 2 unidades con el número 2. Similarmente situamos el número 3, y los demás enteros positivos.

Al punto situado en la mitad de la distancia entre O y Q se le asigna el número $\frac{1}{2}$. Al punto situado a un tercio de distancia entre O y Q se le asigna el número $\frac{1}{3}$. Similarmente podemos asignar un punto a otros racionales. Los números racionales representan fracciones de la unidad de longitud.

Un número y su inverso aditivo se sitúan simétricamente respecto al origen. Por ejemplo a la izquierda de O están los puntos $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ -1, -2 $-3, \ldots$.

El número real x asociado con un punto P se llama ***coordenada*** de P o la ***abscisa*** de P y a la recta a cuyos puntos se han asignado coordenadas se le llama ***recta real*** .

Con los puntos de la recta real están asociados tres subconjuntos de números reales: ***los números reales positivos*** son las coordenadas de los puntos a la derecha de O; el número real cero es la coordenada del origen O; ***los números reales negativos*** son las coordenadas de los puntos a la izquierda de O.

Por otro lado, si a y b son dos números reales, la **distancia** entre a y b, denotada por $d(a,b)$, es la medida del segmento que los une en la recta real.

- $d(a,b) \geq 0, \qquad d(a,b) = 0$ cuando $a = b$.
- $d(a,b) = d(b,a)$.

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0, es decir $|a| = d(a,0)$. Por lo tanto,

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } & a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } & a < 0 \end{cases}$$

En general, si a y b son números reales $d(a,b) = |a-b|$.

Ejercicios

1. Dados los siguientes números reales: $s = 2$, $t = 0$, $u = -3$, $v = \frac{1}{4}$, $w = 2.5$, $x = -3.14$, y $z = 12.13\overline{4}$, determine cuáles de ellos pertenecen a cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) Números naturales, (b) números enteros, (c) números racionales.

2. Escriba la representación decimal de cada uno de los números racionales $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{8}{5}$, $z = \frac{1}{3}$ y $z = \frac{3}{7}$.

3. Escriba la representación decimal de cada uno de los números racionales en la forma $b.a_1, a_2 a_3....$ y determine los valores de b, a_1, a_2 y a_3 y su período.
   (a) $z = \frac{7}{3}$, (b) $w = \frac{1}{7}$.

4. Convierta la medida del ángulo $a = 43°25'10''$ a grados decimales.

5. Exprese $\alpha = 32.5°$ en grados, minutos y segundos.

6. Exprese $\alpha = 100.46°$ en grados, minutos y segundos.

7. Un atleta A corre una maratón en 2 horas, 43 minutos y 15 segundos. Un atleta B corre la misma maratón en 2.74 horas. ¿Cuál de los dos atletas es más rapido?

Lección 7

El conjunto de los números reales II

En esta lección continuamos con el estudio de las principales propiedades del conjunto de los números reales. Nos detendremos en el estudio de las relaciones de orden y de los intervalos de números reales. También veremos la aproximación de un número real por medio de un número racional con un número definido de cifras decimales, utilizando el método del redondeo.

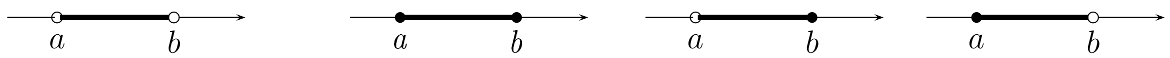
Relaciones de orden e intervalos de números reales

- Dados dos números reales a y b, decimos que a es ***mayor que*** b y escribimos $a > b$, si $a - b$ es un número positivo. En este caso, también decimos que b es ***menor que*** a y escribimos $b < a$.
- Decimos que a es ***mayor o igual*** que b, y escribimos $a \geq b$, si $a > b$ ó $a = b$; en este caso también decimos que b es menor o igual que a y escribimos $b \leq a$.
- Si $a > x$ y $x > c$, escribimos $a > x > c$. Igualmente $a \geq x \geq c$ significa que $a \geq x$ y $x \geq c$.

Los ***intervalos*** son subconjuntos de números reales que se definen a partir de diversas relaciones de orden. A continuacion describimos estos conjuntos y sus gráficas aparecen en las figuras 7.1 y 7.2.

- El ***intervalo abierto*** (a, b) es el conjunto de números reales x tales que $a < x < b$.
- El ***Intervalo cerrado*** $[a, b]$ es el conjunto de números reales x tales que $a \leq x \leq b$.
- ***Intervalos semiabiertos***:

$$\begin{aligned}(a, b] &\text{ es el conjunto de los números reales } x \text{ tales que } \ a < x \leq b,\\ [a, b) &\text{ es el conjunto de los números reales } x \text{ tales que } \ a \leq x < b.\end{aligned}$$



Intervalo abierto (a, b) *Intervalo cerrado* $[a, b]$ *Intervalo* $(a, b]$ *Intervalo* $[a, b)$

Figura 7.1

- ***Intervalos infinitos***:

$(-\infty, b]$ es el conjunto de los números reales x tales que $x \leq b$,
$(-\infty, b)$ es el conjunto de los números reales x tales que $x < b$,
$[a, \infty)$ es el conjunto de los números reales x tales que $x \geq a$,
(a, ∞) es el conjunto de los números reales x tales que $x > a$,
$(-\infty, \infty)$ es el conjunto de los números reales.

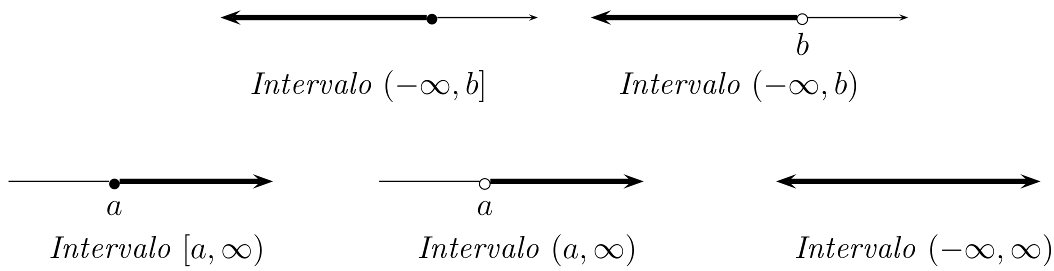


Figura 7.2

Aproximación de un número real por medio de un racional con un número dado de cifras decimales. Método del redondeo

Con el propósito de facilitar o simplificar los cálculos con los números reales, en algunas ocasiones queremos disminuir el número de dígitos en la representación decimal de los números reales. Por ejemplo puede resultar más cómodo realizar cálculos con el número $r = 1.21$ en lugar del número $x = 1.212345$.

Si queremos aproximar el número real x por medio de un número r que tenga n cifras decimales, requerimos que el número x tenga al menos $n+1$ cifras decimales conocidas. Es decir, x debe tener la forma $x = b.a_1a_2...a_na_{n+1}\dots$.

Utilizaremos el siguiente procedimiento, conocido como el método del redondeo, para aproximar el número x por medio de r.

Nota 7.1

- Asignamos a r, el número entero b y todos los dígitos de la representación original del número x hasta el dígito que ocupa la posición $n-1$.
- Para determinar el dígito de r que ocupa la posición n, observamos el dígito que ocupa el lugar $n+1$ en la representación decimal de x, es decir el dígito a_{n+1}; si $0 \leq a_{n+1} < 5$, el dígito que ocupa la posición n de r, coincide con el dígito que ocupa esta posición en x; es decir es a_n. Si $a_{n+1} \geq 5$, el último dígito de r es igual a $a_n + 1$. Es decir incrementamos el dígito a_n en una unidad. Cuando en este último caso se tiene que el dígito a_n es igual a 9, al incrementar el dígito a_n en una unidad se obtiene 10; así, el dígito a_n se convierte en 0 y el dígito anterior a_{n-1} debe incrementarse en una unidad.

Con los siguientes ejemplos ilustramos el procedimiento.

Ejemplo 7.1

Aproximemos el número $x = 3.452$, por medio de un número racional r, con dos cifras decimales.

Asignamos a r la parte entera de x y su primer dígito decimal: $b = 3$ y $a_1 = 4$.

Para determinar la segunda cifra decimal de r, observamos que la tercera cifra decimal de x es $a_3 = 2$. Como $a_3 < 5$, entonces la segunda cifra decimal de r coincide con la segunda cifra decimal de x. Así, $r = 3.45$.

En este caso también podemos decir que r aproxima a x a la centésima más cercana.

Ejemplo 7.2

Aproximemos el número $x = 3.452$ por medio de un número racional r con una cifra decimal. Asignamos a r la parte entera de x; como la segunda cifra decimal de x es $a_2 = 5$, entonces la primera cifra decimal de r es igual a $a_1 + 1 = 4 + 1 = 5$. Así, $r = 3.5$. Decimos que r aproxima a x a la décima más cercana.

Ejemplo 7.3

Vamos a aproximar el número irracional $\pi = 3.141592654\ldots$ por medio de un número racional r con dos cifras decimales. Para calcular el número r, primero seleccionamos la parte entera y el primer dígito: $b = 3$ y $a_1 = 1$. Luego observamos que el tercer dígito de la representación decimal de π es $a_3 = 1$. Como $a_3 < 5$, el segundo dígito de la aproximación r debe coincidir con el segundo dígito de π. Obtenemos que $r = 3.14$. Escribimos $\pi \approx 3.14$, para indicar que π no es igual a 3.14, sino que se está usando el racional $r = 3.14$ para aproximarlo.

Ejemplo 7.4

También podemos aproximar un número a la unidad más próxima. Por ejemplo $\alpha = 41^\circ$ aproxima el ángulo $\beta = 40,52^\circ$ al grado más cercano.

Nota 7.2

Un resultado final obtenido a partir de una o más operaciones con números reales aproximados, no debe tener más cifras decimales que el número real con menos cifras decimales utilizado en el cálculo.

Ejercicios

1. Determine si $a > b$, $a = b$ ó $a < b$, en los siguientes pares de números:

   (a) $a = 1.5152$, $b = 1.52$, (b) $a = 1.21152$, $b = 1.21$.

2. Complete los siguientes números para que la expresión sea verdadera

   (a) 0.25_9 $<$ 0.2519, (b) 10._9 $>=$ 10.19, (c) 3.1_9 $\leq$ 3.149.

3. Exprese en términos de desigualdades los siguientes intervalos y represéntelos gráficamente:

(a) $A = (-2, 3)$, (b) $B = (-1, +\infty)$, (c) $C = (-5, 8]$, (d) $D = (-\infty, 9)$, (e) $E = (-\infty, \infty)$, (f) $F = (-2, \infty)$.

4. Determine cuáles de los siguientes números reales pertenecen al intervalo $(-2, 3]$:
(a) $s = 1$, (b) $t = 0$, (c) $u = -2$, (d) $v = -3$, (e) $w = 5$, (e) $x = 3$.

5. Determine cuáles de los siguientes números reales pertenecen al intervalo $(-\infty, -3)$:
(a) $s = -1$, (b) $t = 0$, (c) $u = -2$, (d) $v = -3$.

6. Aproxime los siguientes números por medio de números racionales con dos cifras decimales

   (a) $v = 1.254$, (b) $v = 1.456$, (c) $v = 1.939$, (d) $v = 1.999$.

7. Aproxime los siguientes números a la décima más cercanas.

   (a) $v = 1.254$, (b) $v = -12.456$, (c) $v = -1.939$.

8. Aproxime $w = 1.25654$, con un número racional con 1 cifra decimal.

9. Aproxime el número irracional $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$, por medio de un número racional con dos cifras decimales.

10. Aproxime el número irracional $\sqrt{3} = 1.732050808\ldots$, por medio de un número racional con una cifra decimal.

11. Aproxime la medida de los siguientes ángulos al grado más próximo

    (a) $\alpha = 21.25°$, (b) $\beta = 45,05°$, (c) $\gamma = 125.12°$.

12. Aproxime el número $\pi = 3.141592654\ldots$ con cuatro cifras decimales.

13. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es correcta. Cuando utilizamos el método del redondeo para aproximar un número real x, con el número racional r, con dos cifras decimales

    (a) el número real x es mayor que el número racional r;

    (b) el número real x es menor que el número racional r;

    (c) no siempre el número real x es mayor que el número racional r.

Lección 8

Medida de ángulos: sistema circular

En esta lección estudiaremos el sistema circular para medir ángulos y veremos la forma de relacionar las medidas en grados y radianes de un ángulo.

Medida de ángulos en radianes

Para medir ángulos en el sistema circular se utiliza como unidad de medida el ***radián***, denotado rad.

Dada una circunferencia con centro en el punto O y radio r, un radián es la medida de un ángulo central con vértice en O, subtendido por un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia. Véase la parte izquierda de la figura 8.1

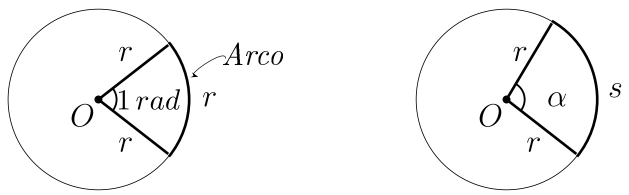


Figura 8.1

Dada una circunferencia de radio r, usamos la siguiente proporción para calcular bien sea el radio, la longitud s del arco o la medida del ángulo α en radianes, cuando conocemos las medidas de dos de estos elementos

$$\boxed{\frac{s}{r} = \frac{\alpha}{1}.}$$

Las unidades de longitud de s y r deben ser iguales. Entonces la longitud del arco subtendido por el ángulo α dado en radianes es

$$s = r\ \alpha. \tag{8.1}$$

El ángulo central α dado en radianes subtendido por el arco s es

$$\alpha = \frac{s}{r}. \tag{8.2}$$

Ejemplo 8.1

Calcule el arco subtendido por un ángulo central cuya medida es 2 radianes en una circunferencia cuyo radio mide 6 centímetros.

Por la ecuación (8.1), $s = r\alpha = (6)(2)$ cm $= 12$cm.

Ejemplo 8.2

Veamos que el ángulo α que representa una rotación completa alrededor del centro, en un círculo de radio r, mide 2π radianes. En efecto, recordemos que la longitud de la circunferencia es $C = 2\pi r$. Por la ecuación (8.2), tenemos que la medida de α en radianes es

$$\alpha = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

El ángulo α mide 2π rad.

Ejemplo 8.3

Por el ejemplo 8.2, el ángulo central en radianes que subtiende una semicircunferencia es π radianes y el ángulo central que corresponde a un cuarto de circunferencia es $\frac{\pi}{2}$ radianes.

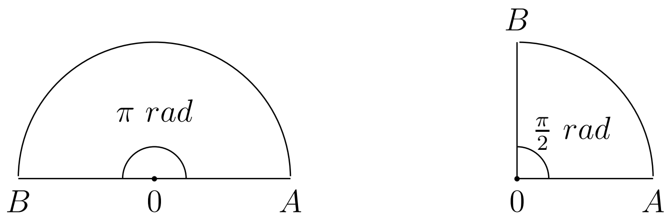


Figura 8.2

Conversión: grados sexagesimales - radianes

Puesto que 180° corresponden a π radianes, usaremos la siguiente proporción para convertir grados sexagesimales a radianes o radianes a grados sexagesimales,

$$\frac{\alpha_g}{180^\circ} = \frac{\alpha_r}{\pi \; rad}, \tag{8.3}$$

donde α_g es la medida en grados del ángulo α

y α_r es su medida en radianes.

Ejemplo 8.4

Si $\alpha_r = 1$ radián, la medida en grados α_g puede calcularse por

$$\alpha_g = 180^\circ \, \frac{1 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Así,

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}, \qquad \text{valor exacto de un radián,}$$
$$1\ rad \approx 57.32^\circ, \qquad \text{valor aproximado de un radián.}$$

Ejemplo 8.5

Si $\alpha_g = 1^\circ$, entonces α_r puede calcularse por

$$\alpha_r = \pi \text{ rad } \frac{1^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{180}\text{rad.}$$

Entonces

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Ejemplo 8.6

1. Si el ángulo α mide 30°. La medida de α en radianes se calcula:

$$30^\circ = 30\ \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

2. El ángulo c mide 2 radianes. Encuentre el valor exacto de la medida de c en grados y su valor aproximado con dos cifras decimales. Represente este ángulo geométricamente.

$$2\,\text{rad} = 2\ \tfrac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{\pi},$$
$$c = \frac{360^\circ}{\pi},$$
$$c \approx 114.64^\circ.$$

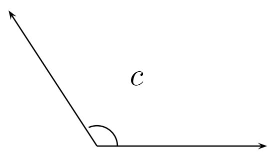


Figura 8.3

Ángulos complementarios y suplementarios

Puesto que las medidas en radianes de los ángulos 90° y 180° son iguales a $\frac{\pi}{2}$ rad y π rad, respectivamente, tenemos que

- Dos ángulos son complementarios, si la suma de sus medidas en radianes es $\frac{\pi}{2}$ rad.
- Dos ángulos son suplementarios, si la suma de sus medidas en radianes es π rad.

Ejemplo 8.7

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ rad , encuentre su ángulo complementario y su ángulo suplementario.

Puesto que $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$, el ángulo complementario de $\frac{\pi}{4}$ rad es $\frac{\pi}{4}$ rad.

El ángulo suplementario de $\frac{\pi}{4}$ rad es $\frac{3\pi}{4}$ rad, ya que: $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi-\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Ejercicios

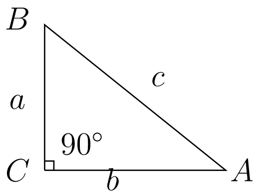
1. El ángulo b mide $\frac{\pi}{5}$ radianes. Encuentre su medida en grados
2. Exprese los siguientes ángulos en el sistema circular:
   (a) 30°, (b) 45°, (c) 60°, (d) 90°, (e) 120°, (f) 150°, (g) 180°.
3. Dados los siguientes ángulos, encuentre sus ángulos complementarios:
   (a) $\frac{\pi}{5}$ rad (b) $\frac{\pi}{3}$ rad .
4. Dados los siguientes ángulos, encuentre sus ángulos suplementarios:
   (a) $\frac{\pi}{2}$ rad, (b) $\frac{\pi}{4}$ rad, (c) $\frac{\pi}{6}$ rad .
5. Encuentre la medida en radianes de un ángulo central subtendido por un arco de 13 centímetros en una circunferencia con radio 10 centímetros.
6. Encuentre la medida en radianes de un ángulo central subtendido por un arco de 3 centímetros en una circunferencia con longitud 6 centímetros.
7. Encuentre la medida en grados de un ángulo central subtendido por un arco de 3 centímetros en una circunferencia con longitud 4 centímetros.
8. La medida de un ángulo α es 30°, ¿cómo varía su medida en radianes si la medida de α en grados sexagesimales se triplica?
9. Si la medida en radianes de un ángulo α se multiplica por 2, ¿cómo varía la medida de α en grados?
10. El radio de una circunferencia mide 12 cm. Si el radio se divide por 3, ¿cómo varía la longitud del arco subtendido por un ángulo cuya medida es $\frac{\pi}{4}$ radianes? Observe que la medida del ángulo permanece constante.
11. El radio de una circunferencia mide R cm. Si el radio se triplica, ¿cómo varía la longitud del arco subtendido por un ángulo cuya medida es α radianes?
12. Si la longitud del la aguja minutera de un reloj es de 10 centímetros. ¿Cuál es la distancia recorrida por la punta de la aguja en 15 minutos?
13. Si los radios de las ruedas de una bicicleta miden 20 centímetros, que distancia recorre la bicicleta cuando las ruedas han efectuado 100 revoluciones?
14. Los radios de las ruedas delantera y trasera de una bicicleta miden respectivamente 12.5 y 25 centímetros. (a) Si la rueda trasera completa 100 revoluciones, ¿cuántas revoluciones completará la rueda delantera? (b)¿Cuál es la medida en radianes del ángulo correspondiente a la rotación de la rueda trasera, si la rueda delantera rota 20 radianes?

Lección 9

Relaciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

En esta lección estudiaremos las relaciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo definidas como razones entre sus lados. Estudiaremos las relaciones recíprocas y las cofunciones.

A continuación vamos a definir las relaciones ***seno***, ***coseno***, ***tangente***, ***cotangente***, ***secante***, y ***cosecante*** de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo como razones entre las medidas de sus lados; por simplicidad denotaremos estas relaciones por: sen, cos, tan, cot, sec y csc, respectivamente. Para las definiciones se da un nombre especial a los catetos teniendo en cuenta su ubicación con respecto a cada ángulo.



a es el cateto opuesto del ángulo A,
b es el cateto adyacente del ángulo A,
c es la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Figura 9.1

Las ***relaciones trigonométricas*** se definen por

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c},\\
\cos A &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c},\\
\tan A &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b},\\
\cot A &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a},\\
\sec A &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b},\\
\csc A &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

Las relaciones trigonométricas también se denominan ***razones trigonométricas***.

Ejemplo 9.1

Si en la figura 9.1 $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$, calcule las relaciones trigonométricas del ángulo A.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{a}{c} = \frac{3}{5}, & \cos A &= \frac{b}{c} = \frac{4}{5}, \\ \tan A &= \frac{a}{b} = \frac{3}{4}, & \cot A &= \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ \sec A &= \frac{c}{b} = \frac{5}{4}, & \csc A &= \frac{c}{a} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición de las relaciones trigonométricas hay pares de razones que son recíprocas. Esto es, la primera razón es el inverso multiplicativo de la segunda:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{a}{c} & \text{es la recíproca de} & \dfrac{c}{a}, \\ \dfrac{b}{c} & \text{es la recíproca de} & \dfrac{c}{b}, \\ \dfrac{a}{b} & \text{es la recíproca de} & \dfrac{b}{a}. \end{array}$$

Tenemos entonces las siguientes igualdades que reciben el nombre de ***relaciones recíprocas:***

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{1}{\csc A}, \\ \cos A &= \frac{1}{\sec A}, \\ \tan A &= \frac{1}{\cot A}. \end{aligned}$$

Ejemplo 9.2

En un triángulo rectángulo ACB la medida del cateto opuesto al ángulo A es 6 cm y la de su cateto adyacente es 8 cm. Encuentre los valores de las relaciones trigonométricas de dicho ángulo.

Solución

Representamos los datos en el triángulo de la figura 9.2.

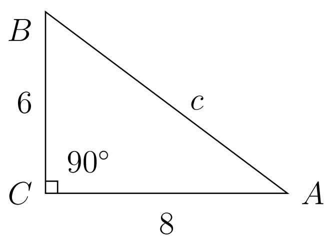


Figura 9.2

Para encontrar las relaciones trigonométricas debemos conocer, además de la longitud de sus catetos, la longitud de su hipotenusa. Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100, \\ c &= 10 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Por las definiciones:

$$\operatorname{sen} A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \cos A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \qquad \tan A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Usamos las relaciones recíprocas y obtenemos :

$$\csc A = \frac{1}{senA} = \frac{5}{3}, \qquad \sec A = \frac{1}{cosA} = \frac{5}{4}, \qquad \cot A = \frac{1}{tanA} = \frac{4}{3}.$$

Relaciones de cociente

De las definiciones de las razones trigonométricas podemos además concluír que:

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} \quad \text{y} \quad \cot A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}. \tag{9.1}$$

En efecto,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan A, \qquad \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \cot A.$$

Ejemplo 9.3

Si se conoce que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, entonces de acuerdo con las igualdades en (9.1)

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{cos\, \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Ejercicios

1. En el triángulo rectángulo ΔBAC, el ángulo A es recto. Calcule las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos B y C, si $b = 2$ cm y $c = 4$ cm.

2. En el triángulo rectángulo ΔBAC, el ángulo A es recto. Calcule las funciones trigonométricas de los ángulos B y C, si $a = 12$ cm y $c = 4$ cm.
3. Calcule $\cot A$ si $\operatorname{sen} A = \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Calcule $\csc A$ si $\operatorname{sen} A = \frac{1}{2}$.
5. Calcule $\sec A$ si $\cos A = 1$.
6. ¿Es posible que $\operatorname{sen} C = \frac{3}{2}$, en un triángulo rectángulo ΔABC, con $\angle B = 90°$?
7. ¿Es posible que $\tan C = \frac{3}{2}$, en un triángulo rectángulo ΔABC, con $\angle B = 90°$?
8. En la siguiente tabla se dan los valores de la relación trigonométrica $\operatorname{sen} A$ para diferentes ángulos A, complete los datos faltantes para $\csc A$.

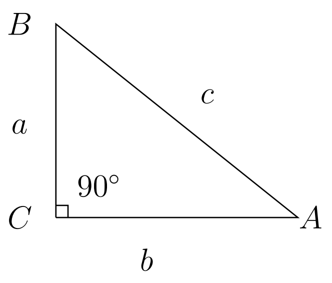
A	$\operatorname{sen} A$	$\csc A$
$30°$	$\frac{1}{2}$	
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

Lección 10

Relaciones trigonométricas de ángulos complementarios

En esta lección estudiaremos las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo para los ángulos complementarios.

En el triángulo ACB de la figura 10.1 podemos determinar las relaciones trigonométricas de los ángulos agudos A y B y compararlas



$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{b}{a},$$

$$\sec A = \frac{c}{b}, \quad \csc A = \frac{c}{a}.$$

Figura 10.1

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}, \qquad \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\tan B = \frac{b}{a}, \qquad \cot B = \frac{a}{b},$$

$$\sec B = \frac{c}{a}, \qquad \csc B = \frac{c}{b}.$$

Observamos que $\operatorname{sen} B = \cos A$ y $\cos B = \operatorname{sen} A$; $\tan B = \cot A$ y $\cot B = \tan A$; $\sec B = \csc A$ y $\csc B = \sec A$.

Como los ángulos A y B son complementarios tenemos las siguientes afirmaciones:

- **El seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.**
- **La tangente de un ángulo es igual a la cotangente de su ángulo complementario.**
- **La secante de un ángulo es igual a la cosecante de su ángulo complementario.**

De los anteriores resultados se obtienen las llamadas identidades por ***cofunción***.
Para cada ángulo agudo A se cumple que:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \cos\left(90^\circ - A\right),\\ \cos A &= \operatorname{sen}\left(90^\circ - A\right),\\ \tan A &= \cot\left(90^\circ - A\right),\\ \cot A &= \tan\left(90^\circ - A\right),\\ \sec A &= \csc\left(90^\circ - A\right),\\ \csc A &= \sec\left(90^\circ - A\right). \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

Ejemplo 10.1

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son α y β. Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, encuentre $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\beta$ y $\tan\beta$.

Solución
Teniendo en cuenta la definición de la relación trigonométricaseno, podemos imaginar un triángulo en el cual un cateto y la hipotenusa tienen longitudes iguales a 1 unidad y 2 unidades, respectivamente; (la unidad de medida es igual para las dos dimensiones). Para hallar el valor del coseno debemos calcular el valor de b. Véase la figura 10.2

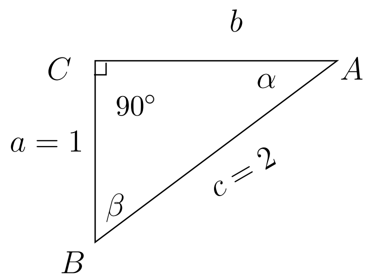


Figura 10.2

Por el teorema de Pitágoras:

$$2^2 = 1 + b^2.$$

Por lo cual

$$b^2 = 4 - 1; \quad \text{y entonces} \quad b = \sqrt{3}.$$

Por lo tanto

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Utilizando las relaciones que existen entre las razones trigonométricas de un ángulo y su ángulo complementario obtenemos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad \cos\beta = \frac{1}{2}.$$

Por último
$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Ejemplo 10.2

Si la medida del ángulo A es $35°$ y se sabe que $\operatorname{sen} A \approx 0.57$ y $\cos A \approx 0.82$, encuentre los valores de seno, coseno y tangente del ángulo cuya medida es $55°$.

Solución

Generalmente los valores de las razones trigonométricas no son números racionales, por ello tomamos aproximaciones tomando un número finito de cifras decimales. Utilizaremos el signo "$=$" para las cantidades exactas y " $\approx$" para las cantidades aproximadas. Véase, si se requiere, la nota 7.1 en la página 28.

Como $55° = 90° - 35°$, utilizamos las identidades por cofunción:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 55° &= \cos 35° \approx 0.82, \\ \cos 55° &= \operatorname{sen} 35° \approx 0.57. \end{aligned}$$

Sabemos que la tangente de un ángulo se puede hallar realizando la división del seno por el coseno de dicho ángulo. Tenemos entonces:

$$\tan 55° \approx \frac{0.82}{0.57} \approx 1.44.$$

Ejemplo 10.3

Si $\operatorname{sen} 27° \approx 0.45$ y $\operatorname{sen} 63° \approx 0.89$ encuentre los valores de todas las relaciones trigonométricas de los dos ángulos.

Solución
Como $27° + 63° = 90°$, los dos ángulos son complementarios. Entonces hallamos las relaciones trigonométricas correspondientes a $27°$ y utilizamos las relaciones trigonométricas de los ángulos complementarios para encontrar las relaciones trigonométricas de $63°$:

$$\begin{aligned} \cos 27° &= \operatorname{sen}(90° - 27°) = \operatorname{sen} 63° \approx 0.89, \\ \tan 27° &\approx \frac{0.45}{0.89} \approx 0.51, \qquad \csc 27° \approx \frac{1}{0.45} \approx 2.22, \\ \sec 27° &\approx \frac{1}{0.89} \approx 1.12, \qquad \cot 27° \approx \frac{1}{0.51} \approx 1.96. \end{aligned}$$

Ahora hallamos los valores de las relaciones del ángulo con medida $63°$:

$$\begin{aligned} \cos 63° &= \operatorname{sen} 27° \approx 0.45, & \tan 63° &= \cot 27° \approx 1.96, \\ \cot 63° &= \tan 27° \approx 0.51, & \sec 63° &= \csc 27° \approx 2.22, \\ \csc 63° &= \sec 27° \approx 1.12. \end{aligned}$$

Ejercicios

Teniendo en cuenta que α y β son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, en cada uno de los siguientes numerales construya un triángulo que represente la información dada y encuentre los valores faltantes de las relaciones trigonométricas dadas a continuación: $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\operatorname{sen}\beta, \cos\beta$ y $\tan\beta$.

1. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$,
2. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
3. $\tan\beta = 2$,
4. $\sec\beta = 1.5$.

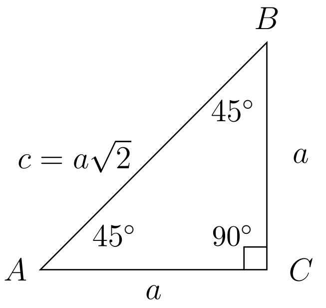
Lección 11

Relaciones trigonométricas de ángulos especiales

En esta lección veremos las relaciones trigonométricas de los ángulos con medida $45°, 60°$ y $30°$, utilizando propiedades de los triángulos isósceles y equiláteros. También haremos algunos ejercicios de aplicación.

Relaciones trigonométricas del ángulo cuya medida es $45°$.

Tomamos el triángulo rectángulo isósceles ΔACB representado en la figura 11.1: sus dos catetos tienen la misma longitud a, el ángulo en C es recto y sus dos ángulos agudos miden $45°$ y son complementarios. Véase la lección 5 en la cual estudiamos las propiedades de los triángulos isósceles. Para encontrar las razones trigonométricas, vamos a expresar la hipotenusa en términos de a:



$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + a^2 = 2a^2,\\
c &= \sqrt{2a^2},\\
c &= a\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Figura 11.1

Por las definiciones de las relaciones trigonométricas tenemos:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} 45° &= \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\\
\tan 45° &= \frac{a}{a} = 1.
\end{aligned}
$$

Utilizamos las relaciones de los ángulos complementarios y las relaciones recíprocas para calcular las relaciones trigonométricas restantes

$$
\cos 45° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cot 45° = \tan 45° = 1,
$$

$$\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \csc 45° = \sec 45° = \sqrt{2}.$$

Relaciones trigonométricas de los ángulos con medida $60°$ y $30°$

En la figura 11.2 representamos el triángulo equilátero ΔABC. Sus tres ángulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$ son congruentes y su medida es $60°$. Sus lados son congruentes y tienen longitud l.

Por propiedades de los triángulos equiláteros, la altura $\overline{CD}$ sobre el lado $\overline{AB}$ es bisectriz del ángulo $\angle BCA$ y divide al lado AB en dos segmentos con la misma medida, $\frac{l}{2}$ (véase el teorema 5.6 en la lección 5).

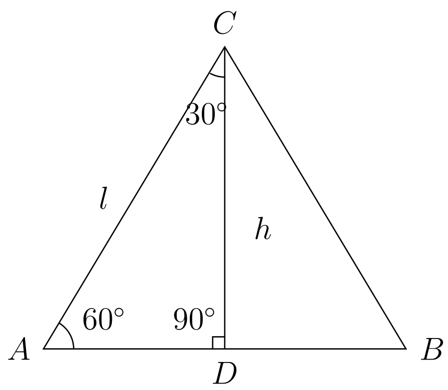


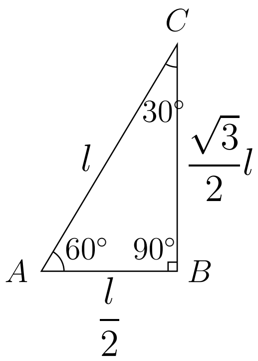
Figura 11.2

El triángulo $\triangle ADC$ es rectángulo en D, la longitud de su hipotenusa es l, uno de sus catetos mide $\frac{l}{2}$ y el otro h.

Usamos el teorema de Pitágoras para calcular h en términos del lado l:

$$\begin{aligned}
l^2 &= h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}, \\
h^2 &= l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}, \\
h &= \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l.
\end{aligned}$$

Por las definiciones de las razones trigonométricas obtenemos:



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2},$$
$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}, \quad \cot 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\sec 60^\circ = \frac{l}{\frac{l}{2}} = 2, \quad \csc 60^\circ = \frac{l}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Figura 11.3

Los ángulos que miden 30° y 60° son complementarios; así

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$
$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

Ejemplo 11.1

Encuentre el valor de $x = \sqrt{2}\operatorname{sen} 45^\circ(2\csc 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ)$.

Solución
Reemplazando los valores de las relaciones trigonométricas obtenemos:

$$x = \sqrt{2}\operatorname{sen} 45^\circ(2\csc 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ) = (\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right),$$
$$x = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Ejemplo 11.2

Encuentre el perímetro del triángulo rectángulo de la figura 11.4:

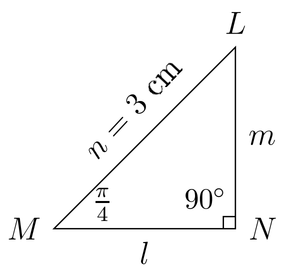


Figura 11.4

Solución
Recordemos que cuando uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 45°, este triángulo es isósceles; así, los dos catetos son congruentes.

Entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$m = l, \qquad m^2 + l^2 = 9.$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda tenemos

$$2m^2 = 9, \quad m = \sqrt{\frac{9}{2}}.$$

Simplificando se tiene que

$$m = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Si designamos por P al perímetro del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} P &= 3 + m + l = 3 + m + m = 3 + 2m \\ &= 3 + 2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 3 + 3\sqrt{2} = 3(1+\sqrt{2}) \text{ cm}. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Halle las seis relaciones trigonométricas de los ángulos cuyas medidas son: $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$.
2. Un extremo de un alambre de soporte debe ser colocado en el extremo superior de un poste telefónico de 3 metros de altura y el otro debe fijarse en el suelo formando un ángulo de 45° con el suelo. ¿Cuál debe ser la longitud del alambre?
3. Encuentre el valor de $x = 3\operatorname{sen}^2(45°) - 5\operatorname{sen}30°$.
4. Desde un punto al nivel del suelo y a una distancia de 7.5 metros de la base de un asta de bandera se ve su punta. El ángulo que forman el suelo y la línea que va de dicho punto hasta la punta del asta es de 30°. Calcule la altura del asta.

Lección 12

Solución de triángulos rectángulos I

En esta lección veremos cómo encontrar las medidas de los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo utilizando las funciones trigonométricas. Presentamos algunos problemas de aplicación.

Cuando requerimos encontrar los valores de las relaciones trigonométricas de un ángulo dado o el ángulo que corresponde a una relación trigonométrica determinada, es necesario hacer uso de una ***tabla de funciones trigonométricas*** o de una ***calculadora***. En el ejemplo 12.1 aprenderemos cómo utilizar la tabla de funciones trigonométricas que aparece en la página 422. Luego aprenderemos a usar la calculadora para encontrar los valores de las relaciones trigonométricas.

Tablas trigonométricas

La tabla trigonométrica 91.1, que aparece en la página 422, consta de una primera columna para los ángulos en grados entre $0°$ y $45°$, una columna para cada una de las relaciones trigonométricas del respectivo ángulo y finalmente una columna para los ángulos entre $45°$ y $90°$, escritos en orden inverso.

Observe que en cualquier línea de esta tabla la suma de los ángulos en la primera y la última columna es $90°$; es decir, son complementarios.

Observemos también que la primera y la última líneas de la tabla contienen los nombres de las relaciones trigonométricas. Sin embargo, en la primera línea de cada columna aparece el nombre de una relación trigonométrica y en esa misma columna en la última línea aparece su respectiva cofunción.

Para determinar los valores de las relaciones trigonométricas de los ángulos mayores de $45°$, buscamos el nombre de la relación en la última línea de la tabla.

Ejemplo 12.1

Calculemos $\operatorname{sen} 28°$. En la tabla 91.1, de la página 422, ubicamos la fila correspondiente al ángulo $28°$ y luego localizamos la columna correspondiente a la relación trigonométrica seno. Tomamos el dato localizado en la intersección de la fila correspondiente al ángulo, con la columna correspondiente a la función y obtenemos que

$$\operatorname{sen} 28° \approx 0.4695.$$

Por otra parte el ángulo complementario de $28°$ es $62°$, para encontrar el valor de su coseno localizamos la columna correspondiente al coseno en la última línea de la tabla y encontramos que

$$\cos 62° \approx 0.4695.$$

Uso de calculadoras para hallar relaciones trigonométricas

Por lo general las calculadoras traen teclas o botones para encontrar las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo dado. En algunas es posible calcular directamente las relaciones cosecante, secante y cotangente. Cuando la calculadora no trae estas últimas relaciones, para obtenerlas se deben usar las relaciones recíprocas. En algunas de ellas se puede calcular con ángulos dados en grados o radianes. En este caso debe verificarse que la calculadora esté en el sistema de medida adecuado.

Las calculadoras retornan valores con un número dado de cifras decimales, el cual depende de muy diversos factores. En cada caso se puede indicar el número de cifras decimales que se utilizará de acuerdo con la conveniencia.

Ejemplo 12.2

Aproxime el valor de $\operatorname{sen} 32°$ por medio de un número racional con 4 cifras decimales.

Solución

Primero nos aseguramos de que la calculadora esté en el modo de grados. La calculadora retorna el número 0.529919. Utilizando el método del redondeo, por medio de un número con 4 cifras decimales, obtenemos:

$$\operatorname{sen} 32° \approx 0.5299.$$

Este método fue explicado en la lección 7.

Ejemplo 12.3

Aproxime el valor de $\sec 32°$ por medio de un número racional con 4 cifras decimales.

Solución

Utilizamos la relación recíproca $\sec 32° = \dfrac{1}{\cos 32°}$.

Recordemos que si queremos aproximar el número por medio de un número con dos cifras decimales, debemos conocer por lo menos tres de sus cifras decimales. Introducimos en la calculadora $\cos 32°$; si la calculadora devuelve el número $0.848048\ldots$, aproximamos $\sec 32°$ así:

$$\sec 32° = \frac{1}{\cos 32°} \approx \frac{1}{0.8480}.$$

La calculadora devuelve el valor $1.179224\ldots$ y nuestra respuesta con cuatro cifras decimales es

$$\sec 32° \approx 1.1792.$$

También se puede obtener este resultado en la tabla trigonométrica de la página 422.

Para encontrar el ángulo α tal que $0 \leq \alpha \leq 90°$, correspondiente a una relación trigonométrica conocida, utilizamos las teclas $\operatorname{sen}^{-1}, \cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ de la calculadora, o aquellas teclas que el manual de su calculadora le indique para este propósito.

Ejemplo 12.4

Si $\operatorname{sen} \alpha = 0.2725$, encuentre el ángulo α en grados, aproximado con una cifra decimal.

Solución

Primero verificamos que la calculadora esté utilizando el sistema sexagesimal; utilizamos la tecla sen^{-1} e introducimos el número 0.2725, en el orden indicado en el manual de la calculadora. Ésta nos devuelve el número $15.81308\ldots$. La respuesta es $\alpha \approx 15.8°$.

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo consiste en hallar la medida de sus lados y de sus ángulos. Para resolver un triángulo rectángulo debemos tener información bien sea de dos de sus lados o de un lado y un ángulo agudo.

Resuelva el triángulo rectángulo de la figura12.1. Aproxime las magnitudes que no puedan calcularse en forma exacta por medio de números con una cifra decimal.

Solución

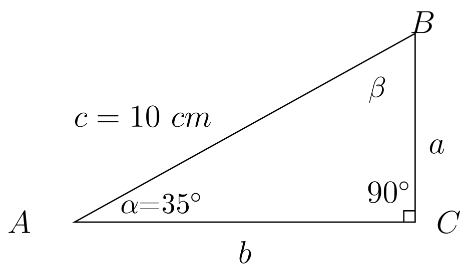


Figura 12.1

Podemos encontrar la longitud de a utilizando la definición de la función seno. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 35° \approx 0.5736$ tenemos:

$$\operatorname{sen} 35° = \frac{a}{10}.$$

$$a = 10\ (\operatorname{sen} 35°) \approx 10\ (0.5736) \approx 5.736 \text{ cm}.$$

Como los ángulos α y β son complementarios $\alpha + \beta = 90°$. Por lo cual

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 35° = 55°.$$

El valor de b puede calcularse de diferentes formas: usando el teorema de Pitágoras o las definiciones de seno o de tangente de un ángulo. Elegimos la última opción, dado que: $\tan 55° \approx 1.4281$, obtenemos:

$$\tan 55° = \frac{b}{a} \approx \frac{b}{5.736},$$
$$b \approx 5.7\,(\tan 55°) \approx 5.736\,(1.4281) \approx 8.191.$$

Respuesta: $\alpha = 35°, \beta = 55°, c = 10$ cm, $a \approx 5.7$ cm y $b \approx 8.2$ cm.

Ejercicios

1. Aproxime los siguientes valores con números racionales con 2 cifras decimales
   $a)$ $\operatorname{sen} 31°$, $\quad(b)$ $\tan 55°$, $\quad(c)$ $\cos 75°$, $\quad(d)$ $\cot 25°$.

2. Aproxime a grados enteros los valores de los ángulos determinados por las siguientes relaciones trigonométricas:
   $a)$ $\operatorname{sen}\alpha = 0.43$, $\quad(b)$ $\tan\beta = 1.23$, $\quad(c)$ $\cos\gamma = 0.76$, $\quad(d)$ $\cot\theta = 0.45$.

3. Explique cómo obtener los resultados obtenidos en el numeral anterior usando únicamente la tabla trigonométrica 91.1 que aparece en la página 422.

4. Resuelva el triángulo dado en la figura 12.2. Aproxime estos valores a la unidad más cercana.

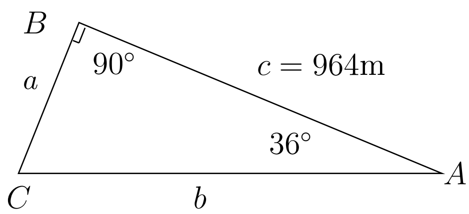


Figura 12.2

Lección 13

Solución de triángulos rectángulos II

En esta lección continuaremos haciendo ejercicios relacionados con la solución de triángulos rectángulos. También presentaremos la forma trigonométrica del área de un triángulo.

Ejemplo 13.1

Resuelva el triángulo $\triangle ACB$ tal que $C = 90°$, su hipotenusa mide 17 cm y uno de sus catetos mide 8 cm. Aproxime los ángulos a grados enteros.

Solución

Hacemos un esquema que nos permita representar el problema, ubicando los datos conocidos e identificando los elementos que debemos encontrar. Véase la figura 13.1.

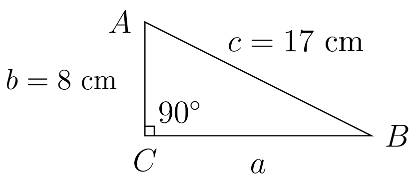


Figura 13.1

Debemos encontrar la medida del lado a y la de los ángulos A y B. Aplicamos el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}(17)^2 &= 64 + a^2,\\ 289 &= 64 + a^2,\\ a^2 &= 289 - 64 = 225,\\ a &= \sqrt{225} = 15 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Podemos encontrar la medida de los dos ángulos agudos a partir de la definición de cualquiera de las razones trigonométricas.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{15}{17} \approx 0.8824,\\ \angle A &\approx 62°.\end{aligned}$$

Recordemos que el ángulo $\angle B$ es el complemento del ángulo $\angle A$, por lo tanto :

$$\begin{aligned}\angle B = 90° - \angle A &\approx 90° - 62°,\\ \angle B &\approx 28°.\end{aligned}$$

Ejemplo 13.2

El triángulo $\triangle ACB$ de la figura 13.2 es rectángulo y $\overline{CD}$ es la altura sobre la base $\overline{AB}$. Encuentre la medida de sus lados y de sus ángulos. Aproxime los ángulos a décimas de grados y los lados a décimas de centímetro.

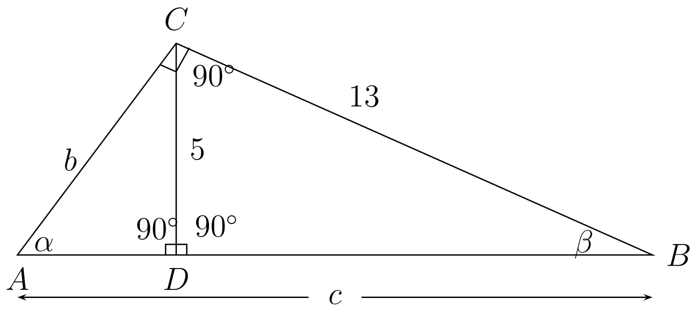


Figura 13.2

Solución
Debemos calcular las medidas de los ángulos α y β, la longitud b y la medida del lado $\overline{AB}$ la cual denotaremos por c.

A partir del triángulo $\triangle CDB$ obtenemos el valor del ángulo β:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13} \approx 0.3846.$$

Por lo cual

$$\beta \approx 22.6°$$

y

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 22.6° \approx 67.4°.$$

En el triángulo $\triangle ACB$ calculamos las dimensiones que faltan b y c. Hallamos los valores de las relaciones trigonométricas del ángulo β y encontramos que

$$\begin{aligned}\tan\beta &\approx 0.4162 \quad \text{y} \quad \sec\beta \approx 1.0832,\\ \tan\beta &= \frac{b}{13},\\ b &\approx 13\ (0.4162) \approx 5.4 \text{ cm},\\ \sec\beta &= \frac{c}{13},\\ c &\approx 13\ (1.0832) \approx 14.1 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Forma trigonométrica del área de un triángulo

Utiizamos la notación del triángulo ΔABC de la figura 13.3. Sabemos que el área del triángulo ΔABC es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh. \tag{13.1}$$

En el triángulo rectángulo ΔBDC tenemos que

$$\operatorname{sen} C = \frac{h}{a}.$$

Despejamos h

$$h = a \operatorname{sen} C.$$

Sustituyendo la expresión para h en (13.1), obtenemos

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C. \tag{13.2}$$

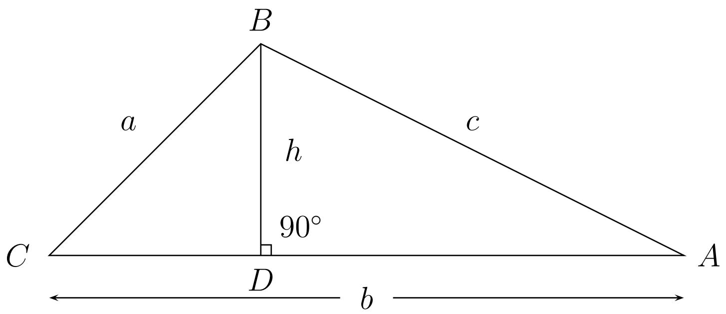


Figura 13.3

Ejemplo 13.3

Si en el triángulo ΔABC de la figura 13.3, $a = 3$ cm, $b = 10$ cm y el ángulo $C = 45°$, su área está determinada por

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(3)(10) \operatorname{sen} 45° = 15\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{2}\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

Ejercicios

1. Desde un punto P se observa un árbol cuya altura es $150\sqrt{3}$ pies. El ángulo entre el piso y la línea que va desde P a la parte superior del árbol mide 60°. Calcule la distancia desde P a la base del árbol.

2. Resuelva el triángulo dado en la figura 13.4, considerando que es rectángulo en B. Encuentre su área

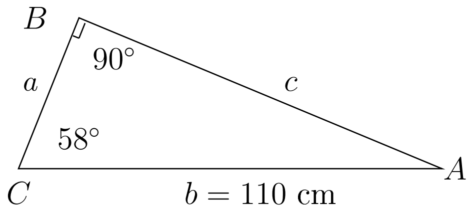


Figura 13.4

3. En un triángulos rectángulo ΔACB el ángulo en A mide 25° y el cateto b adyacente a éste tiene una longitud de 3.4 m. Calcule la medida del ángulo agudo B, del cateto a y la hipotenusa c. Aproxime su respuesta a una cifra decimal.

4. Encuentre la altura de un triángulo isósceles si el ángulo opuesto a la base mide 68° y su base tiene una longitud de 184 cm. Aproxime su respuesta al centímetro más cercano.

5. Encuentre el lado de un hexágono regular inscrito en un círculo con radio 10 centímetros.

6. Encuentre el lado de un polígono regular de 9 lados inscrito en un círculo con radio 4 centímetros.

7. En la figura 13.5, $h = 5$ cm y el segmento CD es perpendicular a $\overline{AB}$. Encuentre la longitud del lado $\overline{AB}$. Aproxime su respuesta al centímetro más cercano.

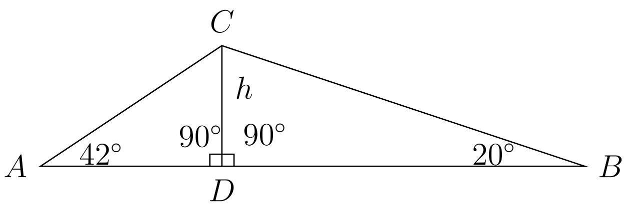


Figura 13.5

Lección 14

Problemas de aplicación de triángulos rectángulos I

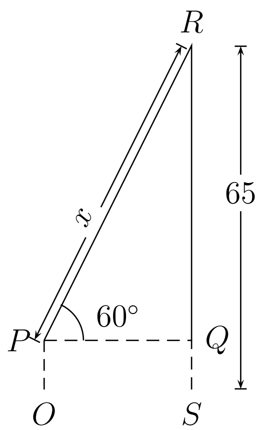
Continuamos con algunos ejemplos de aplicación en los cuales se hacen los cálculos de las distancias de manera indirecta, mediante el uso de las definiciones y propiedades de las relaciones trigonométricas.

Desde la antigüedad se han utilizado las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo. Una de las primeras aplicaciones de la trigonometría fue en Astronomía para predecir las trayectorias y las posiciones de los cuerpos celestes y en general para medir distancias que no se podían calcular en forma directa. Se afirma que los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar la trigonometría para efectuar mediciones en agricultura, en la navegación y en el cálculo del tiempo.

Ejemplo 14.1

Un niño está elevando una cometa y tiene sus manos a una altura de 1 metro por encima del suelo. Si la cometa se halla a 65 metros y la cuerda de la cometa forma un ángulo de 60° con la horizontal, ¿cuántos metros de cuerda está utilizando?

Solución
En la gráfica de la figura 14.1 ilustramos el problema. El punto P representa la localización de las manos del niño; la longitud del segmento $\overline{RS}$ es la altura de la cometa. Debemos calcular el valor de x. Denotamos por y la longitud del cateto $\overline{QR}$ del triángulo rectángulo PQR.



$y = 65 - 1 = 64.$

Usamos la definición de seno:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{y}{x} = \frac{64}{x}.$$
$$\frac{64}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{128}{\sqrt{3}} = \frac{128\sqrt{3}}{3} \text{ m.}$$

Figura 14.1

Ejemplo 14.2

Un constructor desea hacer una rampa de 7.5 metros de largo que se levante 1.5 metros sobre el nivel del suelo. Calcule el ángulo que la rampa forma con la horizontal. Exprese su respuesta en decimas de grado

Solución:

Representamos el problema en la gráfica de la figura 14.2:

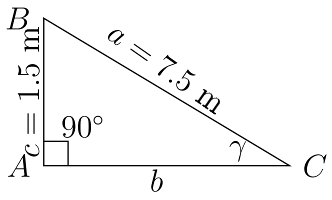


Figura 14.2

Debemos calcular la medida del ángulo γ .

$$sen\ \gamma = \frac{c}{a} = \frac{1.5}{7.5} = 0.2, \qquad \gamma \approx 11.5°.$$

El ángulo que la rampa forma con la horizontal mide aproximadamente 11.5°.

Ejemplo 14.3 *Astronomía*

Si se conoce que la distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente igual a 149.6 millones de kilómetros y que el máximo ángulo entre la línea que va de la Tierra al Sol y la línea que va de la Tierra a Venus es de 46° y si se supone que la Tierra y Venus describen órbitas circulares alrededor del Sol, ¿cuál es la distancia de Venus al Sol? Aproximadamene 280 años antes de Cristo, Aristarco, un matemático y astrónomo griego, sugirió que la Tierra gira alrededor del Sol y calculó la distancia aproximada entre el Sol y la Tierra. Muchos años después se conoció que la órbita descrita por la Tierra alrededor del Sol es elíptica.

Solución

La Tierra y Venus describen órbitas alrededor del Sol, simultáneamente. Denotemos por α al ángulo formado por la línea recta que va desde la Tierra a Venus y la línea recta que va desde la Tierra al Sol, con vértice en la superficie de la tierra. Véase la figura 14.3.

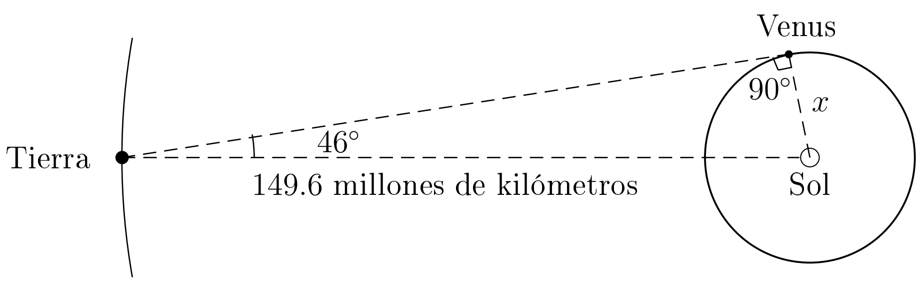


Figura 14.3

Cuando la medida de α es la máxima posible, la línea que va desde la Tierra a Venus debe ser tangente a la órbita de Venus. Entonces por propiedades de las rectas tangentes a la circunferencia sabemos que el ángulo formado por ésta y la línea recta que va del Sol a Venus es un ángulo recto. La distancia que estamos buscando es x. Utilizando que $\operatorname{sen} 46° \approx 0,7193$ tenemos que:

$$\operatorname{sen} 46° = \frac{x}{149.6}$$
$$x \approx 149.6 \operatorname{sen} 46° \approx 107.6 \text{ millones de kilómetros}$$

Ángulos de elevación y de depresión

Definición 14.1

En muchos problemas de aplicación, para medir distancias o calcular longitudes de manera indirecta, se utilizan los ángulos llamados de ***elevación*** o de ***depresión***. El ángulo que forma la **línea visual** con la horizontal recibe el nombre de ***ángulo de elevación***, si el objeto está arriba de la horizontal, o ***ángulo de depresión***, si el objeto está debajo de la horizontal. La línea visual es la línea imaginaria determinada por el ojo y el objeto que observamos.Veamos la gráfica en la figura 14.4.

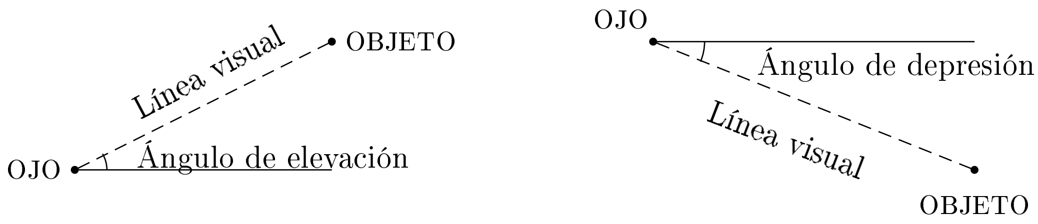


Figura 14.4

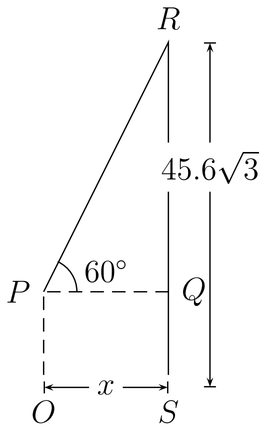
Ejemplo 14.4

Un leñador observa un árbol cuya altura es $45.6\sqrt{3}$ pies con un ángulo de elevación de $60°$. Calcule la distancia a la que se encuentra el leñador del pie del árbol si su punto de visión está a una altura de $1.1\sqrt{3}$ pies.

Solución
En la figura 14.5, se considera que el leñador está de pie en el punto O, su punto de visión (o punto en el cual está ubicado ojo) está en P. La altura del árbol es la longitud del segmento $\overline{SR}$ y es $45.6\sqrt{3}$.

Vamos a encontrar el valor de x. Observemos el triángulo rectángulo PQR: el cateto opuesto al ángulo de elevación es $\overline{QR}$ cuya longitud es $45.6\sqrt{3} - 1.1\sqrt{3} = 44.5\sqrt{3}$; el cateto adyacente es $\overline{PQ}$ cuya longitud es igual a x.

Como conocemos el valor del cateto opuesto al ángulo, podemos utilizar una de las dos relaciones trigonométricas: tangente o cotangente. Vamos a resolverlo usando la cotangente:



$$\cot 60^\circ = \frac{x}{44.5\sqrt{3}},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{44.5\sqrt{3}},$$
$$x = \frac{44.5\sqrt{3}\sqrt{3}}{3},$$
$$x = 44.5 \text{ pies}.$$

Figura 14.5

Ejercicios

1. Una escalera de 6 metros de longitud está apoyada en un muro de un edificio. Si el ángulo que forman el muro y la escalera es de 23°, ¿cuál es la distancia desde el pie de la escalera a la base del edificio? Aproxime su respuesta a la décima más cercana.

2. Desde la punta de un faro a 36.6 metros sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión en dirección a un barco es de 9.5°. ¿A qué distancia de la base del faro está el barco? Aproxime su respuesta a la unidad más cercana.

3. Un globo de aire caliente se mantiene a una altitud constante de 500 metros y pasa directamene por encima de un observador. Después de diez minutos el observador ve el globo con un ángulo de elevación de 50°. Determine la velocidad del globo redondeando al kilómetro más cercano.

4. La escalera de un carro de bomberos tiene una longitud de 13 metros y está apoyada contra una pared. Si forma un ángulo de $43^\circ 50'$ con el piso, ¿a qué altura del edificio está el extremo de la escalera?

5. Un cohete se ha disparado desde el nivel del mar y sube con un ángulo constante de 75°. ¿A qué altura se haya el cohete cuando se ha desplazado horizontalmente 3 kilómetros ?

6. Desde lo alto de un edificio con vista al mar, un observador divisa una lancha que va en dirección al edificio. Si el observador está a 30 m sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión cambia de 30° a 45° durante el periodo de observación, calcule la distancia que recorre la lancha.

Lección 15

Problemas de aplicación de triángulos rectángulos II

En esta lección presentaremos nuevos ejemplos sobre la utilización de ángulos de elevación y de depresión.

Ejemplo 15.1

Un helicóptero está volando directamente sobre un punto A. El piloto observa un punto B a 800 metros al Este del punto A con un ángulo de depresión de 27°. ¿Cuál es la altitud del helicóptero?. Exprese su respuesta en metros enteros.

Solución
Representamos el problema en la figura 15.1:

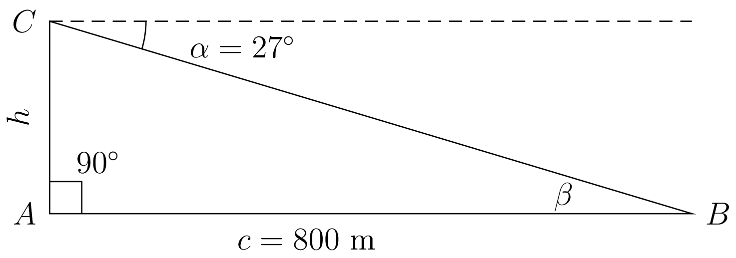


Figura 15.1

El helicóptero se encuentra en el punto C. Debemos calcular el valor de h. Los ángulos α y β tienen la misma medida ya que son congruentes por ser ángulos alternos internos: $\beta = 27°$ y $\tan 27° \approx 0.5095$

$$\begin{aligned} \tan 27° &= \frac{h}{c} = \frac{h}{800}, \\ 0.5095 &\approx \frac{h}{800}, \\ h &\approx 800(0.5095) \approx 408. \end{aligned}$$

R. El helicóptero se encuentra a una altitud aproximada de 408 metros.

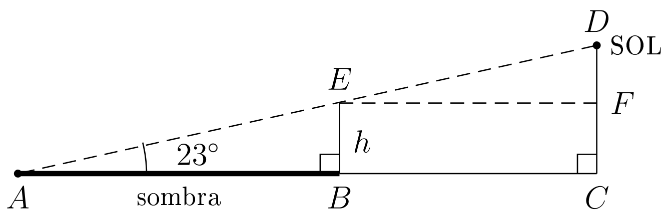
Ejemplo 15.2

Suponga que el ángulo de elevación del sol es de 23°. Si Marta mide 1.7 metros, calcule la longitud de la sombra que proyecta.

Solución

En la figura 15.2 representamos la información dada. Marta está ubicada en el punto B, su estatura es h, y la longitud de su sombra es la longitud del segmento $\overline{AB}$; esta última es la incógnita que llamaremos x.

El ángulo de elevación es $\angle DEF$ y mide 23°, como éste es congruente con $\angle EAB$, por ser ángulos correspondientes, entonces $\angle EAB = 23°$. Puesto que conocemos uno de los ángulos y la medida h del cateto $\overline{EB}$, lo más indicado es aplicar la relación trigonométrica tangente. Como $\tan 23° \approx 0.4245$, obtenemos



$$\tan 23° = \frac{h}{x},$$
$$x = \frac{1.7}{\tan 23°},$$
$$x \approx \tfrac{1.7}{0.4245} \approx 4.00.$$

Figura 15.2

R. La longitud de la sombra que Marta proyecta es aproximadamente igual a 4 metros.

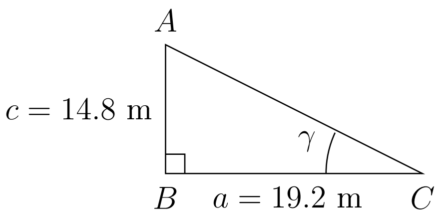
Observación 15.1

En la lección 14 se definieron los ángulos de elevación y de depresión utilizando la línea visual, el vértice del ángulo está a nivel del ojo del observador. Sin embargo, el ángulo de elevación puede tener como vértice un punto de referencia P diferente, sobre la línea visual. El ángulo es de elevación si el objeto está arriba de la horizontal y de depresión si el objeto está debajo de la horizontal.

Ejemplo 15.3

Determine el ángulo de elevación del sol si un asta de bandera que mide 14.8 metros proyecta una sombra de 19.2 metros. Exprese su respuesta en grados enteros.

Solución



$\overline{AB}$ representa el asta.

$\overline{BC}$ representa la sombra del asta.

γ es el ángulo de elevación.

Figura 15.3

En la figura observamos que el procedimiento más adecuado para determinar el ángulo de elevación, es utilizar la relación tangente:

$$
\begin{aligned}
\tan\gamma &= \frac{c}{a},\\
\tan\gamma &= \frac{14.8}{19.2} \approx 0.7708,\\
\gamma &\approx 38^\circ.
\end{aligned}
$$

R. El ángulo de elevación del sol es aproximadamente igual a 38°.

Ejemplo 15.4

Juan observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 20°. Si se acerca 15 metros al árbol, el ángulo de elevación es de 60°. Si la línea de visión de Juan se halla a 1.7 metros del nivel del suelo, ¿cuál es la altura del árbol?

Solución

En la figura 15.4, la altura del árbol, denotada por h es la longitud de segmento $\overline{ED}$:

$$h = z + y.$$

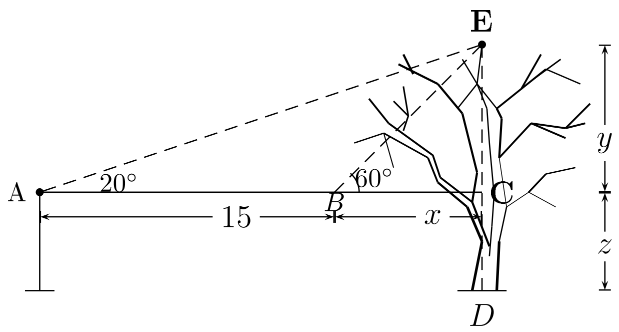


Figura 15.4

Conocemos el valor de z porque es igual a la altura de la línea de visión de Juan:

$$h = 1.7 + y, \tag{15.1}$$

donde y es la longitud de un cateto de dos triángulos rectángulos: $\triangle ACE$ y $\triangle BCE$. Aplicamos la definición de la tangente debido a que tenemos información relacionada con los otros dos catetos:

$$
\begin{aligned}
\tan 60^\circ &= \frac{y}{x},\\
y &= (\tan 60^\circ)\, x. \qquad (15.2)
\end{aligned}
$$

Para hallar el valor de x utilizamos la definición de la tangente en el triángulo $\triangle ACE$:

$$
\begin{aligned}
\tan 20^\circ &= \frac{y}{15+x},\\
y &= (15+x)\tan 20^\circ. \qquad (15.3)
\end{aligned}
$$

Igualando los valores de y en (15.2) y (15.3), obtenemos:

$$\tan 60^\circ \ x = (15 + x) \ \tan 20^\circ.$$

Reemplazamos los valores aproximados de las relaciones $\tan 60^\circ \approx 1.7321$ y $\tan 20^\circ \approx 0.3640$ y resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 1.7321x &\approx 15\ (0.3640) + 0.3640x, \\ 1.7321x - 0.3640x &\approx 15\ (0.3640), \\ 1.3681x &\approx 5.46, \quad x \approx \frac{5.46}{1.3681} \approx 3.9909. \end{aligned}$$

Por lo tanto de (15.2) obtenemos que

$$y \approx 1.7321\ (3.9909) \approx 6.9.$$

Reemplazamos el valor de y en (15.1) para obtener:

$$h = 1.7 + y = 1.7 + 6.9 = 8.6.$$

R. La altura del árbol es, aproximadamente, 8.6 m.

Ejercicios

1. Desde la azotea de un edificio pequeño se ve la parte más alta de otro edificio con un ángulo de elevación de 46° y la parte inferior con un ángulo de depresión de 14°. Si el primer edificio tiene una altura de 28 metros y suponemos que el piso de los dos edificios está al mismo nivel, ¿cuál es la altura del otro edificio?

2. Un cohete multipasos es lanzado verticalmente de tal manera que su velocidad durante los primeros 40 segundos es de 300 kilómetros por hora, momento en el cual se desprende la primera parte. Una fotógrafa se encuentra a 1000 metros del sitio de lanzamiento. ¿A qué ángulo de elevación debe ella dirigir su cámara de manera que pueda fotografiar la separación?

3. Un automovilista va por una carretera a una velocidad de 60 km/h, y se dirige a una montaña. Observa que entre la 1:00 y la 1:10 p.m. el ángulo de elevación de la montaña cambia de 10° a 70°. ¿Cuál es la altura de la montaña?

4. Un piloto despega a nivel del mar con un ángulo de 17° y viaja a una velocidad constante de 150 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo le tomará al avión alcanzar una altura de 1500 metros?

5. Cuando el ángulo de elevación del sol es de 29° en París, la torre Eiffel forma una sombra de aproximadamente 557 metros. ¿Qué altura tiene la torre? Redondee su respuesta al metro más cercano.

Lección 16

Sistema de coordenadas cartesianas

En esta lección estudiaremos la representación de los puntos de un plano en un sistema de coordenadas cartesianas o sistema de coordenadas rectangulares.

Representación de un punto de un plano en un sistema de coordenadas rectangulares

Consideremos dos rectas que se interseptan perpendicularmente en el plano; por comodidad se traza una de ellas horizontal y la otra vertical. Llamamos ***eje*** x a la recta horizontal, ***eje*** y a la recta vertical y al punto de intersección ***origen*** O. Asignamos coordenadas a los puntos sobre estas rectas como se describió en la construcción de la recta real. Véase la lección 7, página 24. Para ele eje vertical los puntos que están por encima del origen tienen coordenadas positivas.

El sistema coordenado descrito se denomina ***sistema coordenado rectangular*** o ***cartesiano***. El origen O tiene el valor cero en ambos ejes. El plano que contiene al eje x y al eje y se llama plano xy y los ejes x y y se denominan ***ejes coordenados.*** Los ejes coordenados dividen el plano xy en cuatro regiones llamadas ***cuadrantes*** como se muestra en la figura 16.1.

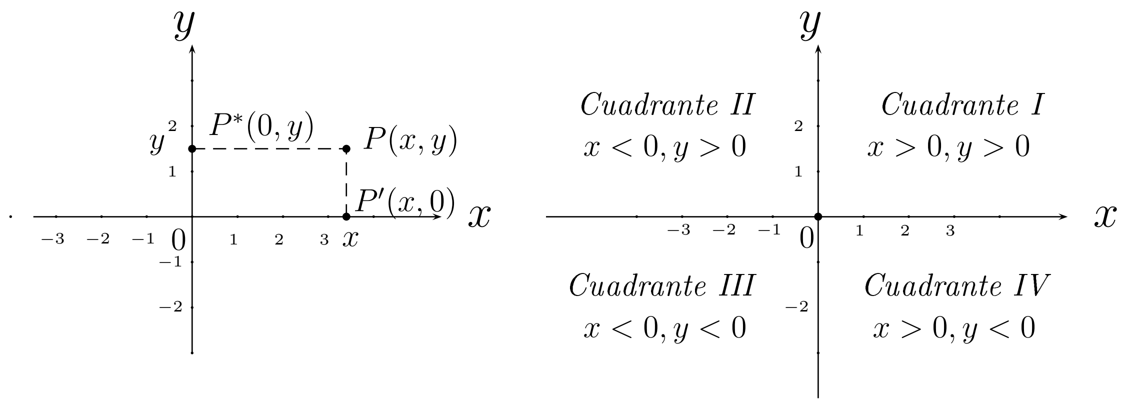


Figura 16.1

Dado un punto P en el plano xy, la ***proyección de*** P ***sobre el eje*** x es el punto P' situado en la intersección del eje x y la recta paralela al eje y trazada por el punto P y la

proyección de P sobre el eje y es el punto P^* situado en la intersección del eje y y la recta paralela al eje x trazada por el punto P.

Cualquier punto P en el plano xy se puede representar por medio de un ***par ordenado*** (x, y) de números reales. El número real x es coordenada del punto P' sobre eje x. Si el punto P está a la derecha del eje y, entonces $x > 0$ y el número real x será negativo si el punto P está a la izquierda del eje y; x se denomina ***abscisa*** de P o ***coordenada*** x de P.

El número real y es la coordenada del punto P^* sobre el eje y . Así, $y > 0$ si el punto P está arriba del eje x y será negativo si el punto P está debajo del eje x; y se denomina ***ordenada*** de P o ***coordenada*** y de P.

Cualquier punto sobre el eje x tiene coordenadas de la forma $(x, 0)$ y cualquier punto sobre el eje y se representa por el par $(0, y)$.

Ejemplo 16.1

En la figura 16.2 se representan los puntos $P_1(3, \frac{3}{2})$, $P_2(-2, 2)$, $P_3(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ y $P_4(3, -2)$. Observemos por ejemplo el punto P_3; puesto que su abscisa y ordenada son negativas, este punto está situado en el cuadrante III o tercer cuadrante.

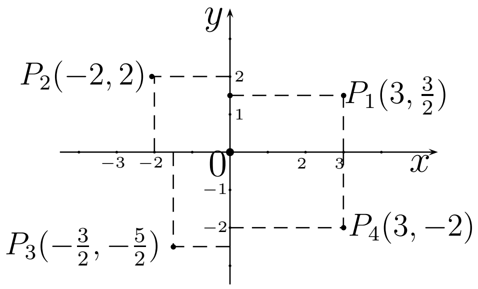


Figura 16.2

Ejemplo 16.2

Analicemos los signos de las abscisas y ordenadas en el Cuadrante IV (cuarto cuadrante). Todos los puntos localizados en este cuadrante están a la derecha del eje y y debajo del eje x. Por tanto las abscisas (o coordenadas x) son positivas y las ordenadas (o coordenadas y) son negativas.

Distancia entre dos puntos

Recordemos que la distancia entre dos puntos A y B del plano, es la longitud del segmento de recta que los une. La distancia entre dos puntos A de coordenadas (x_1, y_1) y B de coordenadas (x_2, y_2) en el plano puede ser determinada de la siguiente manera. Situemos los puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ y $C(x_2, y_1)$ en el plano cartesiano de la figura 16.3

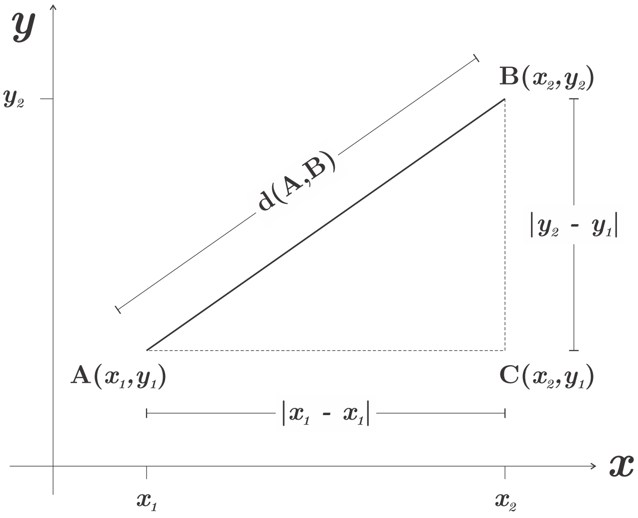


Figura 16.3

De acuerdo con lo que sabemos acerca de los números reales, como los puntos A y C están ubicados a la misma altura (digamos en la misma "calle"), entonces su distancia debe ser aquella sobre la recta horizontal y correspode a $|x_2 - x_1|$, igualmente, los puntos C y B están sobresobre la misma recta vertical (digamos la misma "carrera") y por lo tanto su distancia es $|y_2 - y_1|$.

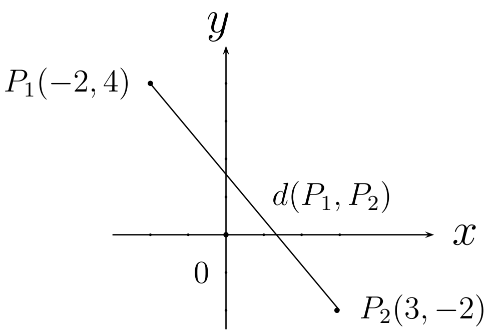
Puesto que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, mediante el teorema de Pitágoras se obtiene que

La distancia entre dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ viene dada por

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 16.3

Localice los puntos $P_1(-2, 4)$ y $P_2(3, -2)$ en el plano cartesiano y encuentre la distancia entre estos puntos.

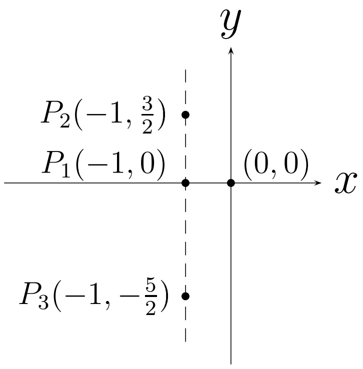


$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-2 - 4)^2},$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25 + 36},$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{61}.$$

Figura 16.4

Ejemplo 16.4

Sitúe los puntos con coordenadas $(-1, 0)$, $(-1, \frac{3}{2})$, $(-1, -\frac{5}{2})$ en un sistema de coordenadas cartesianas. Describa todos los puntos sobre el plano xy con abscisa -1.



Todos los puntos con abscisa igual a -1, están sobre una recta paralela al eje y, situada a una distancia de una unidad de este eje,

$$\begin{aligned} d((-1, 0), (0, 0)) &= \sqrt{(0 - (-1))^2 + 0} \\ &= \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Figura 16.5

Punto medio entre dos puntos

Teniedo en cuenta la fórmula de la distancia entre dos puntos vista anteriormente, es posible determinar las coordenadas (x, y) del punto medio M del segmento de recta que uno dos puntos A de coordenadas (x_1, y_1) y B de coordenadas (x_2, y_2) en el plano. Para esto, observando la siguiente figura, basta notar que si M es el punto medio entre A y B entonces la coordenada horizontal de M (es decir x) se encuentra en el punto medio entre las coordenadas horizontales de A y B respectivamente (es decir x_1 y x_2). De manera semejante se concluye que la coordenada vertical de M se encuentra en el punto medio de las coordenadas verticales de A y B.

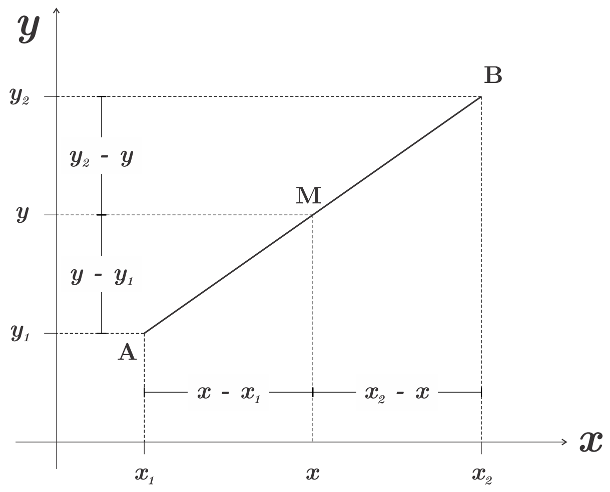


Figura 16.6

Entonces

$$x - x_1 = x_2 - x \qquad \text{y} \qquad y - y_1 = y_2 - y,$$

de donde

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

y por lo tanto

> Las coordenadas (x, y) del punto medio M se pueden obtener como
>
> $$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes literales se dan las coordenadas de un punto A; ubíquelo en un sistema de coordenadas, luego tome un punto dos unidades hacia la izquierda y llame a este punto B. Tome el punto C tres unidades a la izquierda y dos unidades hacia abajo de B. Por último tome un punto D tres unidades hacia la derecha y cuatro unidades hacia abajo de C. Asigne coordenadas a los puntos B, C y D; calcule el perímetro de los cuadriláteros $ABCD$.

   (a) $A(1, 2)$, (b) $A(2, -1)$.

2. Para los puntos con coordenadas $(-1, 2)$, $(-\frac{3}{2}, 2)$, $(0, 2)$, $(\pi, 2)$ en un sistema de coordenadas cartesianas, describa todos los puntos sobre el plano xy con ordenada igual a 2.

3. Para cada uno de los siguientes conjuntos de pares ordenados sitúe en un sistema de coordenadas cartesianas, los puntos cuyas coordenadas se dan y describa un patrón que caracterice el conjunto de puntos

   (a) $A = \{(-1,-1), (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), (0,0), (2,2), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$,

   (b) $B = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (-3,-6), (-1,-2)\}$.

4. Para el siguiente conjunto de puntos $C = \{(0,0), (1,1),\ (2,4), (3,9), (-1,1), (-2,4), (-3,9)\}$, describa un patrón que caracterice el conjunto de puntos.

Lección 17

Funciones I

Definición, dominio y rango de una función

Definición 17.1

Sean A y B dos conjuntos, una función f de A en B es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ exactamente un elemento $y \in B$.

Los elementos x y y se denominan ***variables***. La variable x es la ***variable independiente*** y la variable y es la ***variable dependiente***.

Dado $x \in A$, el elemento $y \in B$ que corresponde a x se denota por $f(x)$ y decimos que $f(x)$ es el valor de f en x o la imagen de x bajo f.

En algunas ocasiones escribiremos $y = f(x)$, para $x \in A$, para simbolizar la función f, definida en el conjunto A.

Ejemplo 17.1

La regla que asigna a cada número real x, el valor $x + 2$, tiene sentido para todos los números reales. Escribimos $y = f(x) = x + 2$ para $x \in \mathbb{R}$.

Al elemento $x = 2$, corresponde $y = f(2) = 2 + 2 = 4$. Al elemento $x = -2$, corresponde $y = f(-2) = -2 + 2 = 0$. Cada elemento x en el primer conjunto determina un valor y en el segundo conjunto. La variable x es la variable independiente y y la variable dependiente.

El valor $f(2) = 4$ es la imagen de $x = 2$ bajo f o también podemos decir que $f(2) = 4$ es el valor de f en $x = 2$.

Dominio y rango de una función

Dada una función f de A en B, el conjunto A se denomina ***dominio de la función*** f y se denota por D_f. El conjunto de todos los elementos del conjunto B que corresponden a algún elemento del dominio, se denomina ***rango de la función*** y se denota por R_f.

En muchas ocasiones sólo conocemos la regla dada por una expresión algebraica que define la función. En ese caso el dominio de la función es el subconjunto de los números reales para los cuales la expresión algebraica define un número real.

Ejemplo 17.2

Consideremos la función $y = g(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que la regla $g(x) = x^2$ tiene sentido para todos los números reales x y además dado x el valor de $g(x)$ está determinado en forma única. Entonces el dominio de g es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Por otra parte, sabemos que siempre que elevamos un número al cuadrado obtenemos un número mayor o igual a cero y además que dado un número y mayor o igual que cero, siempre existe un número real x tal que $y = x^2$. Por lo tanto el rango de la función g está definido por

$$R_g = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 0\}.$$

Gráfica de una función

Definición 17.2

La gráfica de la función $y = f(x)$, con dominio D_f, es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x))/x \in D_f\}.$$

Esta colección de pares ordenados se representa en un plano de coordenadas cartesianas xy.

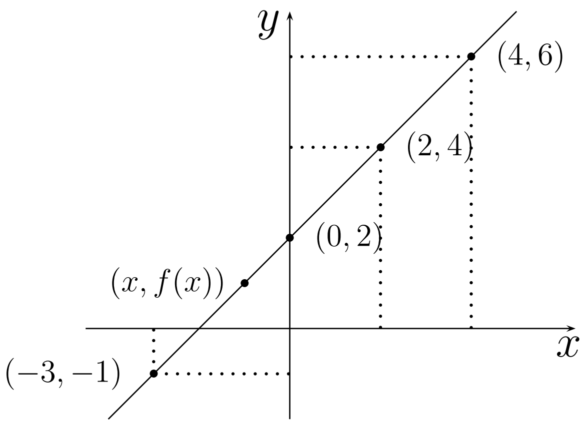


Figura 17.1

En la figura 17.1 representamos la gráfica de la función f en un sistema de coordenadas xy. La función f está definida por la regla $f(x) = x + 2$. Se han tomado varios puntos del dominio A y se han evaluado sus respectivas imágenes. Luego se ubican los puntos $(x, f(x))$ en el sistema de coordenadas xy. Cuando se calculan suficientes pares ordenados y se unen, obtenemos la curva que constituye la gráfica de la función f.

Calculamos puntos de la gráfica correspondientes a las variables independientes $x = -3, x = 0, x = 2$ y $x = 4$. Representamos los puntos $(-3, f(-3)) = (-3, -1)$, $(0, f(0)) = (0, 2)$, $(2, f(2)) = (2, 4)$ y $(4, f(4)) = (4, 6)$ en el plano de coordenadas rectangulares xy.

Ejemplo 17.3

En la figura 17.2, representamos la gráfica de la función g definida por la regla $g(x) = x^2$. Tomamos los puntos que aparecen en la columna izquierda de la tabla que aparece en la figura 17.2 y calculamos sus imágenes por g. Formamos los pares ordenados

$$(-3, g(-3)), (-1, g(-1)), \ldots$$

y los disponemos en el sistema de coordenadas xy.

En el lado izquierdo de la figura 17.2 podemos ver una tabla de valores de la función g.

x	$g(x) = x^2$
-3	9
-1	1
0	0
1	1
3	9

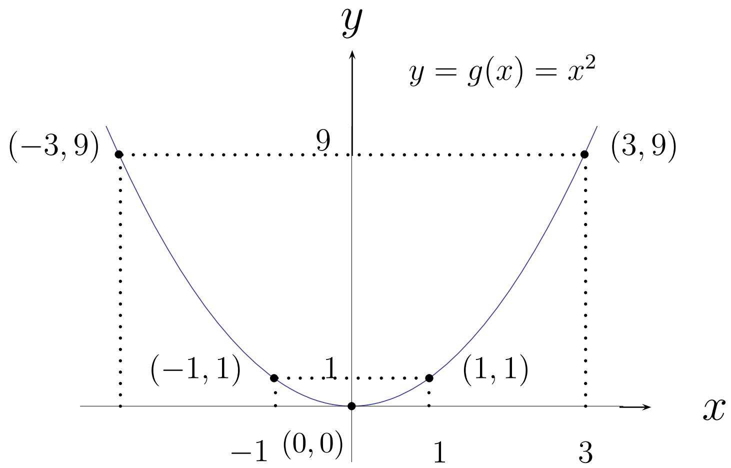


Figura 17.2

Los valores de las ordenadas de los puntos sobre la curva, nos permiten visualizar el rango de la función. En este ejemplo, el rango es el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero. Una buena gráfica nos ayuda también a comprender la manera cómo varían las imágenes al variar las variables independientes x.

Observe que aquí, por comodidad, hemos escogido escalas diferentes sobre cada uno de los ejes x y y.

Nota 17.1

Con frecuencia estamos interesados en considerar funciones que provienen de distintas fuentes: aplicaciones de la Física, aplicaciones de la Geometría, entre otras. Cada una de las disciplinas utiliza distintas nomenclaturas para sus funciones. Debemos acostumbrarnos a observar el conjunto en el cual se definen las variables y el plano de coordenadas en que se dibujan las gráficas.

Ejemplo 17.4

Queremos estudiar la variación de la distancia recorrida por un objeto en caída libre a partir de una posición inicial $x_0 = 100$ metros, como función del tiempo. Consideramos la función definida por $x = h(t) = x_0 - \dfrac{1}{2}\, g\, t^2$, para $t \geq 0$, donde g es la gravedad $g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{seg}^2}$. El nivel del piso está en $x = 0$.

Aunque la regla a partir de la cual se define la función tiene sentido desde el punto de vista matemático también para valores de $t < 0$, la ecuación que nos ha sido dada tiene la restricción $t \geq 0$, lo cual significa que el tiempo empieza a contar desde $t = 0$.

Tenemos así la función h definida por $x = h(t) = 100 - 4.905\, t^2$, para $t \geq 0$. El dominio D_h y el rango R_h de h se definen por

$$D_h = \{t \in \mathbb{R}/t \geq 0\}, \quad R_h = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 100\}.$$

La gráfica de la función h es la curva que aparece en la figura 17.3 en el sistema de coordenadas tx.

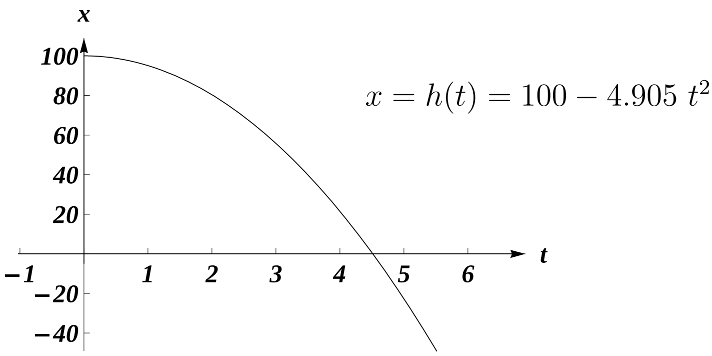


Figura 17.3

Ejercicios

1. Para las siguientes funciones determine el dominio, el rango e ilustre el comportamiento de la función, por medio de su gráfica. (a) $y = f(x) = 2x$, (b) $z = g(t) = 3t - 1$ (c) $z = j(t) = -t^2$ (d) $y = h(x) = 2$.

2. Considere la función $g_2(x) = -x^2$ y describa las similitudes y diferencias con la función $g(x) = x^2$.

3. En cada uno de los siguientes literales considere la tabla de valores suministrada y determine una regla $y = f(x)$, que asigne a cada valor x en la columna izquierda el valor y en la columna derecha.

(a)

x	$y = f(x) = --$
0	6
2	8
14	20

(b)

x	$y = f(x) = --$
1	5
2	10
5	25

Lección 18

Funciones II

La función $f(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo 18.1

Consideremos la función f definida por $y = f(x) = \frac{1}{x}$. Sabemos que las fracciones están definidas para todos los números reales con excepción de aquellos que hagan el denominador cero. Por lo tanto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0\}.$$

Ejemplo 18.2

En el ejemplo 18.1 nos ocupamos de determinar para cuales valores de x la regla dada por $y = f(x) = \frac{1}{x}$ tiene sentido. Ahora queremos saber que tipo de imágenes pueden obtenerse cuando x toma todos los valores posibles del dominio. Es decir queremos investigar el rango de la función R_f.

Un aspecto que nos interesa mirar es en que forma varían los signos de las imágenes para los diferentes valores de la variable independiente. Como el signo de $\frac{1}{x}$ depende solamente del signo de x, pues el numerador es positivo, observamos que si $x > 0$, su imagen también lo es; si $x < 0$, $f(x) < 0$. Es decir el rango va a contener valores positivos y negativos.

El análisis de los posibles valores que pueden tomar las fracciones $\frac{1}{x}$, nos permite concluir que cuando x toma todos los valores del dominio, es posible obtener todos los números reales con excepción del número $y = 0$, ya que un cociente solamente toma el valor 0, cuando el numerador es 0. Así

$$R_f = \{y \in \mathbb{R}/y \neq 0\}.$$

Véase la figura 18.1 en la cual se presenta una gráfica de la función f y una tabla de valores de ella.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-4	$-\frac{1}{4}$
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{4}$	-4
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

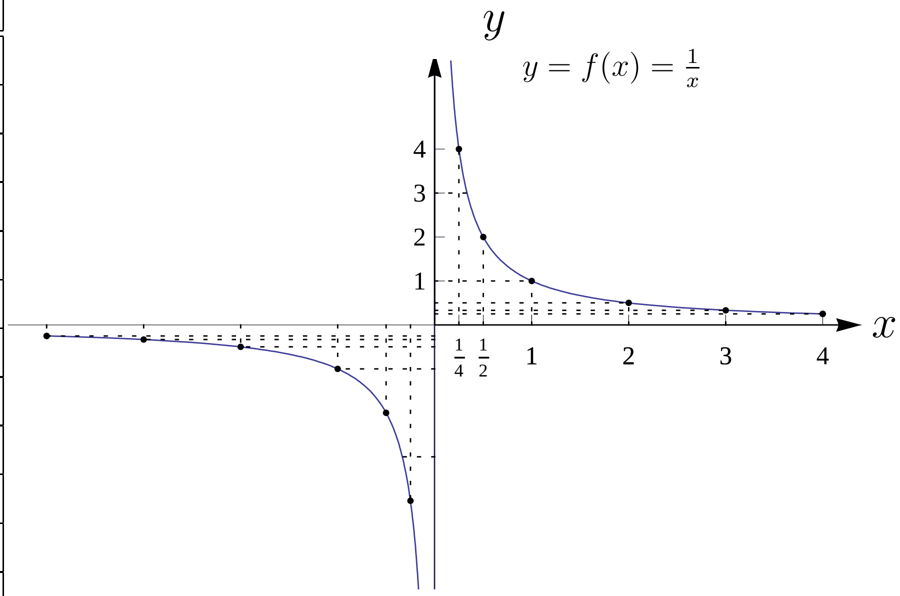


Figura 18.1

Un aspecto muy notorio de esta gráfica es el comportamiento de la función para los valores de la variable independiente cercanos a cero. Si tomamos los valores $x = 1, x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4}, \ldots$, vemos que los valores de sus imágenes se van duplicando cada vez y en un tramo muy pequeño la función crece sin límite.

Observemos los valores en la tabla 18.1. Estos se observan en la gráfica 18.1, en la cual se aprecia la tendencia a crecer sin límite cuando la variable independiente toma valores positivos cada vez más cercanos a cero.

Valores de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, para $0 < x \leq 1$

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Tabla 18.1

Este fenómeno que acabamos de observar se presenta en muchas funciones utilizadas para describir problemas de importancia. Por eso es necesario dotarnos de una herramienta para caracterizarlo. Diremos que la función $f(x)$ crece sin límite cuando x tiende a cero, (o se acerca a 0) a través de valores positivos.

En símbolos

$$\begin{array}{c} f(x) \to +\infty \\ x \to 0^{+} \end{array}$$

Es importante tener en cuenta que ∞ no es un número. Ya sabemos que la imagen de $x = 0$ no está definida. Con el símbolo $+\infty$, sólo representamos crecimiento ilimitado. Observe que no estamos usando el símbolo de igualdad sino el símbolo "$\to$", que indica tendencia.

La gráfica de la función se acerca cada vez más al eje y a medida que x se acerca a cero, pero esta gráfica nunca toca el eje y. Una recta con esta propiedad es llamada ***asíntota vertical*** de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Vale la pena también analizar la función $f(x) = \frac{1}{x}$ para valores negativos de la variable independiente y ver el comportamiento de sus imágenes. Iniciemos tomando el valor $x = -1$ y tomemos $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{4}$, ... Sus imágenes decrecen sin límite. Como se puede apreciar en la gráfica 18.1.

Podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x) &\to -\infty \\ x &\to 0^- \end{aligned}$$

Esta nomenclatura deja en claro el hecho de que la función decrece sin límite si x toma valores cada vez más cercanos a cero, pero negativos.

La función $g(x) = \frac{1}{x^2}$

Ejemplo 18.3

x	$g(x) = \frac{1}{x^2}$
-4	$\frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{9}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	4
$-\frac{1}{4}$	16
$\frac{1}{4}$	16
$\frac{1}{2}$	4
1	1
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{9}$
4	$\frac{1}{16}$

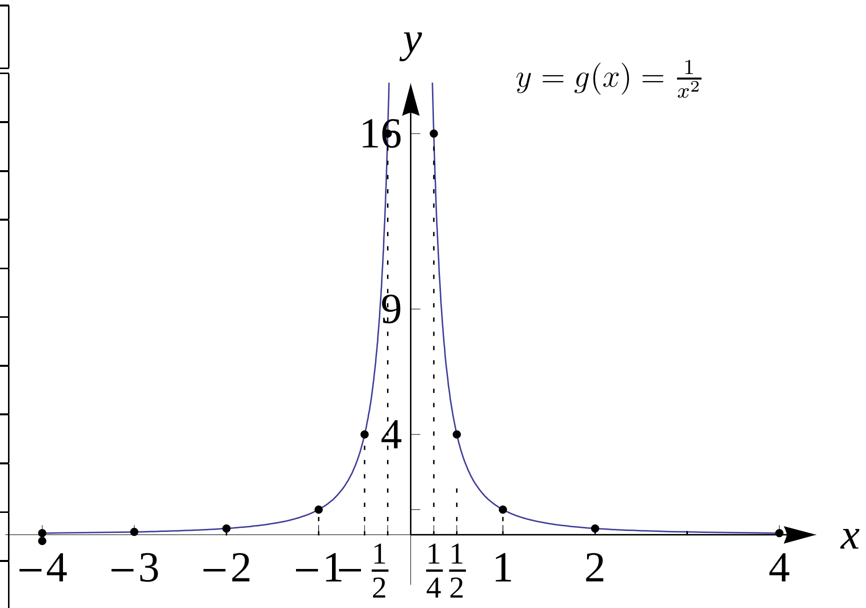


Figura 18.2

Vamos ahora a estudiar la función g definida por $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Considerando las propiedades de las fracciones y la gráfica de esta función en la figura 18.2, podemos concluir que su dominio y su rango están dados por

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 0\},$$
$$R_g = \{y \in \mathbb{R} \;/\; y > 0\}.$$

Para la función g es claro que

$$\begin{aligned} g(x) &\to +\infty \\ x &\to 0^+ \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(x) &\to +\infty \\ x &\to 0^-. \end{aligned}$$

El eje y es una asíntota vertical de la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones determine el dominio, el rango e ilustre el comportamiento de la función, por medio de su gráfica.
   (a) $y = f_1(x) = -\dfrac{1}{x}$,
   (b) $y = f_2(x) = \dfrac{1}{x} + 1$,
   (c) $y = f_3(x) = \dfrac{1}{x^3}$,
   (d) $y = f_4(x) = -\dfrac{1}{x^2}$,
   (e) $y = f_5(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$.
2. Para las funciones dadas en el numeral 1, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas. Si alguna de ellas es falsa escriba la afirmación verdadera.

(a) $$\begin{aligned} f_1(x) &\to -\infty \\ x &\to 0^+ \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} f_2(x) &\to +\infty \\ x &\to 0^- \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} f_3(x) &\to +\infty \\ x &\to 0^- \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} f_4(x) &\to -\infty \\ x &\to 0^+ \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} f_5(x) &\to +\infty \\ x &\to 0^+ \end{aligned}$$

Lección 19

Funciones III

Traslaciones verticales de gráficas

Consideremos la función $y = f(x)$, de la cual conocemos su dominio A y su rango R_f. Es decir

$$R_f = \{y \in \mathbb{R}/y = f(x), \quad \text{para algún } x \in A\}.$$

Sea c una constante positiva; hay una importante relación entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y las gráficas de las funciones $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$.

Si c es una constante positiva, la gráfica de la función $y = f(x) + c$ está desplazada c unidades hacia arriba, con relación a la gráfica de $y = f(x)$, en el mismo sistema de coordenadas xy.

Similarmente, si c es una constante positiva, la gráfica de la función $y = f(x) - c$ está desplazada c unidades hacia abajo con relación a la gráfica de $y = f(x)$, en el mismo sistema de coordenadas xy.

El dominio de las funciones $y = f(x)$, $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$, es el mismo, mientras que en algunos casos el rango de estas tres funciones puede ser diferente.

Ejemplo 19.1

La función $y = x^2$ fue considerada en el ejemplo 17.2 de la lección 17 y su gráfica aparece en la figura 17.2. En la figura 19.1 consideramos las funciones $y = x^2 + 2$ y $y = x^2 - 3$, junto con la función $y = x^2$. El dominio de las tres funciones es el mismo y es el conjunto de los números reales, mientras que el rango de las tres funciones es diferente.

Denotemos las tres funciones por $g_1(x) = x^2 - 4$, $g_2(x) = x^2$ y $g_3(x) = x^2 + 2$. Entonces

$$\begin{aligned}
D_{g_1} = D_{g_2} = D_{g_3} &= \mathbb{R}, \\
R_{g_1} &= \{y \in \mathbb{R} \;/\; y \geq -4\}, \\
R_{g_2} &= \{y \in \mathbb{R} \;/\; y \geq 0\}, \\
R_{g_3} &= \{y \in \mathbb{R} \;/\; y \geq 2\}.
\end{aligned}$$

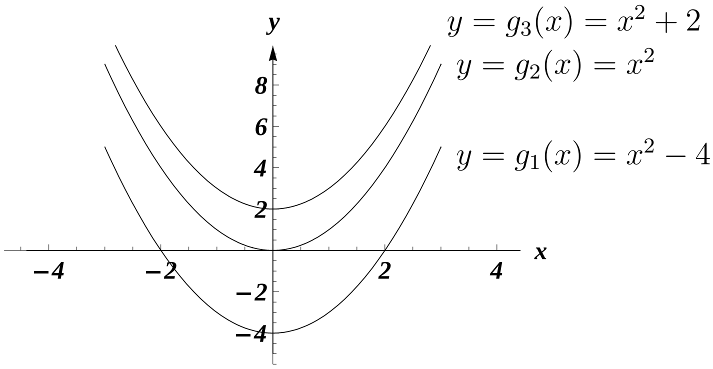


Figura 19.1

Traslaciones horizontales de gráficas

Consideremos la función $y = f(x)$, de la cual conocemos su dominio A y su rango R_f:

$$R_f = \{y \in \mathbb{R}/y = f(x), x \in A\}.$$

Supongamos que c es una constante positiva; la gráfica de la función $y = f(x+c)$ está desplazada c unidades hacia la izquierda con relación a la gráfica de $y = f(x)$, en el mismo sistema de coordenadas xy y la gráfica de la función $y = f(x-c)$ está desplazada c unidades hacia la derecha en relación con la gráfica de $y = f(x)$, en el mismo sistema de coordenadas xy.

El dominio de las funciones $y = f(x-c)$ y $y = f(x+c)$ puede cambiar con relación al dominio de $y = f(x)$, puesto que los cambios se están dando en las variables independientes.

Ejemplo 19.2

La función $y = \frac{1}{x}$ fue considerada en los ejemplos 18.1 y 18.2 y representamos su gráfica en la figura 18.1.

En la figura 19.2 consideramos las gráficas de las funciones $y = f(x) = \frac{1}{x}$ y $y = h(x) = \frac{1}{x+3}$. Observe que $h(x) = f(x+3)$. Es decir, se está reemplazando la variable independiente x en f por $x+3$. El rango de las dos funciones no cambia, pero en cambio observamos que el dominio cambia con la traslación horizontal. Observe que la asíntota vertical que tiene la función f en $x = 0$, la tiene la función h en $x = -3$.

$$\begin{aligned}
D_f &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\}, \\
D_h &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -3\}, \\
R_f = R_h &= \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \neq 0\}.
\end{aligned}$$

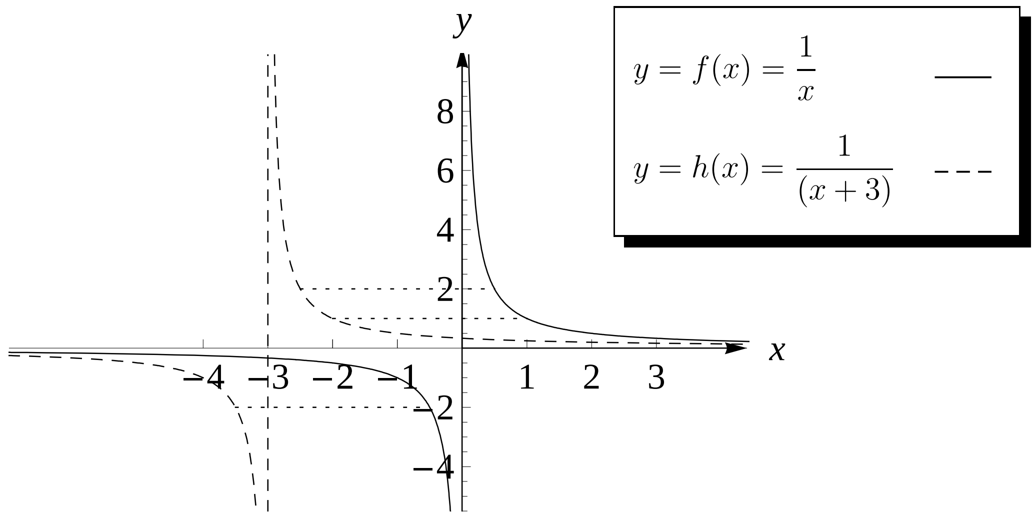


Figura 19.2

Ejercicios

1. Trace la gráfica de la función $g(x) = x^2$, y a partir de ella dibuje cada una de las gráficas de las siguientes funciones y encuentre su dominio y su rango:
   (a) $g_1(x) = x^2 - 2$,
   (b) $g_2(x) = (x+3)^2$,
   (c) $g_3(x) = (x-3)^2$,
   (d) $g_4(x) = (x+2)^2 - 3$,
   (e) $g_5(x) = (x+3)^2 + 3$.
2. Para cada una de las funciones del numeral 1, explique qué clase de traslación se presenta para cada función partiendo de la función $y = g(x) = x^2$, estudiada en el ejemplo 17.2. Además, explique qué relación observa entre el dominio, el rango y la gráfica de estas funciones en relación con el dominio, rango y gráfica de la función g.
3. Considere las funciones $z = f_1(t) = t$ y $z = f_2(t) = t - 3$ y haga un comentario acerca de la relación entre las gráficas de estas dos funciones.
4. Trace la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y a partir de ella dibuje cada una de las gráficas de las siguientes funciones y encuentre su dominio y su rango:
   (a) $f_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$,
   (b) $f_2(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$,
   (c) $f_3(x) = \frac{1}{x^2} - 1$.

Lección 20

Ángulos en posición estándar o canónica I

En esta lección veremos un nuevo enfoque de la definición y descripción de los ángulos, que amplía conceptos estudiados en la geometría y que nos lleva a la generalización de las definiciones de las relaciones trigonométricas a un conjunto más amplio de ángulos.

Como vimos en la lección 14, las relaciones trigonométricas de los triángulos fueron usadas en aplicaciones como la astronomía, la medición de tierras y la arquitectura, entre otras. Posteriormente, a partir de trabajos realizados por diferentes matemáticos, se observó que las definiciones de las relaciones dadas entre los ángulos y los lados en un triángulo rectángulo, se podían extender para lograr definiciones de las funciones trigonométricas en el campo de los números reales. Esto llevó a la definición de ángulos cuya medida es mayor de 360 grados, y a la definición de ángulos cuya orientación es positiva o negativa y además a establecer una diferencia entre los rayos que los forman.

El estudio de los ángulos en geometría se enfoca principalmente en su medida. Generalmente se utilizan ángulos con medidas menores o iguales que 180° y no se establece el orden en que se presentan los lados que los forman y por esto no se utiliza un nombre específico para cada uno de ellos. Cuando los lados del ángulo son los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, podemos simbolizar el ángulo de cualquiera de las siguientes formas equivalentes: $\angle AOB$, $\angle BOA$ o simplemente $\angle O$.

Primero estudiaremos los ángulos orientados en general y luego consideraremos una clase especial de ángulos orientados, los ángulos en posición canónica.

Ángulos orientados

Definición 20.1

Un ***ángulo orientado*** se genera a partir de dos rayos coincidentes con origen común, uno de los cuales permanece fijo y el otro rota en torno al origen hasta una posición final. El origen de los rayos es el ***vértice***, el rayo que permanece fijo recibe el nombre de ***lado inicial*** del ángulo y el lado que rota, una vez que adopta su posición final se denomina ***lado final*** o ***lado terminal***. El rayo que rota tiene libertad en el sentido de la rotación y no tiene limitación en el número de rotaciones completas alrededor del vértice.

Así, el rayo que gira puede hacerlo en el sentido contrario o en el mismo sentido en el que lo hacen las manecillas del reloj y también puede llegar a su lugar de partida (dar una vuelta) y puede continuar su recorrido hasta completar n vueltas.

Definición 20.2

Si el rayo que gira lo hace en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo está ***orientado positivamente*** y se denomina ***ángulo positivo***; si lo hace en el mismo sentido, *está* ***orientado negativamente*** y recibe el nombre de ***ángulo negativo***. Si el lado final ha girado n veces y continúa su rotación pero no alcanza a hacer un nuevo giro completo decimos que es un ***ángulo de n vueltas*** o ***n giros***.

Encontramos entonces ángulos orientados cuyas medidas son mayores de 180 grados, después de formar un ángulo llano, y mayores de 360 grados, al realizar más de un giro.

Cuando vamos a denotar un ángulo orientado escribimos únicamente su medida si está orientado positivamente pero si está orientado negativamente debemos anteponer a su medida el signo menos (-).

Ejemplo 20.1

En la figura 20.1 se representan los ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = 290°$ a partir de un lado inicial dado.

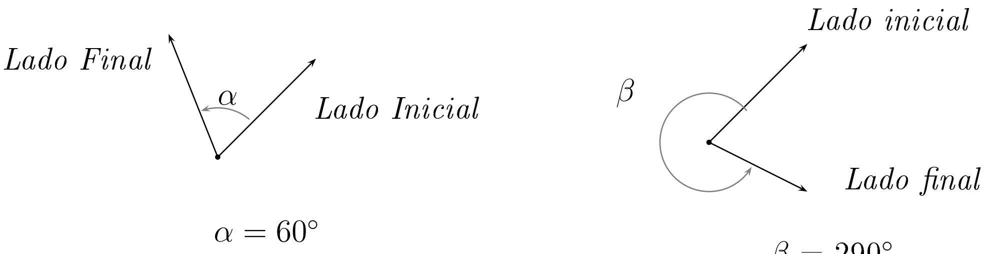


Figura 20.1

Ejemplo 20.2

Representamos los ángulos $\delta = -225°$ y $\gamma = -390°$ a partir de un lado inicial dado en la figura 20.2

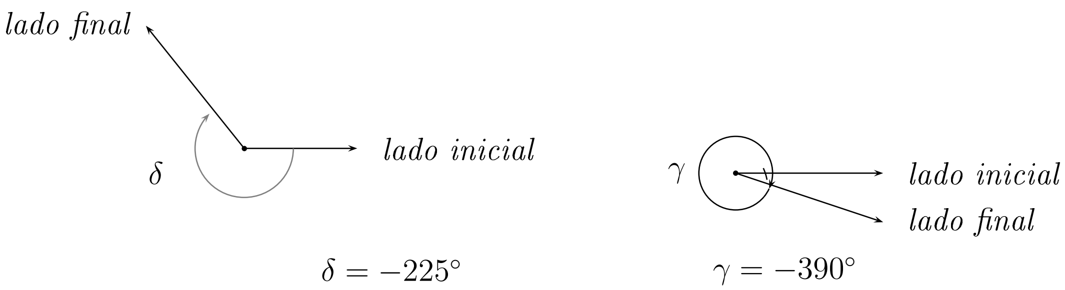


Figura 20.2

Ejemplo 20.3

1. Si $\alpha = 45°$, α es un ángulo que mide 45° y está orientado positivamente.
2. Si $\beta = -225°$, β es un ángulo que mide 225°, orientado negativamente.

3. Si $\phi = 770°$, ϕ es un ángulo que mide $770°$, de dos vueltas, y orientado positivamente. Para conocer el número de giros que ha hecho el lado final, determinamos cuántas veces ha descrito un ángulo de medida $360°$. Dividimos el número 770 por 360 y obtenemos igualdad: $770° = 2(360°) + 50°$. Así ϕ es un ángulo orientado positivamente de 2 vueltas.

4. Si $\theta = -540°$, θ es un ángulo que mide $540°$, de una vuelta, orientado negativamente. Para determinar el número de giros en este caso tenemos dos opciones:

   (a) Debido a que la medida no es muy grande, podemos observar fácilmente que el ángulo mide más de $360°$ pero menos de $720°$, así el lado final no gira más de una vez; como es negativo el lado final ha hecho su rotación en sentido contrario de las manecillas del reloj.

   (b) Observemos que
   $$-540° = (-360°) - 180°.$$
   Lo cual significa que el lado final del ángulo ha realizado un único giro y está orientado negativamente.

Hasta este momento los ejemplos han sido dados con ángulos medidos en grados sexagesimales. Cuando utilizamos el sistema circular con frecuencia se omite el término radián.

Ejemplo 20.4

1. $\alpha = \frac{\pi}{5}$, α es un ángulo que mide $\frac{\pi}{5}$ radianes y está orientado positivamente.

2. Si $\theta = \frac{-3\pi}{2}$, θ es un ángulo que mide $\frac{3\pi}{2}$ y está orientado negativamente.

3. Cuando escribimos $\beta = -6$, nos estamos refiriendo a un ángulo que mide 6 radianes y está orientado negativamente.

4. Si $\phi = 6.5$ entonces ϕ es un ángulo de una vuelta que mide 6.5 radianes. Puesto que $2\pi < 6.5 < 4\pi$, sabemos que el lado final ha hecho un giro completo y no alcanza a dar una segunda vuelta ya que 6.5 es menor que 4π.

Ejemplo 20.5

Determine el número de vueltas del ángulo $\varphi = -30$.
Solución
Debemos encontrar cuántas veces el lado final ha realizado un giro completo. La división de 30 por 2π es mayor que 4 pero menor que 5, esto es: $4(2\pi) \leq 30 \leq 5(2\pi)$. Por lo tanto φ representa a un ángulo de cuatro vueltas, orientado negativamente. Note la diferencia que existe entre 30 y $30°$.

Ejercicios

1. Dé ejemplos de ángulos negativos de dos vueltas.

2. Represente un ángulo con medida $630°$, orientado negativamente.

3. Describa el ángulo $\alpha = -14$. Represéntelo gráficamente.

4. Describa el ángulo $\beta = -14°$. Represéntelo gráficamente.
5. ¿De cuántas vueltas es $\theta = -10\pi$?
6. ¿De cuántas vueltas es $\theta = 12\pi$?
7. ¿De cuántas vueltas es $\theta = 25$?
8. ¿De cuántas vueltas es $\theta = -545°$?
9. Represente en la segunda columna de la tabla de la izquierda de la figura 20.3 la medida en grados sexagesimales de los ángulos formados por las manecillas del reloj cuando son las $12:00$ p.m., la $1:00$ p.m., las $2:00$ p.m., $\ldots$, hasta las $11:00$ p.m. Considere como lado inicial de los ángulos la recta que representa la manecilla de los minutos y el lado final representa la manecilla horaria. Considere el ángulo orientado negativamente.
10. Represente en la segunda columna de la tabla de la derecha de la figura 20.3 la medida en radianes de los ángulos formados por las manecillas del reloj cuando son las $12:30$ p.m., la $1:30$ p.m., las $2:30$ p.m., $\ldots$ hasta las $11:30$ p.m. Considere como lado inicial la recta que representa la manecilla de las horas y como lado final, la recta que representa la manecilla de los minutos. Considere el ángulo orientado negativamente. Complete la tabla.

Hora	Ángulo A en grados
12 : 00 p.m.	$0°$
1 : 00 p.m.	$-30°$
2 : 00 p.m.	
$\ldots$	$\ldots$
11:00 pm	$-330°$

Hora	Ángulo A en radianes
12 : 30 p.m.	$-\frac{11\pi}{12}$
1 : 30 p.m.	$-\frac{3\pi}{4}$
$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$
11 : 30 p.m.	$-\dfrac{13\pi}{12}$

Figura 20.3

11. Los radios de las ruedas delantera y trasera de una bicicleta miden respectivamente 15 y 30 centímetros. (a) Si la rueda trasera completa 500 revoluciones, ¿cuántas revoluciones completará la rueda delantera? (b) ¿Qué ángulo en radianes rota la rueda trasera, si la rueda delantera rota 50 radianes?

Lección 21

Ángulos en posición estándar o canónica II

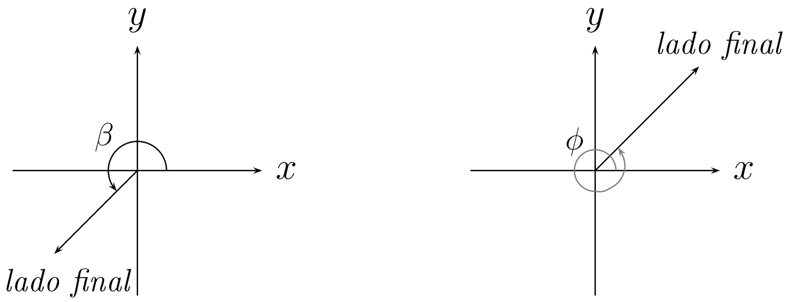
En la lección anterior, cuando definimos los ángulos orientados no restringimos la ubicación del lado inicial del ángulo. Queremos ahora, en esta lección, situar los ángulos en un sistema de coordenadas cartesianas de tal manera que el vértice coincida con el origen y el lado inicial coincida con el semi eje horizontal positivo de este sistema de coordenadas. Esto se hace con el propósito de definir las funciones trigonométricas del ángulo en términos de las coordenadas rectangulares de los puntos del lado final del ángulo. Esto último lo haremos en la lección 22.

Ángulos en posición estándar o canónica

Definición 21.1

Un ángulo en ***posición estándar***, llamado también ***ángulo en posición canónica*** o ***ángulo en posición normal***, es un ángulo orientado ubicado en un sistema de coordenadas rectangulares cuyo vértice está en el origen y cuyo lado inicial coincide con el semi eje positivo de las abscisas de dicho sistema coordenado.

Si el lado final está en uno de los ejes coordenados, el ángulo recibe el nombre de ***ángulo cuadrantal*** o ***de cuadrante***; de lo contrario la denominación del ángulo depende del cuadrante en el que se encuentre su lado final: **de primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante.**

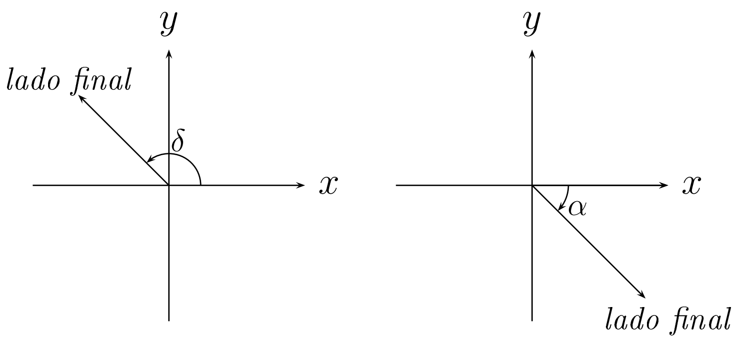


β es un ángulo de tercer cuadrante $\qquad$ ϕ es un ángulo de primer cuadrante

Figura 21.1

Ejemplo 21.1

Los ángulos β, ϕ, y δ en las figuras 21.1 y 21.2 son ángulos positivos en posición canónica; mientras que α es un ángulo negativo en posición canónica.



δ es un ángulo de segundo cuadrante $\quad$ α es un ángulo de cuarto cuadrante

Figura 21.2

Ejemplo 21.2

El ángulo en posición normal en cuyo lado final está el punto P con coordenadas $(-1, -3)$ es un ángulo de tercer cuadrante.

Ejemplo 21.3

En la figura 21.3 representamos ángulos cuadrantales cuyo lado final está sobre el eje vertical.

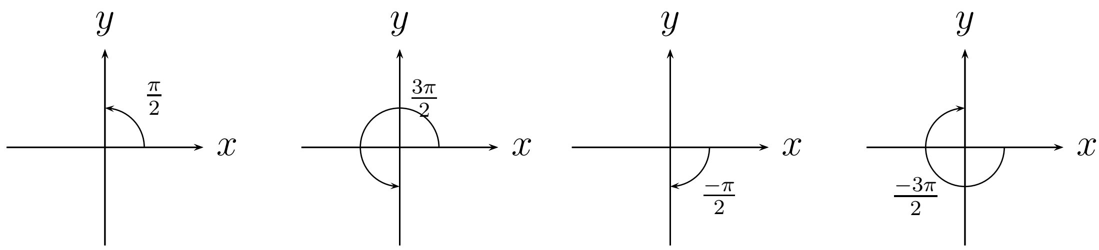


Figura 21.3

Ejemplo 21.4

En la figura 21.4 se representan ángulos cuadrantales con su lado final sobre el eje horizontal.

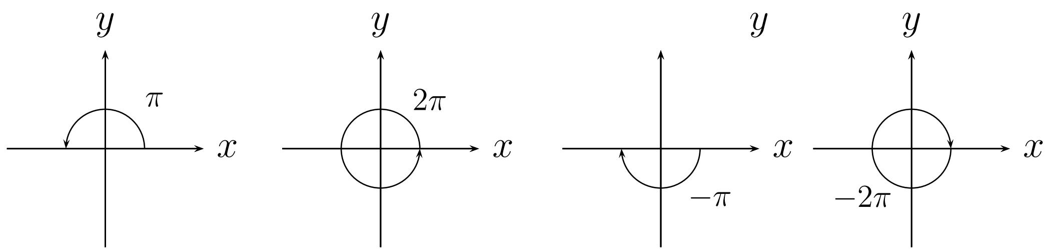


Figura 21.4

Ángulos coterminales

En algunos casos el lado final de dos ángulos diferentes en posición canónica coinciden. Esto es, ángulos con diferentes medidas u orientaciones tienen el mismo lado inicial, el semi eje positivo de las abscisas y el mismo lado final. Dichos ángulos reciben el nombre de ***ángulos coterminales***.

Definición 21.2

Dos ángulos en posición canónica en un mismo sistema de coordenadas son coterminales si sus lados finales coinciden.

Ejemplo 21.5

Los ángulos en posición canónica representados en cada una de las gráficas de la figura 21.5 son coterminales. Observe que en la primera y la cuarta gráfica los ángulos tienen orientaciones opuestas. Mientras que en las otras gráficas los ángulos tienen la misma orientación y son ángulos con un número diferente de vueltas.

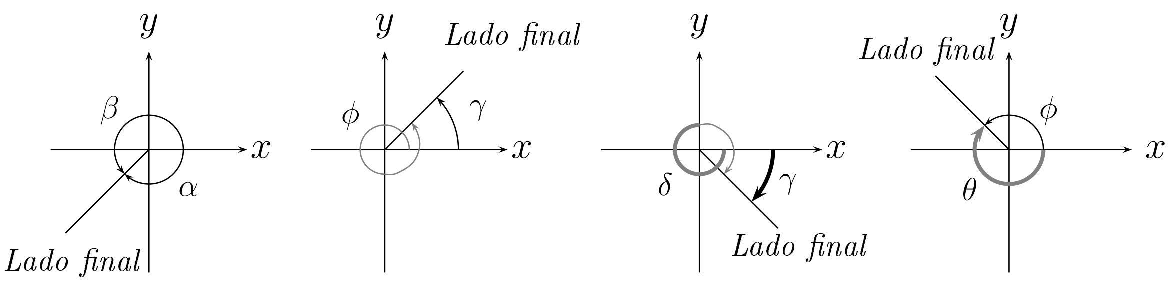


Figura 21.5

Nota 21.1

1. Si α es un ángulo en posición estándar (o canónica) medido en radianes y n es cualquier número entero el ángulo $\alpha + 2n\pi$ es coterminal con α.

   Es decir, son coterminales con el ángulo α la suma de α con los múltiplos enteros de 2π.

2. Si α es un ángulo en posición estándar (o canónica) medido en grados y n es cualquier número entero el ángulo $\alpha + n(360°)$ es coterminal con α.

   Es decir, son coterminales con el ángulo α la suma de α con los múltiplos enteros de $360°$.

Ejemplo 21.6

Encuentre un ángulo coterminal con $\frac{\pi}{3}$.

Solución:
El número de ángulos coterminales con este ángulo es infinito. El ángulo con medida $\frac{\pi}{3}+2\pi$ es uno de los ángulos que satisface la condición. En general, cada giro del lado final en cualquiera de los dos sentidos genera un ángulo coterminal con el ángulo dado.

Así son coterminales:

$$\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3}+2\pi, \quad \frac{\pi}{3}+4\pi, \ \frac{\pi}{3}+6\pi, ..., \quad \frac{\pi}{3}-2\pi, \quad \frac{\pi}{3}-4\pi, \frac{\pi}{3}-6\pi....$$

Ejemplo 21.7

Encuentre un ángulo coterminal con el ángulo cuadrantal $\frac{3\pi}{2}$.
Solución:
El ángulo $\frac{3\pi}{2}+4\pi=\frac{11\pi}{2}$ es coterminal con $\frac{3\pi}{2}$.

Ejemplo 21.8

Encuentre un ángulo coterminal con -3π.

Solución
El ángulo $-3\pi-6\pi=-9\pi$ es uno de los ángulos coterminales con -3π.

Cómo reconocer ángulos coterminales?

1. Dos ángulos cuya medida es dada en grados son coterminales si su diferencia es un múltiplo entero de $360°$.
2. Dos ángulos cuya medida es dada en radianes son coterminales si su diferencia es un múltiplo entero de 2π.

Ejercicios

1. Encuentre y represente gráficamente los siguientes ángulos:
   (a) Un ángulo, no cuadrantal, orientado negativamente de tres vueltas.
   (b) Un ángulo de tercer cuadrante orientado positivamente de cuatro vueltas.
2. ¿Qué característica especial tienen los puntos del lado final de un ángulo de cuarto cuadrante?
3. Halle un ángulo orientado negativamente coterminal con $\frac{3\pi}{4}$.
4. Describa todos los ángulos coterminales con $\frac{2\pi}{3}$.
5. Encuentre el ángulo cuya medida esté en el intervalo cerrado $[0,2\pi]$ y que sea coterminal con cada uno de los ángulos dados:
   (a) $\frac{33\pi}{4}$, (b) -13π, (c) $\frac{31\pi}{6}$, (d) $\frac{21\pi}{4}$.
6. Represente los ángulos dados en posición estándar. Determine si ellos son coterminales y el cuadrante en el cual se encuentran:
   (a) $\delta=-\frac{9\pi}{4}$ y $\eta=-\frac{\pi}{4}$; (b) $\sigma=-\frac{5\pi}{4}$ y $\omega=\frac{3\pi}{4}$; (c) $\alpha=-\frac{7\pi}{3}$ y $\beta=\frac{7\pi}{3}$.
7. ¿Cuáles de los siguientes pares de ángulos son coterminales?
   (a) $\alpha=-140°$ y $\beta=220°$, (b) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ y $\beta=\frac{7\pi}{4}$.

Lección 22

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica I

En la lección 9 definimos las relaciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo como razones entre los catetos y la hipotenusa del triángulo. Partiremos de estas definiciones para luego extenderlas a ángulos en posición canónica, de tal forma que las relaciones trigonométricas no estén necesariamente relacionadas con los ángulos águdos de un triángulo rectángulo.

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica.

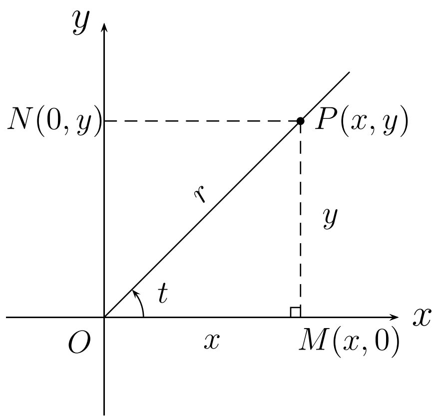


Figura 22.1

En la figura 22.1 consideramos el triángulo rectángulo OMP en el cual el ángulo t está en posición estándar en el primer cuadrante, en el sistema coordenado xy. El vértice O coincide con el origen de coordenadas, el cateto $\overline{OM}$ está sobre el eje x, la hipotenusa está sobre el lado final del ángulo t, el ángulo en M es recto y el punto P está sobre el lado final del ángulo t.

Debido a que t es un ángulo en el primer cuadrante, la longitud del cateto $\overline{OM}$ es igual a la abscisa x de P, $x > 0$, y la longitud del cateto $\overline{PM}$ es igual a la ordenada y de P, $y > 0$.

Si denotamos por r a la longitud de la hipotenusa del triángulo OMP, por el teorema de

Pitágoras tenemos que

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

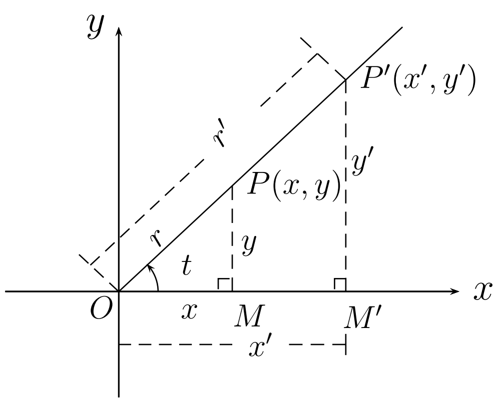
Las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo t están dadas en (22.1).

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen} t &= \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } t}{\text{longitud de la hipotenusa}} &= \frac{y}{r},\\
\cos t &= \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } t}{\text{longitud de la hipotenusa}} &= \frac{x}{r},\\
\tan t &= \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } t}{\text{longitud del cateto adyacente a } t} &= \frac{y}{x}.
\end{aligned}\right\} \tag{22.1}$$

Dado que las relaciones trigonométricas del ángulo t en (22.1) están dadas en términos de las coordenadas de un punto P sobre su lado terminal, sería bueno poder definir las relaciones trigonométricas para cualquier ángulo en posición estándar utilizando para ello las igualdades (22.1). Así se lograría extender las definiciones de las relaciones trigonométricas a ángulos más generales que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo; ángulos con cualquier orientación y magnitud.

Para poder definir una función trigonométrica sobre el conjunto de los ángulos en posición canónica, debemos asegurarnos de que (22.1) realmente define en forma única las relaciones trigonométricas para el ángulo t, teniendo en cuenta que estas relaciones están dadas en términos de un punto P sobre el lado final. ¿Qué sucede si escogemos otro punto $P'(x', y')$ sobre el lado final de t? Se requiere que las relaciones trigonométricas tengan el mismo valor para distintos puntos sobre el lado final de un ángulo fijo t.

En la figura 22.2, los triángulos rectángulos OMP y $OM'P'$ son semejantes por el teorema de Tales y por lo tanto sus lados correspondientes son proporcionales. Así, se verifican las relaciones de proporcionalidad entre los lados de los triángulos ΔOMP y $\Delta OM'P'$ en (22.2). Véase teorema 4, en la página 14.



$$\left.\begin{aligned}
\frac{y}{r} &= \frac{y'}{r'}\\
\frac{x}{r} &= \frac{x'}{r'}\\
\frac{y}{x} &= \frac{y'}{x'}
\end{aligned}\right. \tag{22.2}$$

Figura 22.2

Observe que en el triángulo rectángulo OM'P' se tiene que

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen} t &= \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } t}{\text{longitud de la hipotenusa}} &&= \frac{y'}{r'} \\
\cos t &= \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } t}{\text{longitud de la hipotenusa}} &&= \frac{x'}{r'} \\
\tan t &= \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } t}{\text{longitud del cateto adyacente a } t} &&= \frac{y'}{x'}
\end{aligned}\right\} \tag{22.3}$$

Las relaciones dadas en (22.1), (22.2) y (22.3) nos permiten concluir que la definición de las relaciones trigonométricas no dependen del punto que se elija en el lado final del ángulo.

Por otra parte tendremos restricciones para algunas de las funciones trigonométricas cuando el lado final del ángulo está sobre uno de los ejes coordenados, puesto que en esos casos tendremos algunos denominadores iguales a cero en (22.1).

Definición 22.1

Si t es un ángulo en posición canónica, $P(x, y)$ es un punto en el lado final del ángulo, $(x, y) \neq (0, 0)$ y $r > 0$ es la distancia de $P(x, y)$ al origen se definen

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen} t &= \frac{y}{r}, && \\
\cos t &= \frac{x}{r}, && \\
\tan t &= \frac{y}{x}, && \text{para } x \neq 0, \\
\cot t &= \frac{x}{y}, && \text{para } y \neq 0, \\
\sec t &= \frac{r}{x}, && \text{para } x \neq 0, \\
\csc t &= \frac{r}{y}, && \text{para } y \neq 0.
\end{aligned}\right\} \tag{22.4}$$

Observación 22.1

Debido a que las funciones trigonométricas están definidas en términos del lado final del ángulo, los valores de éstas para ángulos coterminales son iguales.

Ejemplo 22.1

El ángulo θ está en posición estándar. Si el punto $P(-3, 4)$ pertenece al lado final del ángulo θ, calcule, en caso de que existan, todas sus funciones trigonométricas.

Solución
Calculamos la distancia del origen al punto P:

$$r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{4}{5}, & \csc\theta &= \frac{5}{4},\\
\cos\theta &= \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}, & \sec\theta &= \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3},\\
\tan\theta &= \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}, & \cot\theta &= \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 22.2

Si $\tan\theta = -\frac{5}{12}$ y $\cos\theta > 0$, encuentre los valores de las demás funciones trigonométricas del ángulo θ.

Solución
Se coloca el ángulo θ en posición estándar en un sistema de coordenadas cartesianas. Si un punto (x, y) está en el lado final del ángulo θ, entonces $\tan\theta = \frac{y}{x}$ y $\cos\theta = \frac{x}{r}$. Como $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$, entonces $x > 0$ y $y < 0$.

Para calcular las funciones trigonométricas podemos tomar cualquier punto sobre el lado final del ángulo. Seleccionamos el punto con coordenadas $y = -5$ y $x = 12$. A partir de estas consideraciones tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
r^2 &= (-5)^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169,\\
r &= \sqrt{169} = 13,\\
\operatorname{sen}\theta &= \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13}, \qquad \csc\theta = -\frac{13}{5},\\
\cos\theta &= \frac{12}{13}, \quad \sec\theta = \frac{13}{12}, \quad \cot\theta = -\frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 22.3

Suponga que t es un ángudo en posición canónica y las ordenadas de los puntos en su lado final son negativas. Si $\cos t = -\frac{4}{5}$, encuentre los valores de todas sus funciones trigonométricas.

Solución
Tomemos un punto $P(x, y)$ sobre el lado final de t. Como $\cos t = -\frac{4}{5}$, podemos tomar $x = -4$, $r = 5$ y $y < 0$.

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2,\\
16 + y^2 &= 25,\\
y^2 &= 25 - 16 = 9,\\
y &= -3.
\end{aligned}$$

Así un punto en el lado final de t es $(-4, -3)$. Por las definiciones:

$$\operatorname{sen} t = -\frac{3}{5}; \qquad \csc t = -\frac{5}{3},$$

$$\cos t = -\frac{4}{5}; \qquad \sec t = -\frac{5}{4},$$

$$\tan t = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}; \quad \cot t = \frac{4}{3}.$$

Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes ejercicios represente el ángulo en posición estándar y calcule las funciones seno, coseno y tangente de los ángulos dados que satisfagan la condición:

   (a) Ángulo α_1: su lado final contiene al punto $(-6, -8)$.

   (b) Ángulo α_2: su lado final contiene al punto $(3, -2)$.

   (c) Ángulo α_3: su lado final contiene al punto $(-3, 1)$.

   (d) Ángulo α_4: su lado final contiene al punto $(1, -2)$.

   (e) El ángulo α tiene en su lado final el punto de coordenadas $(-5, -12)$.

2. Si $\cos\theta = \frac{-4}{5}$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ.

3. Si $\csc\alpha = \frac{13}{5}$ y las abscisas de los puntos que pertenecen al lado final de α son negativas, encuentre los valores de las funciones trigonométricas de α.

Lección 23

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica II

En la lección 22 definimos las funciones trigonométricas para ángulos en posición canónica o estándar y realizamos algunos ejemplos; veremos cómo determinar el signo de una función trigonométrica teniendo en cuenta la posición del lado final del ángulo en cada uno de los cuadrantes del sistema de coordenadas cartesiano.

Ejemplo 23.1

Encuentre los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de segundo cuadrante cuyo lado final está sobre la recta que contiene el punto P con coordenadas $(-2, 5)$.

Solución

Denotemos por α al ángulo cuyo lado final está sobre la recta dada. Para calcular los valores solicitados utilizamos las coordenadas del punto P. La distancia de P al origen es $r = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$.

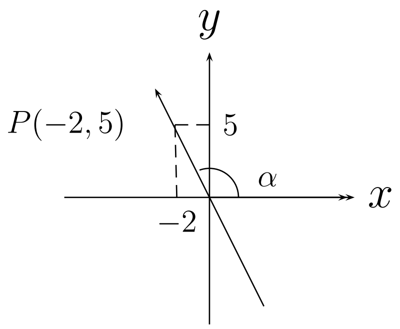


Figura 23.1

Así:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}, \quad \csc\alpha = \frac{\sqrt{29}}{5},\\
\cos\alpha &= \frac{-2}{\sqrt{29}} = -\frac{2\sqrt{29}}{29}, \quad \sec\alpha = \frac{\sqrt{29}}{-2} = -\frac{\sqrt{29}}{2},\\
\tan\alpha &= \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}, \quad \cot\alpha = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

Signos de las funciones trigonométricas

El signo de cada una de las funciones trigonométricas depende de los respectivos signos de las abscisas y ordenadas de los puntos sobre el lado final del ángulo, ya que las distancias son siempre números positivos.

En el primer cuadrante las ordenadas y las abscisas son todas positivas. Así, todas las funciones trigonométricas toman valores positivos.

En el segundo cuadrante las ordenadas son positivas y las abscisas negativas. Como los valores de seno y cosecante dependen de las ordenadas de los puntos, sus valores son positivos. El coseno y la secante dependen de las abscisas, por lo tanto sus valores son negativos. La tangente y la cotangente dependen de los valores de las dos coordenadas y se obtienen como el cociente de dos números con signo opuesto, entonces sus valores son negativos.

En el tercer cuadrante tanto las abscisas como las ordenadas son negativas. Por lo tanto las funciones seno, coseno, secante y cosecante toman valores negativos. La tangente y la cotangente son positivas porque resultan del cociente de dos números con el mismo signo.

En el cuarto cuadrante las ordenadas son negativas y las abscisas son positivas, esto hace que el seno y la cosecante tomen valores negativos y que el coseno y la secante tomen valores positivos; los valores de las funciones tangente y cotangente, por ser el cociente de números con diferente signo, son negativos.

Resumimos los resultados anteriores en la tabla 23.1:

Ejemplo 23.2

Si la tangente del ángulo α es positiva y su coseno es negativo, entonces α es un ángulo de segundo cuadrante.

Ejemplo 23.3

Si $\operatorname{sen} \beta < 0$ y $\cos \beta < 0$, entonces β es un ángulo de tercer cuadrante.

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	**Funciones positivas**	**Funciones negativas**
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, tan, sec, cot
III	tan, cot	sen, cos, csc, sec
IV	cos, sec	sen, tan, csc, cot

Tabla 23.1

Ejemplo 23.4

Suponga que θ es un ángulo en posición canónica en cuyo lado final está el punto $P(-2, y)$. Si θ es de tercer cuadrante y la distancia desde el origen al punto P es $r = 3$, encuentre $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.
Solución:

Para hallar los valores de las funciones debemos conocer el valor de la ordenada y. Como el ángulo es de tercer cuadrante, entonces $y < 0$. Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar y:

$$3^2 = (-2)^2 + y^2,$$

$$y^2 = 9 - 4 = 5,$$

$$y = \pm\sqrt{5}.$$

Puesto que y es negativo, $y = -\sqrt{5}$.

Por lo tanto las coordenadas de P son $(-2, -\sqrt{5})$. Hallamos ahora las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{-\sqrt{5}}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{3},\\
\cos\theta &= \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3},\\
\tan\theta &= \frac{-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 23.5

Determine el signo de todas las funciones trigonométricas de $\frac{9\pi}{4}$.

Solución
Usando el método explicado en la lección 21, obtenemos un ángulo coterminal con el ángulo $\frac{9\pi}{4}$, cuya medida esté comprendida entre 0 y 2π:

$$\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}.$$

El ángulo $\frac{9\pi}{4}$ es coterminal con $\frac{\pi}{4}$. Como $\frac{\pi}{4}$ es un ángulo de primer cuadrante, podemos concluir que todas las funciones de $\frac{9\pi}{4}$ son positivas.

Ejemplo 23.6

Determine el signo de $\sec(-1100°)$.

Solución
Buscamos el ángulo coterminal con $-1100°$, de menos de una vuelta:

$$-1100° = -3(360°) - 20°.$$

El ángulo $-20°$ es un ángulo de cuarto cuadrante y por esto $\sec(-1100°)$ tiene signo positivo.

Ejercicios

1. Si el lado final de un ángulo δ en posición canónica bisecta el tercer cuadrante, represente geometricamente el ángulo δ y encuentre sus funciones trigonométricas.

2. Determine el signo de las 6 funciones trigonométricas de los ángulos dados:

   (a) $\alpha = 225°$, (b) $\beta = 320°$, (c) $\gamma = -225°$,

   (d) $\theta = \frac{3\pi}{4}$, (e) $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$, (f) $\nu = -\frac{11\pi}{4}$.

3. Encuentre las cinco funciones trigonométricas restantes del ángulo cuya información se da, sin encontrar el ángulo:

   (a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$, α está en el segundo cuadrante.

   (b) $\cot\beta = -\frac{1}{3}$, β está en el cuarto cuadrante.

   (c) $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$ y γ está en el tercer cuadrante.

   (d) $\sec\varphi = -\frac{25}{7}$, φ es un ángulo de segundo cuadrante.

4. ¿Es posible encontrar un ángulo α tal que $\cos\alpha \geq 0$ y $\sec\alpha \leq 0$? Justifique su respuesta.

5. Si $\cos\alpha = \cos\beta$ y $\alpha \neq \beta$, ¿son α y β ángulos coterminales? Justifique su respuesta.

6. En los siguientes literales encuentre las medidas exactas de un ángulo que satisfaga la condición dada:

   (a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $\tan\alpha > 0$,

   (b) $\tan\alpha = -1$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

7. Realice una gráfica que represente un ángulo en posición canónica y encuentre sus funciones trigonométricas si el ángulo satisface la información que se da:

   (a) Ángulo δ_1: su lado final forma ángulo de $45°$ con el eje x, en el cuarto cuadrante.

   (b) Ángulo δ_2: su lado final forma ángulo de $30°$ con el eje x, en el primer cuadrante.

   (c) Ángulo δ_3: su lado final forma ángulo de $60°$ con el eje x, en el tercer cuadrante.

Lección 24

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica III

Ejemplo 24.1

Para cada uno de los siguientes casos, sin hallar el ángulo, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas del ángulo en posición canónica o estándar θ.

1. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{5}$, θ en el cuadrante I.
2. $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$, θ en el cuadrante II.
3. $\csc^2\theta = \dfrac{9}{4}$, $270° < \theta < 360°$.

Solución

1. Para calcular los valores que nos piden necesitamos obtener las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que esté sobre el lado terminal del ángulo θ, el cual se encuentra en el primer cuadrante. A continuación mostramos cómo obtener dicho punto.

   Como $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{2}{5}$, podemos suponer que $y = 2$ y $r = 5$ (véase la figura 24.1).

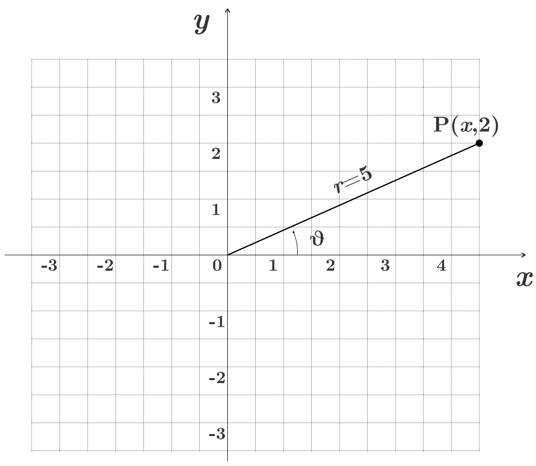
   

   Figura 24.1

   Sabemos que $x^2+y^2 = r^2$, así que $x^2 = r^2-y^2$ y por lo tanto $x = \pm\sqrt{r^2-y^2}$. Como el lado terminal del ángulo θ está en el primer cuadrante, entonces la coordenada x

debe ser positiva. Luego

$$x = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}.$$

Hallemos ahora las otras cinco funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} & & \csc\theta &= \frac{r}{y} = \frac{5}{2},\\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{21}}{5}, & \sec\theta &= \frac{r}{x} = \frac{5}{\sqrt{21}},\\ \tan\theta &= \frac{y}{x} = \frac{2}{\sqrt{21}}, & \cot\theta &= \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

Es importante resaltar que $P(\sqrt{21}, 2)$ no es el único punto que podríamos haber escogido; de hecho hay infinitas posibilidades ya que hay infinitos puntos sobre el lado terminal del ángulo θ. Por ejemplo, cuando supusimos que $y = 2$ y $r = 5$, otra escogencia válida hubiera sido $y = 4$ y $r = 10$, la cual correspondería al punto $P'(2\sqrt{21}, 4)$, o también $y = 2/3$ y $r = 5/3$, correspondiente al punto $P''(\sqrt{21}/3, 2/3)$ (véase la figura 24.2). Es decir, cualquier punto cuyas coordenadas sean un múltiplo positivo de las coordenadas del punto $P(\sqrt{21}, 2)$ sería una elección correcta. Invitamos al lector a que verifique que con cualquiera de estas escogencias se obtienen los mismos valores para todas las funciones trigonométricas del ángulo θ.

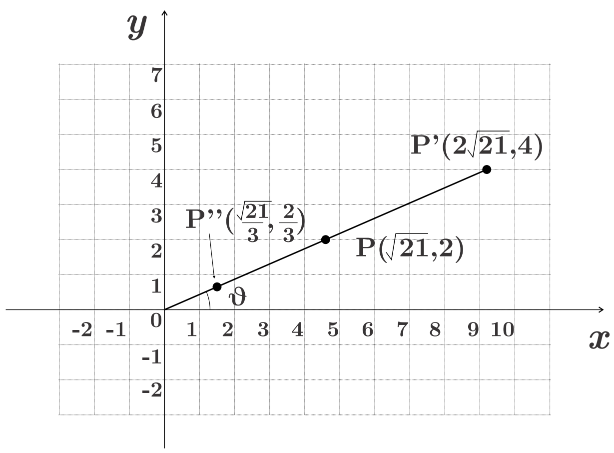


Figura 24.2

2. Para calcular los valores pedidos necesitamos obtener las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que esté sobre el lado terminal del ángulo θ, el cual se encuentra en el segundo cuadrante. Como $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{4}{3}$ y en el segundo cuadrante x es negativa, podemos suponer que $y = 4$ y $x = -3$ (véase la figura 24.3).

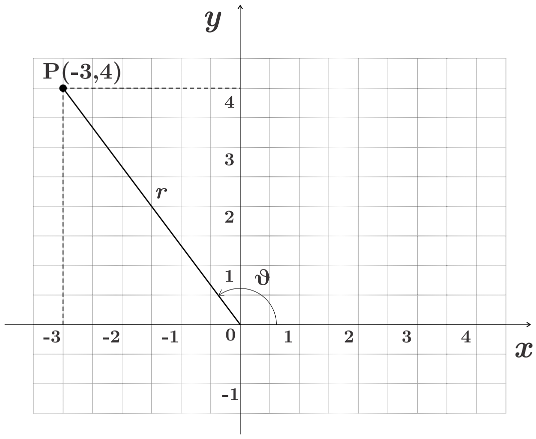


Figura 24.3

Sabemos que $x^2 + y^2 = r^2$, así que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Entonces

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Hallemos ahora las otras cinco funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{r} = \frac{4}{5}, & \csc\theta &= \frac{r}{y} = \frac{5}{4},\\
\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}, & \sec\theta &= \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3},\\
& & \cot\theta &= \frac{x}{y} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

3. Necesitamos obtener las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que esté sobre el lado terminal del ángulo θ, el cual se encuentra en el tercer cuadrante. $\csc^2\theta = \dfrac{9}{4}$ implica que

$$\csc\theta = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}.$$

Como $270° < \theta < 360°$, entonces $\csc\theta = -\dfrac{3}{2}$. Sabemos que $\csc\theta = \dfrac{r}{y}$, por lo que podemos suponer que $y = -2$ y que $r = 3$ (véase la figura 24.4).

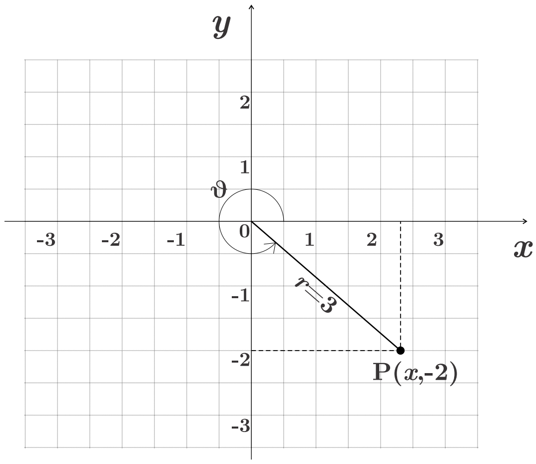


Figura 24.4

Como $x^2+y^2=r^2$, entonces $x=\pm\sqrt{r^2-y^2}$. En el cuarto cuadrante la coordenada x es positiva, por lo que

$$x=\sqrt{3^2-(-2)^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}.$$

Hallemos ahora las otras cinco funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}, \\
&\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{5}}{3}, &&\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{3}{\sqrt{5}}, \\
&\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}, &&\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{5}}{-2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Encuentre las cinco funciones trigonométricas restantes del ángulo cuya información se da, sin encontrar el ángulo:

1. $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, donde θ es un ángulo del primer cuadrante.
2. $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{12}{13}$, donde α es un ángulo del segundo cuadrante.
3. $\cot\beta=-\dfrac{1}{3}$, donde β es un ángulo del cuarto cuadrante.
4. $\cos\gamma=-\dfrac{1}{2}$, donde γ es un ángulo del tercer cuadrante.
5. $\sec\varphi=-\dfrac{25}{7}$, donde φ es un ángulo del segundo cuadrante.

Lección 25

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica IV

El tema central de esta lección es el estudio de los ángulos de referencia, los cuales son ángulos águdos cuya importancia radica en que ellos permiten simplificar el cálculo de las funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica arbitrarios en términos de las funciones trigonométricas de ángulos en el primer cuadrante.

La trigonometría se inició con el estudio de las relaciones trigonométricas para ángulos agudos. Esto dió origen al estudio de los ángulos especiales de $30°, 60°$ y $45°$ y a la construcción de tablas para propiciar el cálculo de las funciones trigonométricas para los demás ángulos. Estas tablas trigonométricas brindan la información en términos de ángulos agudos. Cuando el estudio se extiende a los ángulos en posición canónica surge el interés de poder calcular las funciones trigonométricas de cualquier ángulo utilizando funciones de ángulos en el primer cuadrante. Para ello son usados los denominados ***ángulos de referencia***.

Ángulos de referencia

Definición 25.1

Si θ es un ángulo en posición canónica cuyo lado final no está sobre un eje coordenado, su ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

Un procedimiento para calcular los ángulos de referencia de cualquier ángulo α consiste en determinar el cuadrante en el cual está el ángulo α expresando α en términos de un ángulo coterminal con él, orientado positivamente, de menos de una vuelta y luego a partir de este último se calcula el ángulo de referencia de acuerdo con el cuadrante al cual pertenece α.

Vamos a restringir nuestro estudio al caso en el cual $0 < \theta < 2\pi$, dado que para cualquier ángulo β no cuadrantal se puede hallar un ángulo coterminal θ orientado positivamente y tal que $0 < \theta < 2\pi$.

Denotamos por θ_R al ángulo de referencia del ángulo θ. En la figura 25.1 se presentan los ángulos de referencia θ_R para ángulos θ que están en los cuatro cuadrantes.

Dado que en el método propuesto para hallar el ángulo de referencia de un ángulo α en posición canónica es importante calcular un ángulo coterminal con α, positivo y de menos de una vuelta, consideraremos varios ejemplos sobre este tema y luego calcularemos los ángulos de referencia.

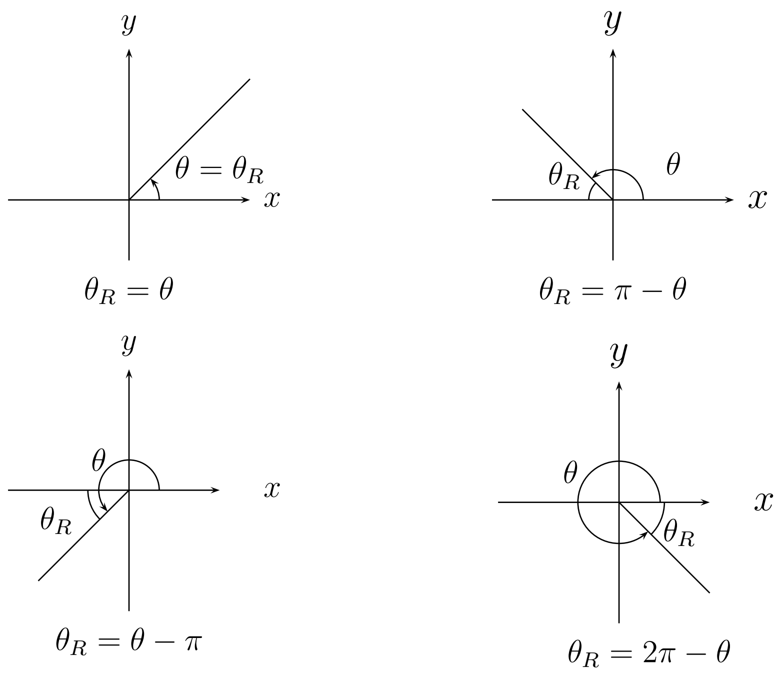


Figura 25.1

Ejemplo 25.1

Si $\alpha = \dfrac{11\pi}{4}$, encuentre un ángulo α_1 coterminal con α, tal que $0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi$.

Debemos expresar a α en la forma

$$\alpha = \frac{11\pi}{4} = 2\pi n + \alpha_1.$$

Podemos calcular a n y α_1 en dos formas diferentes.

1. Observamos que α es un ángulo de una vuelta, puesto que

$$2\pi = \frac{8\pi}{4} \leq \frac{11\pi}{4} \leq \frac{16\pi}{4} = 4\pi.$$

   Entonces

$$\alpha_1 = \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$
$$\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

2. El valor de n es el cociente y α el residuo que se obtienen al dividir a $\frac{11\pi}{4}$ por 2π. Así:

$$\frac{\frac{11\pi}{4}}{2\pi} = \frac{\frac{11\pi}{4}}{\frac{8\pi}{4}} = \frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8},$$
$$\frac{11\pi}{4} = 2\pi\left(1 + \frac{3}{8}\right) = 2\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

Por lo tanto $n = 1$ y $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$.

Ejemplo 25.2

Utilizando cualquiera de los dos métodos presentados en el ejemplo 25.1, podemos hallar un ángulo α_2 coterminal con el ángulo $\alpha = \dfrac{19\pi}{3}$, tal que $0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$. Así,

$$\alpha = \frac{19\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Ejemplo 25.3

Para encontrar un ángulo, orientado positivamente de menos de una vuelta, coterminal con $\alpha = -\dfrac{25\pi}{6}$, debemos calcular el número de vueltas completas que rota α, respecto al origen. Ya que

$$-\frac{36\pi}{6} \leq -\frac{25\pi}{6} \leq -\frac{24\pi}{6},$$

α es un ángulo orientado negativamente de 2 vueltas. Para hallar un ángulo coterminal con α de menos de una vuelta que sea positivo, debemos hacer la diferencia de α con el ángulo orientado negativo de tres vueltas y obtenemos

$$-\frac{25\pi}{6} = -\frac{36\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = -6\pi + \frac{11\pi}{6}.$$

Así, $\alpha_3 = \dfrac{11\pi}{6}$ es un ángulo coterminal con α.

Ejemplo 25.4

Vamos a calcular los ángulos de referencia para los siguientes ángulos positivos y de menos de una vuelta: $\alpha = 150°, \beta = \dfrac{4\pi}{3}$ y $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$.

Solución
Véase la figura 25.1. El ángulo α es de segundo cuadrante. Su ángulo de referencia es $\alpha_R = 180° - 150° = 30°$.

β es un ángulo de tercer cuadrante. Su ángulo de referencia es $\beta_R = \dfrac{4\pi}{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3}$.

θ es un ángulo de cuarto cuadrante. Su ángulo de referencia es $\theta_R = 2\pi - \dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$.

Ejemplo 25.5

Encuentre los ángulos de referencia de los ángulos: $\theta = \dfrac{13\pi}{6}, \delta = \dfrac{8\pi}{3}$ y $\phi = -405°$.

Solución
Tenemos aquí ángulos de más de una vuelta. Para cada ángulo vamos buscar un ángulo coterminal de menos de una vuelta, orientado positivamente para después hallar el ángulo de referencia de acuerdo con el método presentado en la figura 25.1.

Encontremos el ángulo de referencia del ángulo $\theta = \dfrac{13\pi}{6}$. Puesto que

$$\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6},$$

el ángulo de referencia es $\theta_R = \dfrac{\pi}{6}$. Éste es el ángulo agudo que forman el eje horizontal positivo y el lado final del ángulo.

Para $\delta = \dfrac{8\pi}{3}$ tenemos

$$\frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

Como δ es coterminal con $\dfrac{2\pi}{3}$, el ángulo de referencia de δ coincide con el ángulo de referencia de $\dfrac{2\pi}{3}$. Puesto que $\dfrac{2\pi}{3}$ es un ángulo de segundo cuadrante su ángulo de referencia es

$$\delta_R = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Consideremos ahora el ángulo $\phi = -405°$. Cuando los ángulos están orientados negativamente, debemos tener cuidado en la búsqueda de ángulos coterminales pues, según nuestra restricción, debemos encontrar aquél que sea positivo con menos de una vuelta. El lado final de ϕ ha girado más de una vez, pero menos de dos, su medida es mayor de $360°$ pero menor que $720°$. Si expresamos a ϕ en términos de $-360°$, tendríamos que utilizar un ángulo negativo para obtener la igualdad. Debemos entonces compararlo con el ángulo $-720°$. Vemos que

$$-405° = -720° + 315°.$$

Puesto que $315°$ es un ángulo de cuarto cuadrante, el ángulo de referencia de ϕ es

$$\phi_R = 360° - 315° = 45°.$$

Ejercicios

1. Por medio de un gráfico represente el ángulo dado y su ángulo de referencia:
   (a) $\alpha = 325°$, (b) $\beta = 225°$, (c) $\gamma = \dfrac{5\pi}{3}$, (d) $\theta = \dfrac{13\pi}{3}$, (e) $\phi = \dfrac{9\pi}{4}$.

2. Determine en qué cuadrante está el ángulo dado y encuentre su ángulo de referencia de los siguientes ángulos:
   (a) $s = -60°$, (b) $t = -225°$, (c) $u = -750°$, (d) $v = -\frac{4\pi}{3}$, (e) $w = \dfrac{-13\pi}{6}$,
   (f) $x = \dfrac{-17\pi}{3}$.

Lección 26

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica V

En esta lección veremos cómo calcular las funciones trigonométricas de un ángulo α en posición canónica no cuadrantal utilizando las funciones trigonométricas de los ángulos de referencia y teniendo en cuenta los signos propios del cuadrante de α.

Cálculo de las funciones trigonométricas utilizando ángulos de referencia

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo α en posición canónica, en primer lugar se halla el cuadrante correspondiente a α con el propósito de calcular el ángulo de referencia y determinar los signos de las funciones trigonométricas; luego se determinan los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de referencia y con éstas las del ángulo α teniendo en cuenta el signo. Este método se denomina ***reducción al primer cuadrante.***

Ejemplo 26.1

1. Calcule el seno, el coseno y la tangente del ángulo $\dfrac{23\pi}{6}$.

   Solución:
   Buscamos el ángulo coterminal positivo y de menos de una vuelta:
   $$\frac{23\pi}{6} = 2\pi + \frac{11\pi}{6}.$$
   El ángulo $\dfrac{11\pi}{6}$ está en el cuarto cuadrante. Su ángulo de referencia es $2\pi - \dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$.
   Los valores del seno y de la tangente en el cuarto cuadrante son negativos, y el coseno es positivo. Utilizamos los valores corresponientes a $\dfrac{\pi}{6}$ y obtenemos:
   $$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}, \quad \text{entonces} \quad \operatorname{sen}\frac{23\pi}{6} = -\frac{1}{2},\\ \cos\frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{entonces} \quad \cos\frac{23\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\\ \tan\frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{entonces} \quad \tan\frac{23\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

2. Usando ángulos de referencia, halle los valores del seno, el coseno y la tangente del ángulo $\alpha = 200°$.

   Solución
   El ángulo α está en el tercer cuadrante, por lo tanto

   $$\alpha_R = 200° - 180° = 20°.$$

   Hallamos las funciones del ángulo que mide $20°$ y tenemos en cuenta que por estar α en el tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos y la tangente es positiva. De acuerdo con la tabla trigonométrica 91.1, en la página 422, se tiene que $\operatorname{sen} 20° \approx 0.34, \cos 20° \approx 0.94$ y $\tan 20° \approx 0.36$. Así,

   $$\operatorname{sen}\alpha \approx -0.34, \qquad \cos\alpha \approx -0.94, \qquad \tan\alpha \approx 0.36.$$

Ejemplo 26.2

Utilizando el método de reducción al primer cuadrante encuentre el seno, el coseno y la tangente de $\beta = -550°$.

Solución:

1. Tomamos un ángulo coterminal con β, de menos de una vuelta orientado positivamente.

   $$-550° = -720° + 170°.$$

   Así $170°$ es un ángulo coterminal con β y es de segundo cuadrante.

2. Por lo tanto el ángulo β es de segundo cuadrante. Hallamos ahora el ángulo de referencia del ángulo que mide $170°$;

   $$\beta_R = 180° - 170° = 10°.$$

3. Evaluamos las funciones teniendo en cuenta que β es de segundo cuadrante y que, por lo tanto, el valor del seno es positivo y los del coseno y la tangente son negativos.

   $$\operatorname{sen} 10° \approx 0.17, \quad \text{por lo tanto,} \quad \operatorname{sen}(-550°) \approx 0.17,$$

   $$\cos 10° \approx 0.98, \quad \text{por lo tanto,} \quad \cos(-550°) \approx -0.98,$$

   $$\tan 10° \approx 0.18, \quad \text{por lo tanto,} \quad \tan(-550°) \approx -0.18.$$

   Véase la tabla trigonométrica 91.1, en la página 422.

Ejemplo 26.3

En la tabla 26.1 aparecen las funciones trigonométricas de los ***ángulos notables***. Estos son los ángulos con medidas $30°$, $45°$ y $60°$ y todos aquellos comprendidos entre $0°$ y $360°$, que los tienen a ellos como ángulos de referencia.

Funciones trigonométricas de ángulos notables

Función	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabla 26.1

Periodicidad de las funciones trigonométricas

Todos los ángulos medidos en radianes de la forma $\alpha + 2n\pi$, donde n es un entero, son coterminales con α. El número n indica el número de giros y el sentido en que ellos se hacen.

Como las funciones trigonométricas de ángulos coterminales son iguales tenemos en particular las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) &= \operatorname{sen}\alpha, & \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos\alpha, \\ \tan(\alpha + 2\pi) &= \tan\alpha, & \cot(\alpha + 2\pi) &= \cot\alpha, \\ \sec(\alpha + 2\pi) &= \sec\alpha, & \csc(\alpha + 2\pi) &= \csc\alpha. \end{aligned} \tag{26.1}$$

Definición 26.1

Una función f es periódica si existe un número positivo p tal que $f(x) = f(x + p)$ para todo número $x \in D_f$. El ***período*** de la función f es el menor número real positivo p para el cual $f(x) = f(x + p)$ para todo número $x \in D_f$.

Así, debido a las igualdades en (26.1), las funciones trigonométricas definidas sobre ángulos en posición estándar o canónica son periódicas.

Posteriormente veremos que el período de las funciones seno, coseno, y sus cofunciones secante y cosecante es efectivamente 2π, y el período de la tangente y la cotangente es π.

Ejercicios

1. Por el método de reducción al primer cuadrante, encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas de $235°$, $\dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{17\pi}{4}$.
2. Por el método de reducción al primer cuadrante encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos:
   (a) $-750°$, (b) $\dfrac{-25\pi}{6}$.

3. En la tabla 26.1, se dan las funciones trigonométricas de los ángulos notables. Para cada uno de los ángulos de la tabla encuentre su ángulo de referencia y verifique las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo.

4. Elabore una tabla similar a la tabla 26.1, donde aparezcan todos los ángulos múltiplos de $45°$ en el intervalo $[-720°, 720°]$ y presente los valores de las funciones seno, coseno y tangente de cada uno de los ángulos.

Lección 27

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica VI

Los ángulos cuadrantales o de cuadrante son aquellos ángulos en posición canónica que tienen su lado final en uno de los ejes coordenados de un sistema de coordenadas rectangulares. En las definiciones de algunas de las funciones trigonométricas hay restricciones para estos ángulos; éste será el tema de esta lección.

Funciones trigonométricas de ángulos con lado final sobre los ejes coordenados

Debido a que las funciones trigonométricas de ángulos coterminales son iguales es suficiente considerar los ángulos 0, $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$. Para estos ángulos no están definidas todas las funciones trigonométricas.

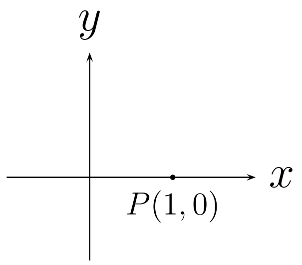
1. Si el lado final de un ángulo en posición canónica está sobre el eje y, la abscisa de cualquiera de sus puntos es cero, por lo tanto para estos ángulos no están definidas las funciones tangente, ni secante. Así, no están definidas la tangente, ni la secante de $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{3\pi}{2}$, ni de los ángulos coterminales con alguno de ellos.
2. Para los ángulos en posición canónica cuyo lado final está sobre el eje x, la ordenada de cualquiera de los puntos de su lado final es cero; para estos ángulos no están definidas las funciones cotangente, ni cosecante. Entonces no están definidas la cosecante, ni la cotangente de 0, de π, ni de los ángulos coterminales con alguno de ellos.
3. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los ángulos.

Para calcular los valores de las funciones de estos ángulos elegimos un punto en el lado final del ángulo cuya distancia al origen sea igual a 1 y teniendo en cuenta sus coordenadas hallamos los valores de cada función trigonométrica. Ilustremos con dos casos particulares.

Ejemplo 27.1

Encuentre los valores de las funciones correspondientes a los ángulos 0 y $\frac{3\pi}{2}$.

Un punto sobre el lado final del ángulo $\alpha = 0$ es $P(1,0)$. La distancia del origen a este punto es $r = \sqrt{1^2 + 0} = \sqrt{1} = 1$. Así,



$$\text{sen } 0 = \frac{0}{1} = 0, \quad \cos 0 = \frac{1}{1} = 1,$$

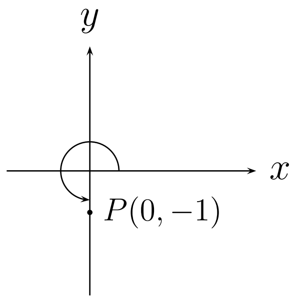
$$\tan\ 0 = \frac{0}{1} = 0, \quad \sec 0 = \frac{1}{1} = 1,$$

cot 0 y csc 0 no están definidas

ya que la ordenada de P es 0.

Figura 27.1

Calculemos las relaciones trigonométricas de $\frac{3\pi}{2}$. Un punto sobre el lado final del ángulo es $P(0,-1)$. La distancia del origen a este punto es $r = \sqrt{0 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$



$$\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{1} = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\cot\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0. \quad \csc\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$\tan\frac{3\pi}{2}$ y $\sec\frac{3\pi}{2}$ no están definidas

ya que la abscisa de P es 0.

Figura 27.2

Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Ángulo	P(x,y)	r	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0	(1,0)	1	0	1	0	no definida	1	no definida
$\frac{\pi}{2}$	(0,1)	1	1	0	no definida	0	no definida	1
π	(-1,0)	1	0	-1	0	no definida	-1	no definida
$\frac{3\pi}{2}$	(0,-1)	1	-1	0	no definida	0	no definida	-1

Ejemplo 27.2

Calcule las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = -3\pi$.

Solución
Como

$$-3\pi = -4\pi + \pi,$$

las funciones trigonométricas del ángulo -3π son iguales a las del ángulo π, ya que los dos son ángulos coterminales.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-3\pi) &= \operatorname{sen}(\pi) = 0, & \csc(-3\pi) &\text{ no está definida,}\\
\cos(-3\pi) &= \cos(\pi) = -1, & \sec(-3\pi) &= \sec\pi = -1,\\
\tan(-3\pi) &= \tan(\pi) = 0, & \cot(-3\pi) &\text{ no está definida.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 27.3

Encuentre las funciones trigonométricas de $\frac{9\pi}{2}$.

Solución

$$\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$$

Las funciones trigonométricas de $\frac{9\pi}{2}$ pueden expresarse en términos de las funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{9\pi}{2} &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1, & \csc\frac{9\pi}{2} &= 1,\\
\cos\frac{9\pi}{2} &= \cos\frac{\pi}{2} = 0, & \sec\frac{9\pi}{2} &\text{no está definida,}\\
\tan\frac{9\pi}{2} &\text{ no está definida,} & \cot\frac{9\pi}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Encuentre, cuando sea posible, los siguientes valores. Explique cuando alguno de ellos no esté definido:

1. $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)$.
2. $\tan 540°$.
3. $\sec 450°$.
4. $\sec(-390°)$.
5. $\tan\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$.
6. $\cot 11\pi$.
7. $\operatorname{sen}(-4\pi)$.
8. $\operatorname{sen} 5\pi$.

Lección 28

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica VII

En esta lección haremos énfasis en la relación que existe entre las funciones trigonométricas de un ángulo θ en posición canónica y aquellas de su ángulo opuesto, $-\theta$. A partir de estas relaciones estudiaremos los conceptos de función par e impar.

Funciones de $(-\theta)$

A partir de la figura 28.1 podemos estudiar la relación que existe entre las funciones trigonométricas de un ángulo dado θ y las de su ángulo ***opuesto*** $(-\theta)$.

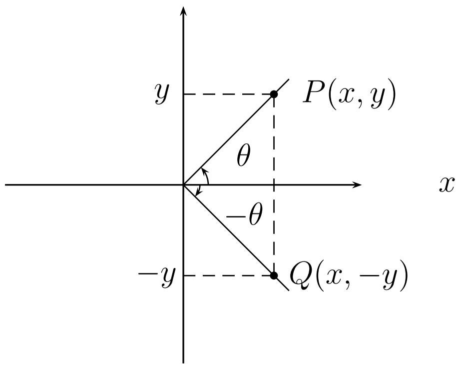


Figura 28.1

Si el punto P de coordenadas (x, y) está en el lado final de un ángulo θ en posición canónica, el punto $Q(x, -y)$ está en el lado final de $-\theta$. Entonces las funciones trigonométricas de θ son:

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}, & \cos\theta = \dfrac{x}{r}, & \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \\ \cot\theta = \dfrac{x}{y}, & \sec\theta = \dfrac{r}{x}, & \csc\theta = \dfrac{r}{y}. \end{array}\right\} \tag{28.1}$$

Las funciones de $-\theta$ son:

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen}(-\theta) = \dfrac{-y}{r} = -\dfrac{y}{r}, & \cos(-\theta) = \dfrac{x}{r}, & \tan(-\theta) = \dfrac{-y}{x} = -\dfrac{y}{x}, \\ \cot(-\theta) = \dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}, & \sec(-\theta) = \dfrac{r}{x}, & \csc(-\theta) = \dfrac{r}{-y} = -\dfrac{r}{y}. \end{array}\right\} \tag{28.2}$$

Comparando las igualdades en (28.1) y (28.2), concluimos que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta, \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta, \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta, \\ \sec(-\theta) &= \sec\theta, \qquad \csc(-\theta) = -\cot\theta. \end{cases} \tag{28.3}$$

Funciones pares e impares

Definición 28.1

Si para una función f se cumple que $f(x) = f(-x)$, para cualquier número x tal que x y $-x$ están en el dominio de f, decimos que la función f es ***par***. Si $f(-x) = -f(x)$ para todo x tal que x y $-x$ están en el dominio de la función, decimos que la función f es ***impar***.

De las igualdades en 28.3 concluimos que son funciones pares las funciones coseno y secante. Son impares las funciones seno, tangente, cosecante y cotangente.

Ejemplo 28.1

1. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$.
3. Si $\cos(-\alpha) = -0.78$, entonces $\cos\alpha = -0.78$.
4. $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$.

Ejemplo 28.2

Suponga que $\tan(-\beta) = 0.47$ y $\cos\beta = 0.91$. Sin encontrar el valor de β encuentre $\operatorname{sen}\beta$. ¿A cuál cuadrante pertenece β ?

Solución
Utilizamos la identidad

$$\tan(-\beta) = \frac{\operatorname{sen}(-\beta)}{\cos(-\beta)}. \tag{28.4}$$

Sabemos que $\cos(-\beta) = \cos\beta$, por lo cual $\cos(-\beta) = 0.91$. Reemplazamos en (28.4) y simplificamos:

$$0.47 = \frac{\operatorname{sen}(-\beta)}{0.91}, \qquad \operatorname{sen}(-\beta) = (0.47)(0.91) = 0.4277 \approx 0.43.$$

Como $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$, tenemos

$$-\operatorname{sen}\beta = 0.43.$$

Podemos concluir que

$$\operatorname{sen}\beta = -0.43.$$

Como $\cos\beta$ es positivo y $\operatorname{sen}\beta$ es negativo, entonces el ángulo β es de cuarto cuadrante.

Ejemplo 28.3

Determine si la función $f(x) = \operatorname{sen} x \tan x$ es par o impar.

Solución
Debemos calcular $f(-x)$ para compararlo con $f(x)$.

$$f(-x) = \operatorname{sen}(-x)\tan(-x) = (-\operatorname{sen} x)(-\tan x) = (\operatorname{sen} x)(\tan x) = f(x).$$

Por lo tanto la función f es par.

Observación 28.1

En forma general se puede demostrar que el producto de dos funciones impares es una función par; el producto de dos funciones pares es par y el producto de una función impar por una par es impar.

Ejercicios

1. Si el punto P con coordenadas $(-1, 1)$ está en el lado final del ángulo $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$, verifique que el punto $P'(-1, -1)$ está en el lado final de $\theta_2 = -\frac{3\pi}{4}$.
2. Si el ángulo x es un ángulo en el tercer cuadrante ¿en qué cuadrante está $-x$?
3. Si el ángulo x es un ángulo en el cuarto cuadrante ¿en qué cuadrante está $-x$?
4. Si $\operatorname{sen} x \approx -0.77$ y $\tan(-x) \approx 1.19$, ¿a qué cuadrante pertenece x?. Determine el signo de $\cos x$ y calcule su valor sin uso de tablas, ni calculadora.
5. Determine si las siguientes funciones son pares o impares:

$$(a)\ f_1(x) = (\cos x)\operatorname{sen}(x), \quad (b)\ f_3(x) = -\tan(x), \quad (b)\ f_2(x) = (\operatorname{sen} x)^2$$
$$(d)\ f_4(x) = (\operatorname{sen} x)^3.$$

Lección 29

Funciones trigonométricas de números reales I

En esta lección veremos cómo las definiciones de las funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica, medidos en radianes se pueden extender a funciones cuyos dominios son subconjuntos de números reales.

Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los ángulos en posición canónica y el conjunto de los números reales. Al ángulo α en posición canónica y orientado positivamente con medida t radianes se le hace corresponder el número t y al ángulo en posición canónica orientado negativamente y con medida t radianes se le hace corresponder el número $-t$. Recíprocamente con cada número real t asociamos un ángulo en posición canónica. Al número real positivo t se le asocia un ángulo con medida t radianes orientado positivamente. A un número real t negativo, le corresponde un ángulo cuya medida es $-t$ radianes orientado negativamente y con el número real 0, asociamos el ángulo nulo.

En la lección 8 estudiamos la relación entre la longitud s del arco de circunferencia subtendido por un ángulo central t medido en radianes y el radio de la circunferencia r, representados en la figura 29.1.

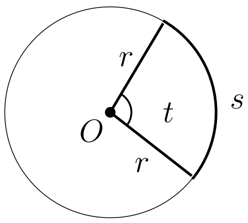


Figura 29.1

Podemos usar la igualdad en (29.1) para calcular bien sea el radio de la circunferencia, la longitud s del arco o la medida del ángulo t en radianes, cuando conocemos las medidas de dos de estos elementos: s, r ó t.

$$t = \frac{s}{r}. \tag{29.1}$$

Las medidas de s y r deben ser expresadas con la misma unidad de longitud. De (29.1) vemos que la medida del ángulo central t dado en radianes subtendido por el arco s es

$$t = \frac{s}{r}. \tag{29.2}$$

Cuando el radio de la circunferencia es igual a 1, tenemos:

$$t = \frac{s}{1} = s. \tag{29.3}$$

De acuerdo con (29.3), la medida del ángulo t en radianes es igual a la longitud del arco, medida en la misma unidad de longitud del radio de la circunferencia.

Si colocamos el ángulo t en posición canónica, tenemos la situación representada en la figura 29.2. En la parte derecha se representa un ángulo t orientado positivamente cuya medida es s radianes y la longitud del arco es s unidades de longitud, donde $s > 0$ En la parte izquierda de la gráfica se muestra un ángulo orientado negativamente, está asociado con el número real negativo $-s$ y el arco tiene longitud s.

En la parte inferior de la figura, vemos la correspondencia entre el ángulo en posición canónica y el punto en la recta real que representa la medida del arco, si el ángulo está orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj. Cuando el ángulo está orientado en el sentido de las agujas del reloj el número correspondiente en la recta real es un número negativo.

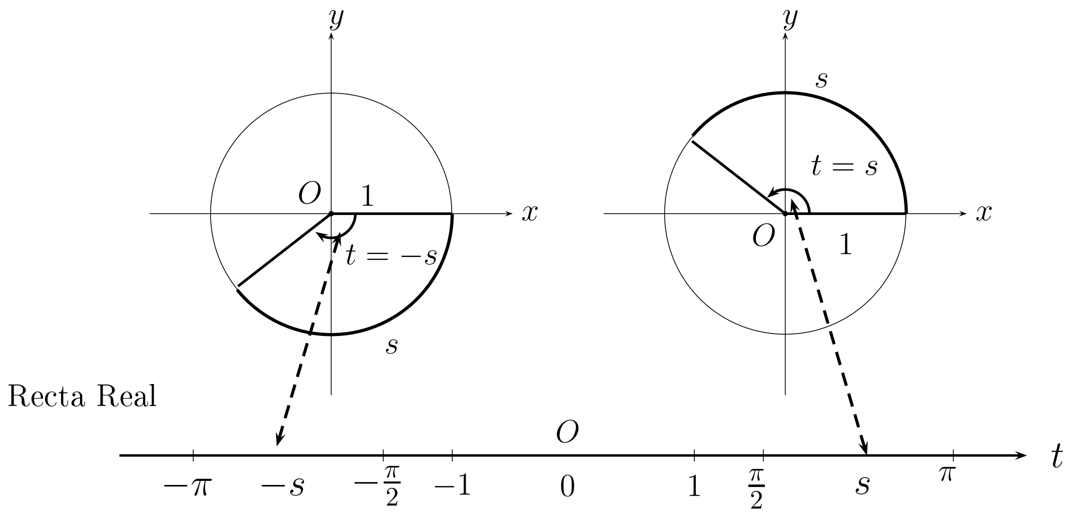


Figura 29.2

Esta correspondencia nos permite considerar las funciones trigonométricas que fueron definidas para ángulos en posición canónica, como funciones cuyos dominios respectivos sean subconjuntos de números reales, teniendo en cuenta los valores admitidos, esto es, los valores para los cuales cada función está definida para el ángulo correspondiente.

Circunferencia unitaria

Para el estudio de las propiedades de las funciones trigonométricas de números reales vamos a utilizar la ***circunferencia unitaria*** que es la circunferencia cuyo centro es el origen de un sistema de coordenadas cartesianas y su radio es la unidad.

Utilizando la fórmula de la distancia entre el punto $P(x,y)$ y el origen $O(0,0)$, dada por $d(P,O)=\sqrt{x^2+y^2}=1$, tenemos que los puntos de la circunferencia unitaria satisfacen la ecuación (29.4):

$$x^2+y^2=1. \tag{29.4}$$

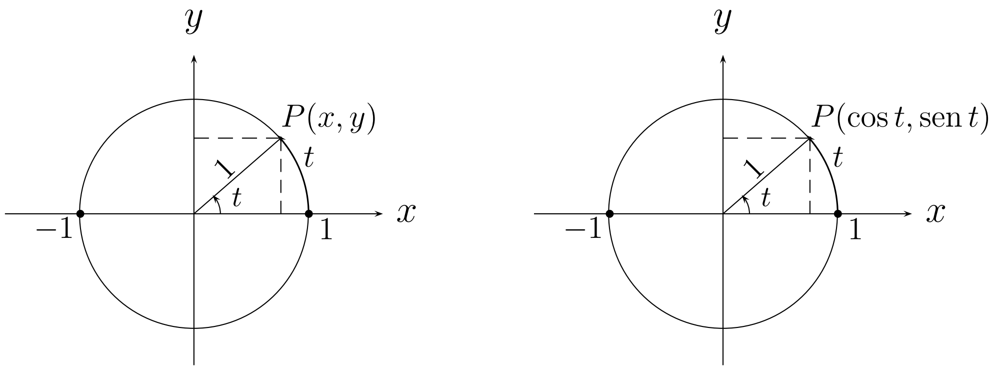


Figura 29.3

Dominio y rango de las funciones $z=\operatorname{sen} t$ y $z=\cos t$

Dado un número real t, consideremos un punto P en la intersección del lado final del ángulo t y la circunferencia unitaria, como se representa en la figura 29.3.

La circunferencia unitaria, que aparece en la figura 29.3, es comúnmente llamada ***circunferencia trigonométrica***.

Por las definiciones tenemos:

$$\operatorname{sen} t=\frac{y}{1}=y, \quad \cos t=\frac{x}{1}=x. \tag{29.5}$$

Las igualdades en (29.5) implican que las coordenadas del punto P se pueden escribir como $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Así, los valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ dependen únicamente de la ordenada y y la abscisa x del punto $P(x,y)$, respectivamente, localizado en la intersección del lado final del ángulo con medida t radianes y la circunferencia unitaria.

En la parte derecha de la figura 29.3 observamos que las coordenadas del punto P están escritas en términos de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$.

Si denotamos los dominios de las funciones seno y coseno por D_{sen} y D_{cos}, respectivamente, y $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales, tenemos que:

$$D_{sen}=\mathbb{R} \quad \text{y} \quad D_{cos}=\mathbb{R}.$$

Al pertenecer el punto P a la circunferencia unitaria, las ordenadas y las abscisas de estos puntos pueden toman todos los valores en el intervalo cerrado $[-1,1]$. El mayor valor posible es 1 y el menor -1. Esto implica que si denotamos por R_{sen} y R_{cos} al rango de las funciones seno y coseno, respectivamente, tenemos que

$$R_{sen}=[-1,1] \quad \text{y} \quad R_{cos}=[-1,1].$$

Por estar el punto P en la circunferencia unitaria se tiene que

$$(\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 = 1. \tag{29.6}$$

Ejemplo 29.1

1. $\operatorname{sen} 15$ es el seno del ángulo que mide 15 radianes orientado positivamente.
2. $\cos(-20)$ es el coseno del ángulo que mide 20 radianes orientado negativamente.
3. $\operatorname{sen} 25 \neq \operatorname{sen} 25°$.

Ejemplo 29.2

¿Es posible encontrar un número real t tal que $\operatorname{sen} t = 0.5$ y $\cos t = -0.5$?

Si existiese tal número real t debería satisfacer la igualdad (29.6). Observe que

$$(\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 = (0.5)^2 + (-0.5)^2 = 0.25 + 0.25 = 0.5 \neq 1.$$

Luego no existe un número real t que satisfaga las condiciones dadas.

Ejemplo 29.3

Determinemos cúantos valores de t, satisfacen la condición $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$, para t en el intervalo $[0, 2\pi)$. Tomamos un punto P en la intersección del lado final del ángulo t y la circunferencia trigonométrica.

Si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$, las ordenadas de P deben ser iguales a $\frac{1}{2}$. Hay dos puntos P sobre la circunferencia unitaria con tal ordenada uno en el primer cuadrante y otro en el segundo. Véase la figura 29.4.

Un ángulo en el primer cuadrante tal que $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ es $\frac{\pi}{6}$ y en el segundo cuadrante un ángulo correspondiente al ángulo de referencia $\frac{\pi}{6}$ es $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

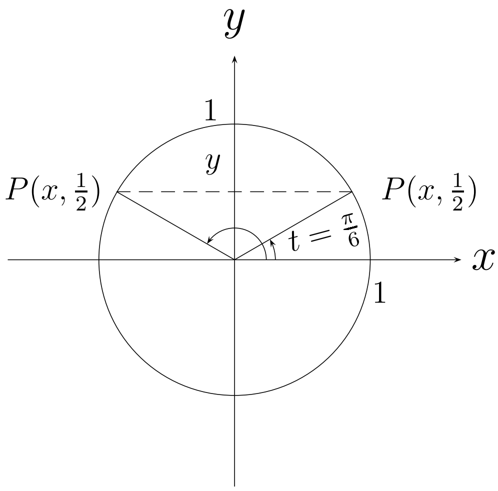


Figura 29.4

Ejercicios

1. Si $P(x, y)$ es el punto de intersección del lado final del ángulo t y la circunferencia trigonométrica,
(a) ¿cuántas veces rota P alrededor del origen O cuando t varía en el intervalo cerrado $[-10\pi, 10\pi]$?
(b) Si el punto P se desplaza sobre la circunferencia a una velocidad de π centímetros por segundo, cuántas rotaciones ha hecho el ángulo t alrededor de su vértice después de 12 segundos?

2. En los siguientes literales utilizando la circunferencia unitaria, determine para cuántos números reales t la función f definida por $z = f(t)$ toma el valor z dado, en el intervalo I.

   (a) $f(t) = \operatorname{sen} t$, $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}, I = [0, 2\pi)$.

   (b) $f(t) = \cos t$, $z = \frac{1}{2}, I = [0, 2\pi)$.

   (c) $f(t) = \operatorname{sen} t$, $z = \frac{\sqrt{3}}{2}, I = [0, 4\pi)$.

   (d) $f(t) = \cos t$, $z = 2$, $I = [-2\pi, 2\pi)$.

3. Responda las preguntas en los siguientes literales. Justifique su respuesta. En su explicación puede utilizar la circunferencia unitaria . Si su respuesta es afirmativa, de un ejemplo.

   (a) Es posible obtener un número real t tal que $\cos t = 1.9$?

   (b) ¿Existe un número real t tal que $\operatorname{sen} t = 0.7$ y $\cos t = 0.3$?

   (c) ¿ Es posible que exista un número real t tal que $\operatorname{sen} t = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ y $\cos t = \frac{2\sqrt{5}}{5}$?

   (d) ¿ Existe algún número real t en el intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $\cos t = \operatorname{sen} t$?

4. ¿Están definidos los siguientes números reales: $\operatorname{sen}(-2)$, $\cos 10$? Justifique su respuesta.

Lección 30

Funciones trigonométricas de números reales II

Continuaremos el estudio de las funciones trigonométricas de números reales. En esta lección utilizaremos la circunferencia trigonométrica como herramienta para determinar el período y la gráfica de la función seno.

Propiedades y gráfica de la función seno

La gráfica de la función $\operatorname{sen} t$, es el conjunto $\{(t, \operatorname{sen} t)/t \in \mathbb{R}\}$.

Para cada número t, consideremos el punto $P(x, y)$ situado en la intersección del lado final del ángulo t y la circunferencia de radio 1. Por las definiciones: $\operatorname{sen} t = \frac{y}{1} = y$ y $\cos t = \frac{x}{1} = x$, entonces reemplazando x por $\cos t$ y y por $\operatorname{sen} t$, las coordenadas de P son $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$. Así, nuestro estudio se va a enfocar en de la variación de las coordenadas de P, cuando t varía.

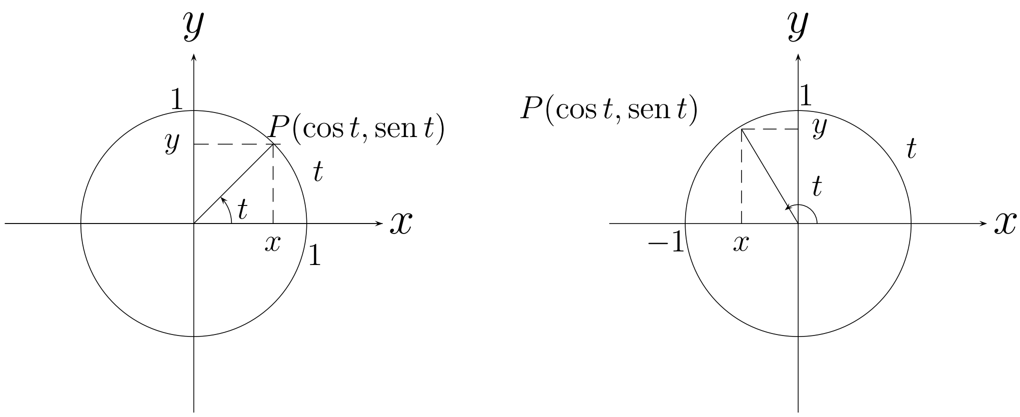


Figura 30.1

Iniciemos nuestro estudio de la gráfica de la función $\operatorname{sen} t$ en $t = 0$ (véase la parte izquierda de la figura 30.1). El punto P está en la intersección entre el eje x positivo y la circunferencia unitaria y sus coordenadas son $(1, 0)$. Así, $\operatorname{sen} 0 = 0$. Si incrementamos el valor de t, desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$, el lado final del ángulo gira en el sentido positivo o sea el sentido contrario a las agujas del reloj y el punto P, se mueve sobre la circunferencia en el primer cuadrante. El valor de $\operatorname{sen} t$, o sea el valor de la ordenada de P, aumenta continuamente hasta obtener el valor 1 en $t = \frac{\pi}{2}$. Esto coincide con lo que ya sabíamos: $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$. En este punto se obtiene el valor máximo para la función $\operatorname{sen} t$.

Cuando t se incrementa desde $t = \frac{\pi}{2}$ hasta $t = \pi$, el punto P continúa su giro sobre la circunferencia en el segundo cuadrante (véase la parte derecha de la figura 30.1). Las ordenadas de P tienen signo positivo y van decreciendo continuamente hasta obtener el valor 0 en $t = \pi$. Confirmamos que $\operatorname{sen} \pi = 0$.

A medida que t se incrementa desde $t = \pi$ hasta $t = \frac{3\pi}{2}$, las ordenadas del punto P están tomando valores negativos y van decreciendo desde 0 hasta llegar a -1; $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$ (véase la parte izquierda de la figura 30.2). Éste es el valor mínimo que puede tomar la ordenada de P y en consecuencia es el valor mínimo de $\operatorname{sen} t$.

Si el valor de t aumenta desde $t = \frac{3\pi}{2}$ hasta $t = 2\pi$, el valor de $\operatorname{sen} t$ se incrementa desde -1 hasta 0 y el punto P termina de dar un giro completo y vuelve a su posición inicial (parte derecha de la figura 30.2)

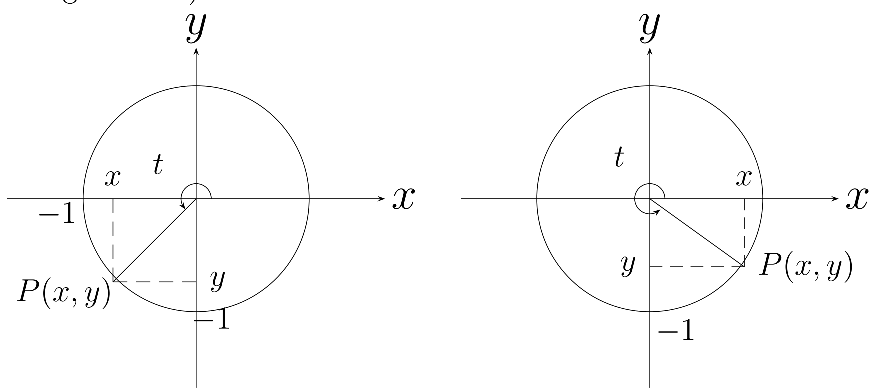


Figura 30.2

Cuando el valor t aumenta desde $t = 2\pi$ hasta $t = 4\pi$, el punto P recorre de nuevo los mismos puntos sobre la circunferencia unitaria y los valores de la función seno se repiten en la misma forma que en el intervalo $[0, 2\pi]$; lo mismo va a continuar sucediendo indefinidamente a medida que t aumenta.

Ahora vamos a hacer el estudio del comportamiento de la función seno cuando t toma valores negativos a partir de $t = 0$. Cuando t toma valores negativos desde $t = 0$ hasta $t = -2\pi$, el punto P se mueve en el sentido de las manecillas del reloj.

La variación del valor de la ordenada de P va en sentido opuesto a la descrita anteriormente para los valores positivos de t. Esto es, el punto P empieza el giro recorriendo el cuarto cuadrante y al aproximarse t a -$\frac{\pi}{2}$, la ordenada de P, disminuye continuamente hasta tomar el valor -1. Esto lo podemos también ver en la figura 30.3.

A medida que el valor de t disminuye hacia $-\pi$, el punto P pasa al tercer cuadrante y su ordenada va aumentando hasta tomar el valor cero. A medida que t varía hacia -$\frac{3\pi}{2}$, sigue el punto P su recorrido por el segundo cuadrante y su ordenada va aumentando hasta tomar el valor 1. A medida que t llega a -2π, el punto P pasa al primer cuadrante y su ordenada decrece hasta cero.

El punto P va a continuar realizando su movimiento sobre la circunferencia en el sentido negativo. Cuando t toma valores en intervalos de tamaño 2π, el punto P da un giro completo y $\operatorname{sen} t$ toma exactamente los mismos valores. Si con el número entero n representamos el número de giros y su sentido (positivo o negativo), podemos afirmar que

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen}(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{Z}. \tag{30.1}$$

La igualdad (30.1) significa que la función seno es periódica. El menor real positivo tal que

$$\operatorname{sen}(t + p) = \operatorname{sen}(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

es $p = 2\pi$.

La descripción que hemos hecho nos permite describir las siguientes propiedades de la función seno:

- El rango de la función seno es el intervalo cerrado [-1,1].
- El período de la función seno es 2π.
- La función seno es impar, $\operatorname{sen}(-t)$ = - $\operatorname{sen} t$.

Gráfica de la función seno

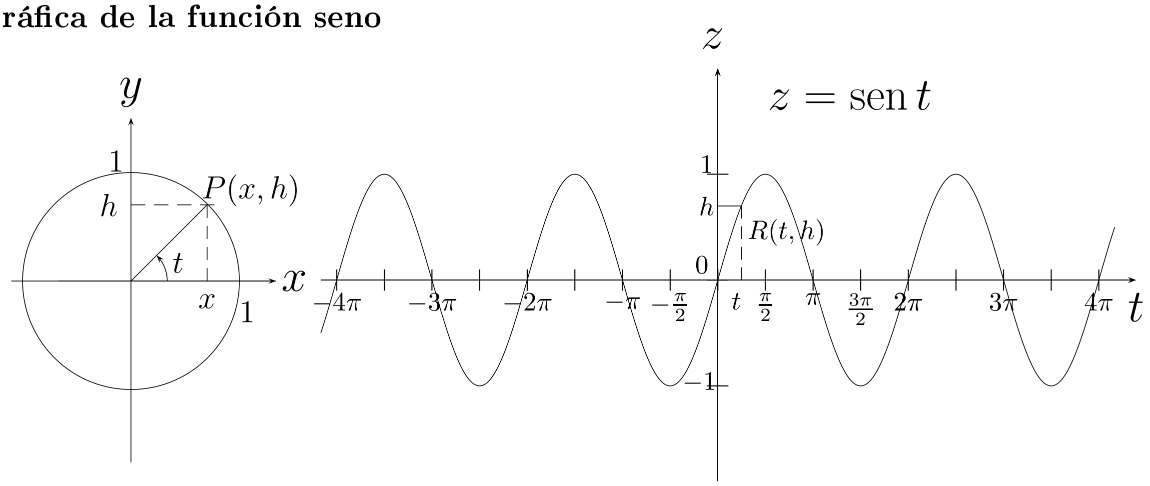


Figura 30.3

Para trazar la gráfica de la función $z = \operatorname{sen} t$, en un plano cartesiano, utilizamos el eje horizontal para los valores de la variable independiente t y el eje vertical para la variable dependiente z. En la parte derecha de la figura 30.3 aparece la gráfica de la función seno correspondiente a valores de la variable independiente t en el intervalo cerrado $[-4\pi, 4\pi]$.

Dado un punto $R(t, z)$ en la gráfica de la función seno, la abscisa t representa al ángulo en posición canónica medido en radianes y la ordenada de R es $\operatorname{sen} t$. Por ejemplo si $t = 0$, o si $t = \pi$ la ordenada del punto R es cero. Mientras que si $t = \frac{3\pi}{2}$, la ordenada de R es igual a -1. En general si tenemos un punto P en la circunferencia trigonométrica con ordenada igual a h correspondiente a un valor t del ángulo, a ese valor de t en la gráfica de la función seno corresponde un punto cuya ordenada es $z = h$ (véase la figura 30.3).

La sección de la gráfica en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ recibe el nombre de ***ciclo fundamental de la función seno***. Por la periodicidad de la función seno, el ciclo fundamental se repite a lo largo de la recta real en intervalos de longitud 2π.

Recordemos que la función seno es impar lo que significa que $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t)$. Por lo anterior esta gráfica es simétrica con respecto al origen.

La observación de la gráfica de la función seno nos permite conocer muchas de sus propiedades, como lo veremos en los ejemplos 30.1, 30.2 y 30.3 y en el ejercicio **??**.

Ejemplo 30.1

¿Existen números reales t para los cuales $\operatorname{sen} t = -1.2$?

Solución
El mínimo valor que puede tomar el seno de un número es -1. Como $-1.2 < -1$, no existe tal número.

Ejemplo 30.2

Encuentre todos los números reales t, en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ para los cuales $\operatorname{sen} t = 1$.

Solución
Observamos que los números t que satisfacen la igualdad $\operatorname{sen} t = 1$ están en la intersección de la gráfica de la función $z = \operatorname{sen} t$ y sobre una recta horizontal en el plano tz, paralela al eje t, arriba de dicho eje y a una distancia de una unidad. Todos los puntos de dicha recta horizontal se caracterizan por tener la coordenada z igual a 1. Por esta razón una ecuación que caracteriza los puntos de esta recta es $z = 1$. Estos valores de t son $t = -\frac{3\pi}{2}$ y $t = \frac{\pi}{2}$. Observe la figura 30.4

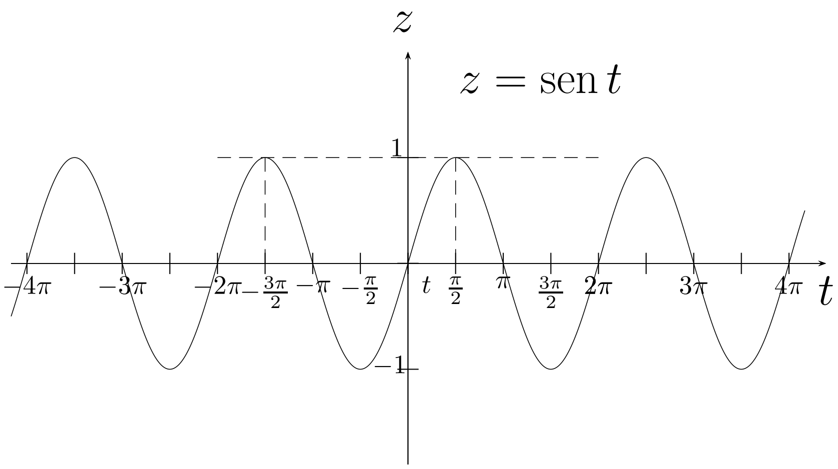


Figura 30.4

Ejemplo 30.3

¿Para cuántos números reales t en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$, $\operatorname{sen} t = \frac{1}{3}$?

Solución
Para dos valores de t. En la gráfica de la función seno observamos que en el intervalo

cerrado $[-\pi, 2\pi]$ solamente hay valores positivos para la función seno en el intervalo $(0, \pi)$. En este intervalo hay dos valores de t para los cuales $\operatorname{sen} t = \frac{1}{3}$.

Ejercicios

Responda las siguientes preguntas, con la ayuda de la figura 30.3.

1. ¿Puede existir un número real t, tal que $\operatorname{sen} t < -1$?
2. ¿Cuántas veces se repite el ciclo fundamental en la gráfica de la figura 30.3?
3. En el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$, ¿cuántas veces toma la función $\operatorname{sen} t$ su máximo valor?
4. ¿Para cuáles valores de t en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ se verifica que $\operatorname{sen} t = 0$?
5. Escriba los subintervalos del intervalo $[-5\pi, 5\pi]$ en los cuales la función $\operatorname{sen} t$ es positiva.
6. (a) Determine para cuantos números reales t se verifica la igualdad $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

   (b) Conociendo que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, halle los valores de t en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ para los cuales $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$.

Lección 31

Funciones trigonométricas de números reales III.

En esta lección continuamos el estudio de las funciones trigonométricas en el conjunto de los números reales. Aquí se utiliza un método similar al de la lección anterior para estudiar la función coseno.

Propiedades y gráfica de la función coseno

Sea t un número real. Tomemos un punto $P(x, y)$ en la intersección del lado final del ángulo t y la circunferencia unitaria, (circunferencia de radio 1). Por definición $\cos t = \dfrac{x}{1} = x$ y $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{1} = y$. Así, la abscisa del punto P es $\cos t$. La variación de la abscisa del punto P sobre la circunferencia unitaria nos indica que el rango de la función coseno, que denotamos por R_{cos}, está dado por

$$R_{cos} = [-1, 1].$$

Ahora estudiemos la gráfica de la función coseno. Vamos a realizar un análisis que nos permita comprender la variación de la función coseno a medida que la variable independiente t cambia.

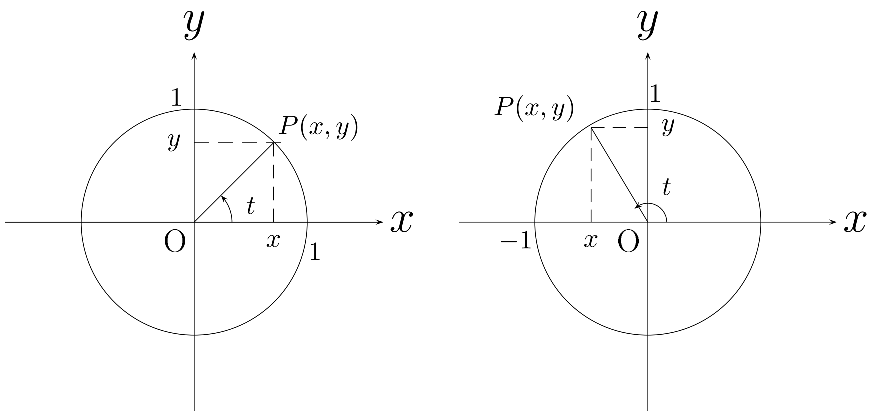


Figura 31.1

Dado un valor de t, tengamos presente que la abscisa del punto P es igual a $\cos t$. A medida que t aumenta desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$, el punto P se mueve sobre la circunferencia, en el sentido contrario a las agujas del reloj y la abscisa del punto P disminuye desde $x = 1$

hasta $x = 0$. Véase la parte izquierda de la figura 31.1. También es interesante ir mirando simultáneamente la representación de las función coseno en la figura 31.3.

Cuando la variable real t varía desde $t = \frac{\pi}{2}$ hasta $t = \pi$, el punto P se mueve sobre la circunferencia en el segundo cuadrante, rotando en sentido positivo, la abscisa es negativa y a medida que t se acerca a π la abscisa de P disminuye hasta tomar el valor -1; véase la parte derecha de la figura 31.1.

Cuando t se incrementa desde $t = \pi$ hasta $t = \frac{3\pi}{2}$, P está en el tercer cuadrante, su abscisa sigue siendo negativa, y va aumentando hasta tomar el valor cero en $t = \frac{3\pi}{2}$. Véase la parte izquierda de la figura 31.2. Observe también la gráfica de la función coseno en la figura 31.3.

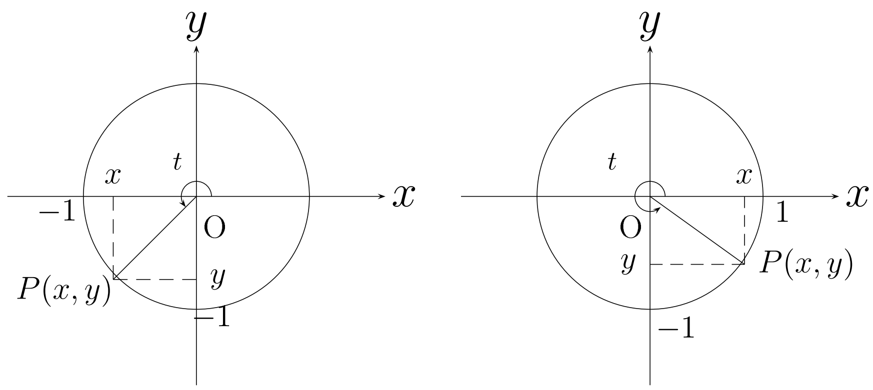


Figura 31.2

Cuando t se incrementa desde $\frac{3\pi}{2}$ hasta 2π, P hace el recorrido por el cuarto cuadrante, la abscisa es positiva y va aumentando hasta tomar el valor 1 en 2π; el punto ha vuelto a su posición inicial $P(1, 0)$. Es decir, $\cos 2\pi = \cos 0$. Si continuamos incrementado el valor de t desde 2π, observamos que en intervalos de tamaño 2π el correspondiente punto P vuelve a recorrer la circunferencia unitaria en la misma forma que lo hizo en el intervalo anterior. La función coseno vuelve a repetirse en la misma forma, indefinidamente.

Si t varía desde 0 hasta -2π, el punto realiza su trayectoria en sentido negativo, sin embargo las abscisas van tomando los mismos valores del recorrido que ha realizado en el sentido positivo. Cuando t disminuye desde 0 hasta $-\frac{\pi}{2}$ la abscisa del punto P varía igual que cuando t aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Sucede lo mismo en los recorridos por los otros cuadrantes, las abscisas cambian en la misma forma en que lo hacen cuando el punto ha girado en sentido positivo. En intervalos de tamaño 2π la función coseno repite sus valores.

Observe de nuevo la figura 31.3. Los valores de coseno varían simétricamente respecto a $t = 0$. Esto es lo que sucede cuando una función es par. Compare con la gráfica de la función seno en la figura 30.3, en la página 127, la cual es impar.

Cuando t toma valores en intervalos de tamaño 2π, el punto da un giro completo y $\cos t$ toma exactamente los mismos valores. Si con el número entero n representamos el número de giros y su sentido (positivo o negativo), podemos afirmar que

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{Z}. \tag{31.1}$$

La igualdad (31.1) significa que la función coseno es periódica. El menor número real positivo p tal que $\cos(t+p) = \cos t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es $p = 2\pi$.

En relación con la función coseno tenemos las siguientes conclusiones:

- El rango de la función coseno es el intervalo cerrado [-1,1].
- El período de la función coseno es 2π.
- La función coseno es par, $\cos(-t) = \cos t$.

Gráfica de la función coseno

Veamos la gráfica correspondiente a la función coseno en el sistema de coordenadas cartesianas tz, correspondiente al intervalo cerrado $[-4\pi, 4\pi]$. Las abscisas representan los ángulos orientados y las ordenadas son los valores tomados por las abscisas del punto P sobre la circunferencia unitaria en las figuras 31.1 y 31.2. Observe por ejemplo que los valores de las abscisas de P para $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, y 2π, son, respectivamente, 1, 0, -1, 0 y 1. Son interesantes también la simetría respecto al eje z y la periodicidad con período 2π.

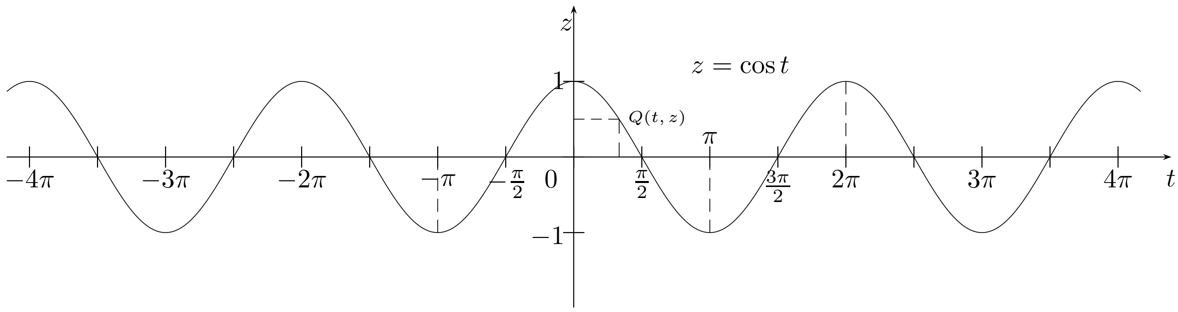


Figura 31.3

La parte de la curva correspondiente al intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ recibe el nombre de ciclo fundamental. Debido a que el período de la función coseno es 2π, el ciclo fundamental de la gráfica se repite en intervalos de longitud 2π, a lo largo del eje horizontal.

Ejemplo 31.1

¿Cuántos números en el intervalo $[-3\pi, \pi]$, tienen el valor de coseno igual a -$\frac{5}{8}$?

Solución
Hay 4 valores de t en el intervalo $[-3\pi, \pi]$ en los cuales coseno es igual a -$\frac{5}{8}$. Observando la figura 31.3 podemos llegar a esta respuesta de varias maneras.

- Si trazamos una recta horizontal, paralela al eje t, debajo del eje t y a una distancia igual a $\frac{5}{8}$, dicha recta corta la gráfica de coseno en cuatro puntos en el intervalo $[-3\pi, \pi]$. Véase la figura 31.4
- El intervalo $[-3\pi, \pi]$ tiene longitud igual a 4π, en ese intervalo la gráfica de coseno puede repetirse 2 veces, pues el período de coseno es 2π. En cada intervalo de

longitud 2π hay dos valores de t para los cuales $\cos t$ puede tomar el valor de $-\frac{5}{8}$. En consecuencia hay cuatro valores de t en dicho intervalo tales que $\cos t = -\frac{5}{8}$.

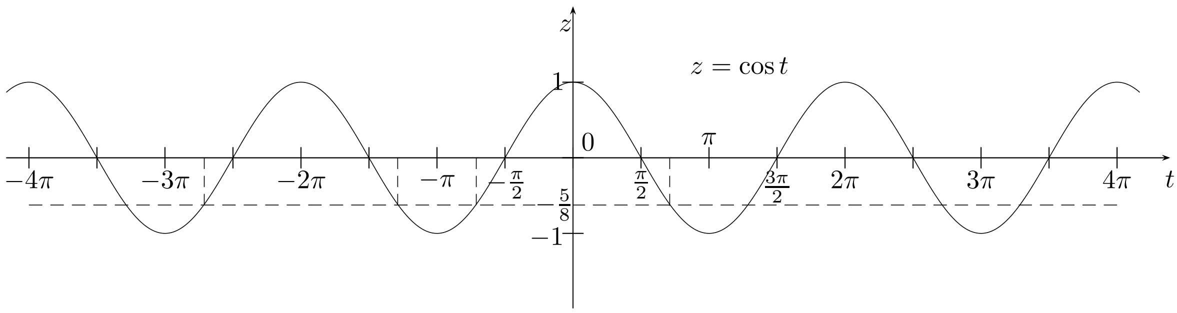


Figura 31.4

Ejemplo 31.2

Encuentre todos los números t en el intervalo $[-2\pi, \frac{3\pi}{2}]$ para los cuales $\cos t = 0$.

Solución
Los números que satisfacen la igualdad son aquellos en los cuales la gráfica de la función coseno corta al eje horizontal. Estos son los valores t de la forma $t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ que pertenecen al intervalo $[-2\pi, \frac{3\pi}{2}]$. Es decir, $t = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Ejemplo 31.3

Encuentre todos los números t en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ para los cuales $\cos t = 1$.

Solución
Los números que satisfacen esta igualdad corresponden a aquellos en los cuales la gráfica de la función coseno corta una recta horizontal a la altura $z = 1$. Estos son todos los t de la forma $t = n\pi$ que pertenecen al intervalo $[-4\pi, 4\pi]$. Esto es:

$$t = -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi.$$

Ejercicios

Responda las siguientes preguntas con la ayuda de la figura 31.3.

1. En el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$, (a) ¿cuántas veces toma la función $\cos t$ su máximo valor y su mínimo valor? (b) Determine estos valores.

2. (a) Determine para cuántos valores de t, $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. (b) Halle estos valores de t.

3. (a) Determine para cuántos valores de t, $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ en el intervalo $[-2\pi, 0]$. (b) Halle estos valores de t.

4. Escriba todos los subintervalos del intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ en los cuales la función $z = \cos t$ sea positiva.

5. (a) ¿ Para cuántos valores de t en el intervalo $[-6\pi, 6\pi]$ $\cos t = 0$? (b) Halle estos valores de t.

6. (a) Determine para cuántos valores de t, $\cos t = \frac{1}{2}$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Sabiendo que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ halle estos valores de t.

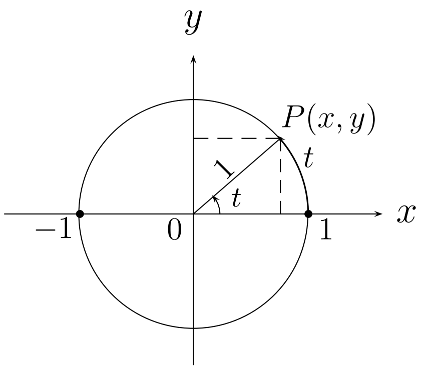
Lección 32

Funciones trigonométricas de números reales IV

En esta lección continuamos con el estudio de las funciones trigonométricas de números reales. Iniciaremos con la determinación del dominio de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante y estableceremos el período de las funciones tangente y cotangente. Finalmente construiremos la gráfica de la función tangente y estudiaremos su rango y sus asíntotas verticales.

Dominio de las funciones tangente y secante, cotangente y cosecante

Sea t un número real. Tomemos el punto $P(x, y)$ en la intersección del lado final del ángulo t y la circunferencia unitaria (véase la figura 32.1). Por las definiciones



$$\tan t = \frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \sec t = \frac{1}{x}, \qquad \text{para } x \neq 0.$$

$$\cot t = \frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \csc t = \frac{1}{y}, \qquad \text{para } y \neq 0.$$

Figura 32.1

Así, del dominio de las funciones $\tan t$ y $\sec t$ se deben excluir los números reales t para los cuales el punto P está sobre el eje y. Estos números reales son los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ y se representan por $t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, para cualquier número entero n.

Si denotamos el dominio de las funciones tangente y secante por D_{tan} y D_{sec}, respectivamente, tenemos que

$$D_{tan} = D_{sec} = \{t \in \mathbb{R}/t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

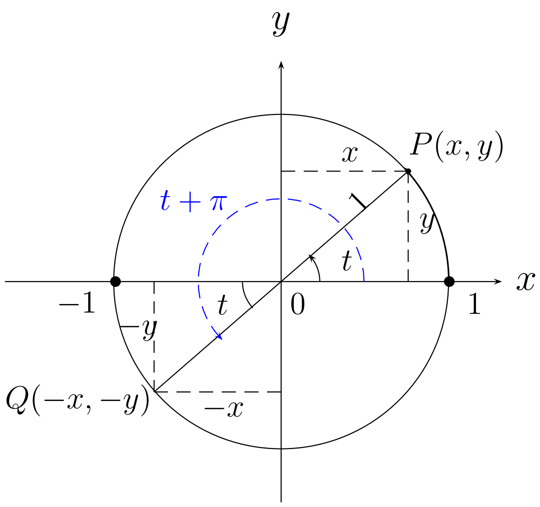
Las funciones $\cot t$ y $\csc t$ no están definidas para los números reales t correspondientes a los ángulos cuyo lado final esté sobre el eje x, debido a que los puntos sobre este eje tienen ordenada igual a 0. Observamos que estos números reales son el resultado de multiplicar un número entero n por π. Si denotamos el dominio de las funciones cotangente y cosecante por D_{cot} y D_{csc}, respectivamente, tenemos que

$$D_{cot} = D_{csc} = \{t \in \mathbb{R}/t \neq n\,\pi, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

Período de las funciones tangente y cotangente

Sabemos que las funciones trigonométricas son periódicas y su período es menor o igual a 2π. En las lecciones 30 y 31 vimos que las funciones seno y coseno tienen efectivamente período 2π. En esta lección veremos que las funciones tangente y cotangente tienen período π.

En la figura 32.2 representamos los ángulos t y $t+\pi$ y los puntos P y Q localizados en la intersección de la circunferencia unitaria y los lados finales de los ángulos t y $t+\pi$, respectivamente.



Si $P(x,y)$ está sobre el lado final del ángulo t, entonces $Q(-x,-y)$ está sobre el lado final del ángulo $t+\pi$, debido a la simetría de la circunferencia. Así,

$$\tan(t+\pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan t,$$

$$\cot(t+\pi) = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot t.$$

Figura 32.2

Concluimos que la funciones tangente y cotangente son periódicas con período π.

En general podemos escribir:

$$\tan(t+k\pi) = \tan t, \quad \text{para todo } t \in D_{tan} \text{ y para todo entero } \ k,$$

$$\cot(t+k\pi) = \cot t, \quad \text{para todo } t \in D_{cot} \text{ y para todo entero } \ k.$$

Propiedades y gráfica de la función tangente

Para la representación gráfica de la función tangente vamos a utilizar nuevamente la circunferencia unitaria. Tendremos en cuenta las siguientes propiedades:

- La función tangente es impar:

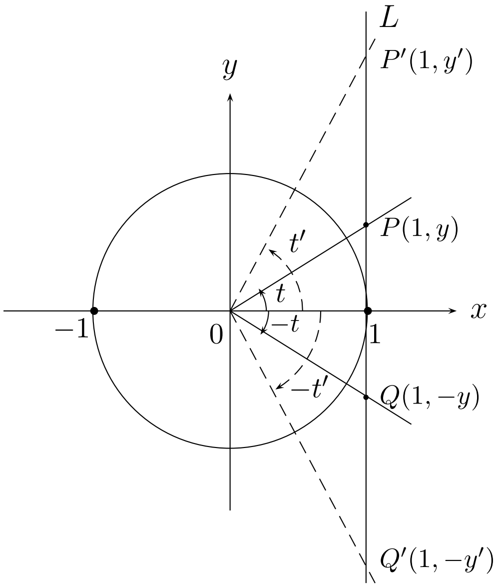
$$\tan(-t) = -\tan t \text{ para todo número real } \ t \in D_{tan}. \tag{32.1}$$

- Como la función tangente tiene período π es suficiente considerar los ángulos en el primer y el segundo cuadrante o en el primer y el cuarto cuadrante.

La igualdad (32.1) simplica la construcción de la gráfica. Consideramos los números reales t en el intervalo semiabierto $[0, \frac{\pi}{2})$ y estudiaremos los valores que toman $\tan t$ y $(-\tan t)$. Estos últimos por (32.1) corresponden a $\tan(-t)$; es decir a la tangente de los ángulos en el cuarto cuadrante. Observe que cuando t varía desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$, el valor $-t$ varía desde 0 hasta $-\frac{\pi}{2}$.

En la figura 32.3 se representan el ángulo t y la circunferencia unitaria. Recordemos que para definir $\tan t$ podemos seleccionar cualquier punto en el lado final del ángulo t. Para analizar el valor de $\tan t$ tomamos como punto de referencia el punto P, que es la intersección del lado final del ángulo t y la recta vertical, tangente a la circunferencia en el punto de coordenadas $(1, 0)$, denotada por L en la figura 32.3.

Como $\tan t = \frac{y}{1} = y$, el valor de la ordenada de P es igual a $\tan t$ y la ordenada de Q, $-y$, representa el valor de $-\tan t = \tan(-t)$. Vamos a analizar la variación de la función $\tan t$ como la variación de las ordenadas de los puntos P y Q.



$$\tan t = \frac{y}{1} = y,$$

$$\tan(-t) = -\frac{y}{1} = -y.$$

Figura 32.3

A medida que t aumenta desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, el punto P se desplaza sobre la recta L desde el punto de coordenadas (1,0), hacia arriba. Entonces $\tan t$ aumenta rápidamente a partir de $\tan 0 = 0$ y crece indefinidamente cuando t se acerca a $\dfrac{\pi}{2}$. Al mismo tiempo la ordenada de Q varía desde 0 y decrece continuamente a medida que t aumenta, (ó $-t$ disminuye), decreciendo sin límite cuando el ángulo $-t$ se acerca a $-\frac{\pi}{2}$.

Cuando $t = \frac{\pi}{2}$ el lado final del ángulo t está sobre el eje y y no corta a la recta tangente L, pues son rectas paralelas. Recordemos que $t = \frac{\pi}{2}$ no está en el dominio de la función tangente.

En la tabla 32.1 vemos la forma como aumentan los valores de $\tan t$ para números reales cercanos a $\frac{\pi}{2}$.

t	1	1.5	1.55	1.57
$\tan t$	1.6	14.1	48.1	1255.8

Tabla 32.1

Para trazar la gráfica de la función $z = \tan t$, en el plano cartesiano tz, utilizamos el eje horizontal para los valores de la variable independiente t y el eje vertical para sus imágenes. En la figura 32.4 aparece la gráfica de la función tangente correspondiente al intervalo abierto $(-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2})$.

La gráfica de la funcion en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es el ***ciclo fundamental de la función tangente***. Para obtener la gráfica de la función en intervalos mayores repetimos el ciclo fundamental a lo largo del eje horizontal, a la derecha y a la izquierda del intervalo $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, en intervalos de longitud π.

Debido a que la función tangente es una función impar, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.

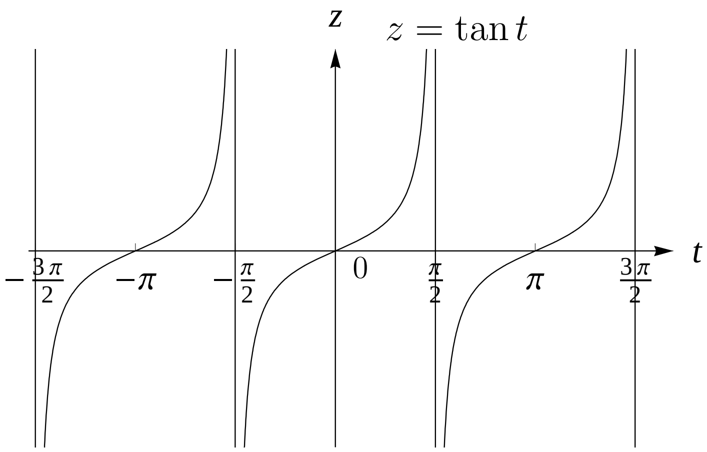


Figura 32.4

En la gráfica se observan rectas verticales en los puntos de la forma $t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$. Estas rectas, que son llamadas ***asíntotas verticales***, nunca cortan la gráfica de la función tangente.

Para simbolizar el hecho de que las imágenes de la función $\tan t$ crecen sin límite cuando t toma valores cada vez más cercanos a $\frac{\pi}{2}$, pero menores que $\frac{\pi}{2}$, escribimos la expresión

$$\tan t \to +\infty \quad \text{cuando} \quad t \to \frac{\pi}{2}^{-}. \tag{32.2}$$

La expresión en (32.2) se lee "$\tan t$ tiende a más infinito cuando t tiende a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda".

Por otra parte para representar el decrecimiento sin límite de la función tangente cuando tomamos valores cada vez más cercanos a $-\frac{\pi}{2}$, pero mayores que -$\frac{\pi}{2}$, escribimos la expresión

$$\tan t \to -\infty \quad \text{cuando} \quad t \to -\frac{\pi}{2}^{+}, \tag{32.3}$$

que se lee "$\tan t$ tiende a menos infinito cuando t tiende a $\frac{\pi}{2}$ por la derecha".

Gráficamente se puede encontrar el rango de una función haciendo una proyección de la gráfica de la función en un sistema de coordenadas rectangulares sobre el eje de las variables dependientes. Los puntos obtenidos a partir de esta proyección constituyen su rango. Recordemos que para proyectar un punto sobre una recta se traza la perpendicular desde el punto a la recta.

Si realizamos el anterior procedimiento en el caso de la función tangente, vemos que se cubre todo el eje vertical, esto nos dice que el rango de la función tangente es el conjunto de los números reales.

Ejemplo 32.1

Encuentre todos los números en el intervalo $(-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2})$ cuya tangente sea igual a 1.

Solución

Sabemos que un número real conocido, cuya tangente es igual a 1, es $t_1 = \frac{\pi}{4}$. Teniendo en cuenta que la función tangente tiene período π, obtenemos también los números

$$t_2 = t_1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4},$$

y

$$t_3 = t_1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Observamos la gráfica y notamos que en el intervalo dado no puede haber más números reales cuya tangente sea igual a 1, ya que allí sólo hay tres ramas de la función tangente. En resumen tenemos tres puntos en el intervalo $(-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2})$ que satisfacen la condición requerida. Estos puntos son: $t_1 = \dfrac{\pi}{4}, t_2 = \dfrac{5\pi}{4}$ y $t_3 = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Ejemplo 32.2

Encuentre todos los números en el intervalo $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2})$ cuya tangente sea igual a -13.5.

Solución

Si usamos la calculadora obtenemos que $t_1 \approx -1.5$ es un valor en el intervalo abierto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para el cual la tangente es igual a -13.5. Un segundo número en el intervalo dado con esta propiedad es:

$$t_2 = t_1 + \pi \approx -1.5 + \pi \approx 1.6.$$

Observamos la gráfica y notamos que en el intervalo dado no puede haber más números cuya tangente valga -13.5, ya que allí sólo hay dos ramas de la curva de la función tangente.

Respuesta: $t_1 \approx -1.5$ y $t_2 \approx 1.6$.

Ejercicios

1. Encuentre los números reales en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ para los cuales su tangente sea igual a -1.
2. Encuentre los números reales en el intervalo abierto $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ para los cuales su tangente sea igual a 1.
3. ¿Cuántos números en el intervalo abierto $\left(-\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ tienen tangente igual a:

   (a)$\sqrt{3}$? (b) $-\sqrt{3}$? (c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$? (d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$?
4. Halle los valores en el ejercicio 3.
5. Explique qué significa la expresión
$$\tan t \to +\infty \quad \text{cuando} \quad t \to \frac{3\pi}{2}^{-}.$$
6. Explique qué significa la expresión
$$\tan t \to +\infty \quad \text{cuando} \quad t \to -\frac{3\pi}{2}^{-}.$$
7. Determine para cuales de los siguientes números reales: $t_1 = \pi, t_2 = \frac{-5\pi}{2}$ y $t_3 = -15\pi$ está definida la función $\tan t$.
8. Determine para cuales de los siguientes números reales : $t_1 = 0, t_2 = \frac{3\pi}{2}$ y $t_3 = -2\pi$ están definidas la funciones $\sec t$ y $\cos t$.

Lección 33

Funciones trigonométricas de números reales V

En esta lección analizaremos las principales propiedades de la función cotangente y construiremos su gráfica. Para ello tendremos en cuenta las principales propiedades de la función tangente y la relación recíproca $\cot t = \frac{1}{\tan t}$.

Propiedades y gráfica de la función cotangente

En la lección 32 estudiamos el dominio y el período de la función cotangente y obtuvimos que el dominio de la función cotangente es

$$D_{cot} = \{t \in \mathbb{R}/t \neq n\,\pi, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

y que el período de esta función, al igual que el período de la función tangente, es π.

Las funciones $z = \cot t$ y $z = \tan t$ satisfacen la relación recíproca

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}. \tag{33.1}$$

En la figura 33.1 se representa la gráfica de la función $z = \cot t$ en el plano tz y en líneas punteadas se representa también la gráfica de la función $z = \tan t$. Se ha utilizado la relación (33.1) para calcular las ordenadas z de la gráfica de la función $z = \cot t$ como las recíprocas de las ordenadas z de la gráfica de la función $z = \tan t$.

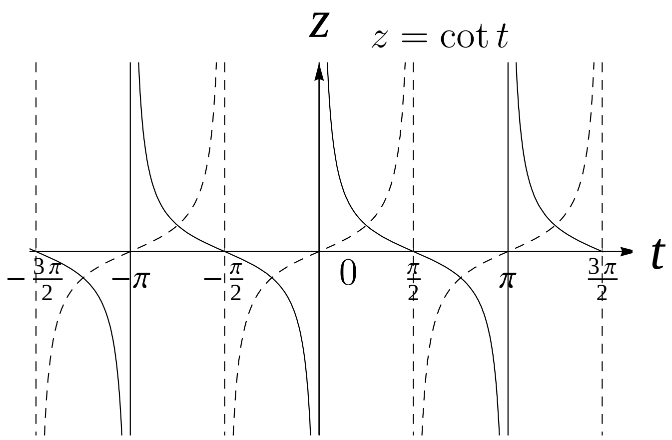


Figura 33.1

La gráfica de la función cotangente en el intervalo $(0, \pi)$ recibe el nombre de ***ciclo fundamental de la función cotangente***. La gráfica para intervalos más grandes se obtiene repitiendo esta porción de gráfica en intervalos de longitud π, tanto a derecha como a izquierda.

Observe que los signos de las gráficas de las funciones tangente y cotangente coinciden en los respectivos intervalos de la variable independiente. Es decir, la cotangente es positiva en los intervalos donde la tangente es positiva y negativa en los intervalos donde la tangente es negativa.

Para los valores de t, en los cuales la función $\tan t$ es igual a cero, la función cotangente no está definida. Cuando la variable independiente se acerca a estos valores, las imágenes de la función cotangente crecen sin límite o decrecen sin límite de acuerdo con el signo de la función tangente. Las rectas verticales que se han trazado en estos puntos son las asíntotas verticales de la gráfica de la función cotangente.

En el intervalo representado en la figura 33.1, para la gráfica de la función cotangente hay asíntotas verticales en $t = -\pi$, $t = 0$ y $t = \pi$ y para la gráfica de la función tangente hay asíntotas verticales en $t = -\frac{3\pi}{2}$, $t = -\frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{3\pi}{2}$.

La función cotangente es impar ya que:

$$\cot(-t) = \frac{1}{\tan(-t)} = \frac{1}{-\tan t} = -\cot t.$$

Observe la simetría de la gráfica respecto al origen.

Ejemplo 33.1

Determine para cuáles de los siguientes números reales está definida la cotangente: $t_1 = 0, t_2 = \frac{-5\pi}{2}$ y $t_3 = -15\pi$.

Solución
Los números de la forma $n\pi$, para n un número entero, no están en el dominio de la función cotangente. Entonces esta función no está definida para t_1 y t_3.

Ejemplo 33.2

Encuentre todos los números en el intervalo abierto $(-2\pi, 2\pi)$ cuya cotangente sea -20

Solución
En la calculadora o en la tabla trigonométrica tenemos la opción de encontrar valores correspondientes a la tangente. Por la relación de reciprocidad de las funciones tangente y cotangente, buscamos un número t_1 cuya tangente sea $-\frac{1}{20}$, y a partir de éste determinamos los valores de t requeridos.

El número $t_1 \approx -0.05$ es uno de los números reales que cumple la condición pues $-2\pi < t_1 < 2\pi$. Otros valores de t que cumplan la condición deben satisfacer:

$$-2\pi < t < 2\pi \quad \text{y} \quad t = t_1 + n\pi \approx -0.05 + n\pi, \quad \text{para } n \text{ un número entero.}$$

Los reales negativos que satisfacen la condición son:

$$t_2 \approx -0.05 - \pi \;\text{ y }\; t_1 \approx -0.05.$$

Los reales positivos que cumplen la propiedad son:

$$t_3 \approx \pi - 0.05 \ \text{ y } t_4 \approx 2\pi - 0.05.$$

Ejercicios

1. ¿Cuántos subintervalos de longitud un período de la función cotangente hay en el intervalo $\left(-\dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right)$?
2. Encuentre dos números en el intervalo abierto $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right)$ para los cuales su cotangente sea igual a -1.
3. ¿Cuántos números en el intervalo abierto $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$ tienen cotangente igual a $-\sqrt{3}$?
4. Explique como se relaciona el hecho de que la función cotangente es impar con la forma de su gráfica.
5. Obtenga tres números negativos t para los cuales $\tan t = 0$.
6. Obtenga tres números positivos t para los cuales $\cot t = 1$.
7. Obtenga tres números negativos t para los cuales $\tan t = 1$.
8. Obtenga tres números positivos t para los cuales $\cot t = -1$.
9. Puede obtener un número positivo t tal que $\cot t = 0$?
10. En la figura 33.1, explique que sucede con las imágenes de $\cot t$ cuando la variable independiente t se acerca a cero.
11. Explique que significa la expresión

$$\cot t \to +\infty \quad \text{cuando} \quad t \to 0^+.$$

12. Explique que significa la expresión

$$\cot t \to -\infty \quad \text{cuando} \quad t \to 0^-.$$

Lección 34

Funciones trigonométricas de números reales VI

En esta lección estudiaremos las principales propiedades de las funciones secante y cosecante; encontraremos su dominio, haremos un bosquejo de sus gráficas y determinaremos su rango y su período.

Dominio de las funciones secante y cosecante

En la lección 32, estudiamos los dominios de estas dos funciones y determinamos que

$$D_{sec} = \{t \in \mathbb{R}/t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}\},$$

$$D_{csc} = \{t \in \mathbb{R}/t \neq n\ \pi, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}\},$$

donde D_{sec} y D_{csc} denotan el dominio de la función secante y de la función cosecante, respectivamente. El conjunto D_{sec}, excluye los valores en los cuales $\cos t = 0$ y D_{csc} excluye aquellos valores de t en los cuales $\operatorname{sen} t = 0$.

Para analizar algunas propiedades de las funciones secante y cosecante utilizamos las relaciones recíprocas

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}, \tag{34.1}$$

y

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}. \tag{34.2}$$

Como la función coseno es par también la función secante es par:

$$\sec(-t) = \frac{1}{\cos(-t)} = \frac{1}{\cos t} = \sec t.$$

La función cosecante es impar:

$$\csc(-t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-t)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} t} = -\frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\csc t.$$

Gráfica de la función secante

Usamos la relación recíproca (34.1) para construir la gráfica de la función $z = \sec t$ tomando los valores recíprocos de las ordenadas z en la gráfica de la función $z = \cos t$.

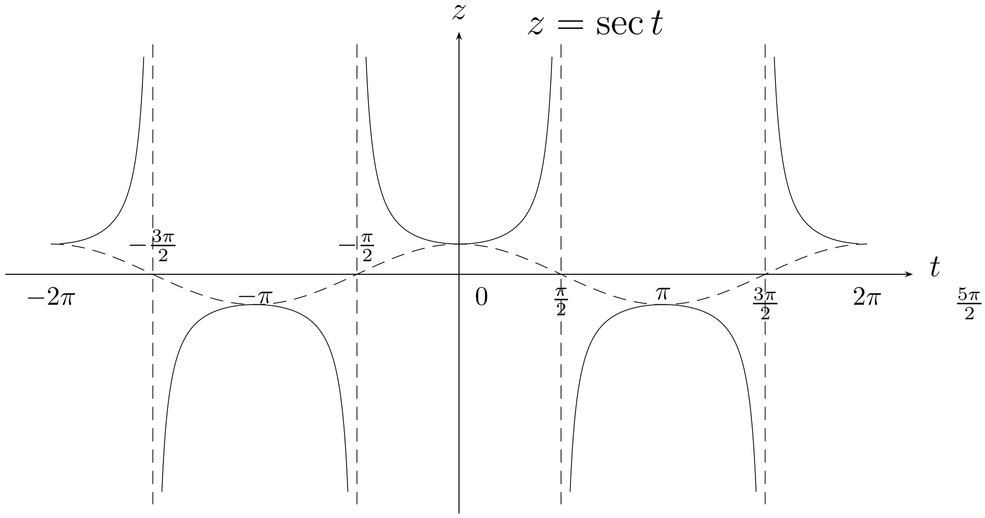


Figura 34.1

En la figura 34.1 se representa la gráfica de la función $z = \sec t$ en el plano tz y en líneas punteadas hemos representado también la gráfica de la función $z = \cos t$.

Observe que los signos de ambas gráficas coinciden en los respectivos intervalos de la variable independiente t. Note también que para los valores de t en los cuales la función $\cos t$ es igual a cero, la función secante no está definida; éstos son los números reales de la forma $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, con n entero. Cuando la variable independiente t se aproxima a estos números, su imagen $\sec t$ crece sin límite o decrece sin límite de acuerdo con el signo de la función coseno. Observe las rectas verticales que se han trazado en estos puntos. La gráfica de la función secante nunca las corta. Estas rectas, que se conocen como asíntotas verticales, separan la ramas de la gráfica para los diferentes intervalos.

Gráficamente se puede encontrar el rango de esta función, haciendo una proyección de su gráfica sobre el eje vertical. Los puntos obtenidos a partir de esta proyección constituyen su rango denotado por R_{sec}:

$$R_{sec} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

En la figura 34.1 puede observarse que el período de la función $z = \sec t$ es 2π.

Gráfica de la función cosecante

Usamos la relación recíproca (34.2) para construir la gráfica de la función $z = \csc t$ tomando los valores recíprocos de las ordenadas z en la gráfica de la función $z = \operatorname{sen} t$.

Se encuentra para cada abscisa t el valor de $\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$. Tengamos en cuenta que para los valores de t tales que $\operatorname{sen} t = 0$, la función cosecante no está definida y en esos puntos se tienen asíntotas verticales. Éstos son los números reales de la forma $t = n\,\pi$, donde n es un número entero. Cuando la variable independiente t se acerca a estos valores, sus imágenes crecen sin límite o decrecen sin límite de acuerdo con el signo de la función seno. Observamos que la función cosecante es periódica con período 2π y su rango R_{csc} es:

$$R_{csc} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

En la figura 34.2 aparece la gráfica de la función $z = \csc t$ en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$. Como la función cosecante tiene período 2π, en el intervalo $(-\pi, \pi)$, que tiene longitud 2π, tenemos una representación de todos los valores tomados por la función. Para representar esta función en intervalos mayores, podemos repetir este fragmento de gráfica en el intervalo requerido.

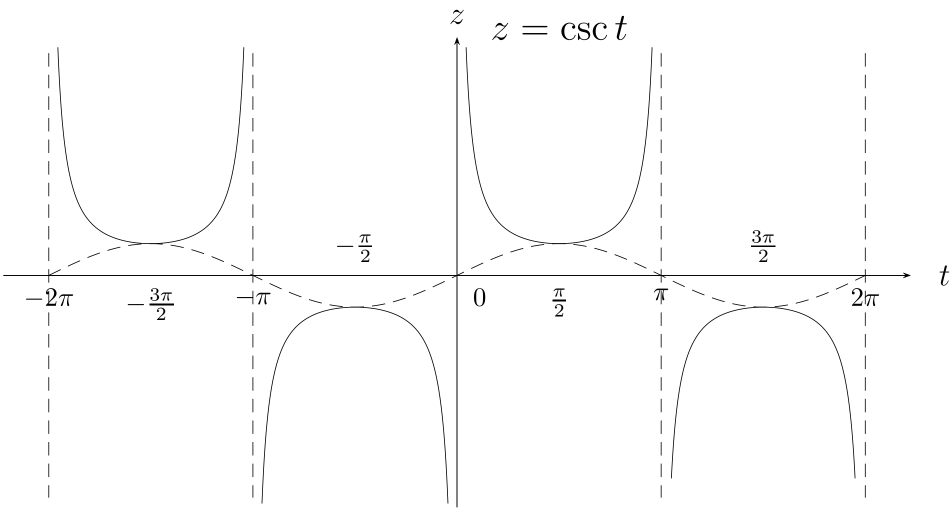


Figura 34.2

Ejemplo 34.1

¿Para cuáles de los siguientes números reales $t = 0, 7\pi, -\frac{5\pi}{2}$, y $\frac{21\pi}{2}$ no están definidas $\sec t$ y $\csc t$?

Solución

En el dominio de la función secante no están los números reales que se pueden expresar como $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ para n un número entero. Por lo tanto la función $\sec t$ no está definida para $t = -\frac{5\pi}{2}$, ni para $t = \frac{21\pi}{2}$.

En el dominio de la función cosecante no están los números reales que se pueden expresar como $n\pi$ para n un número entero. Por lo tanto la función $\csc t$ no está definida para $t = 0$, ni para $t = 7\pi$.

Ejercicios

1. Haga un bosquejo de la gráfica de la función secante en el intervalo abierto $(-3\pi, 3\pi)$.
2. Haga un bosquejo de la gráfica de la función cosecante en el intervalo abierto $(-4\pi, 4\pi)$.
3. Encuentre un número real positivo que no esté en el rango de la función $\sec t$.
4. Encuentre dos números reales negativos t para los cuales $\sec t = \sqrt{2}$.
5. Explique cómo ubicar las asíntotas verticales de las gráficas de las funciones $z = \sec t$ y $z = \csc t$, usando los valores de t tales que $\cos t = 0$ y $\operatorname{sen} t = 0$.
6. Encuentre tres valores de t para los cuales $\sec t = -1$.
7. Encuentre tres números reales t para los cuales $\csc t = -1$.
8. Encuentre tres números reales negativos t para los cuales $\csc t = 1$.
9. Explique por qué el mínimo valor positivo que toma la función $\csc t$ es 1.
10. Encuentre tres números reales positivos t para los cuales $\sec t = 2$.
11. Explique cómo se obtiene la gráfica de $z = \sec t$ conociendo la gráfica de $z = \cos t$.
12. Explique un método para encontrar gráficamente un valor de t en el cual $\csc t = 2$.
13. Para cuáles números reales t tales que $-3\pi \leq t \leq 3\pi$ no están definidas las siguientes funciones:
    (a) $\cos t$, (b) $\tan t$, (c) $\sec t$, (d) $\csc t$.

Lección 35

Gráficas y aplicaciones de las funciones sinusoidales I

En las próximas tres lecciones estudiaremos diversas funciones conocidas como funciones sinusoidales que se obtienen por transformaciones de las funciones seno y coseno. Su forma general es $y = a\,\text{sen}(bx + c) + d$ ó $y = a\cos(bx + c) + d$, donde a, b, c y d son números reales constantes. Estas funciones se utilizan en la descripción de problemas que siguen un modelo de movimiento periódico y en fenómenos del mundo real que involucran situaciones que se repiten por ciclos. Estas aplicaciones aparecen en diferentes disciplinas como la química, en todas las ramas de la ingeniería, la medicina, la farmacología y la sismología, entre otras.

En esta lección realizaremos nuestro estudio por etapas, introduciendo en cada una de ellas nuevos elementos; aprovechando las propiedades conocidas de las funciones seno y coseno, haremos la representación gráfica de las funciones sinusoidales y, recíprocamente, conociendo sus gráficas, identificaremos sus propiedades y características particulares. Inicialmente trabajaremos con las operaciones que generan estiramiento o compresión a lo largo del eje vertical y reflexiones con respecto al eje coordenado horizontal de un sistema de coordenadas cartesianas.

Dilatación y compresión de las gráficas de las funciones trigonométricas

Amplitud

Dada una función sinusoidal y=f(x), la ***amplitud*** de f denotada por A se define como

$$A = \frac{1}{2}\,(\text{máximo de } f(x) - \text{ mínimo de } f(x)).$$

Ejemplo 35.1

La amplitud de las funciones $y = \text{sen}\,x$ y $y = \cos x$ es igual a 1, debido a que el valor máximo que toman estas funciones 1 y su mínimo valor es -1. Así, $A = \frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$.

Veamos la variación que sufre la amplitud de estas funciones al multiplicarlas por un factor a. Sabemos que

$$-1 \leq \text{sen}\,x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos x \leq 1. \tag{35.1}$$

Si $a > 0$, al multiplicar por a las desigualdades en (35.1) obtenemos

$$-a \leq a \operatorname{sen} x \leq a \quad \text{y} \quad -a \leq a \cos x \leq a$$

Por lo tanto el valor máximo que toman las funciones $a \ \operatorname{sen} x$ y $a \cos x$ es a y el valor mínimo es $-a$ y la amplitud es $A = a$.

Ejemplo 35.2

1. La amplitud de $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ es $\frac{1}{2}$.
2. La amplitud de $y = \frac{2}{3} \cos x$ es $\frac{2}{3}$.

Si $a < 0$, debemos tener en cuenta que al multiplicar los términos de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido; así multiplicando todos los términos de las desigualdades en (35.1) por a obtenemos

$$-a \geq a \operatorname{sen} x \geq a \quad \text{y} \quad -a \geq a \cos x \geq a.$$

Es decir

$$a \leq a \operatorname{sen} x \leq -a \quad \text{y} \quad a \leq a \cos x \leq -a.$$

La amplitud es $A = \frac{1}{2}(-a - a) = -a$

En resumen, la amplitud de las funciones definidas por $y = a \operatorname{sen} x$ y $y = a \cos x$ es $|a|$.

Ejemplo 35.3

1. La función definida por $y = -7 \operatorname{sen} x$ tiene como amplitud $|-7| = 7$.
2. $y = -\sqrt{3} \cos x$ tiene como amplitud $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

Dilatación y compresión vertical de las gráficas

Observemos que las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función $y = af(x)$ son las ordenadas de los puntos P de la gráfica de la función $y = f(x)$ multiplicadas por a, mientras que las abscisas de P no sufren ninguna modificación.

Supongamos que $a > 0$:

- Si $a > 1$ la gráfica de $y = af(x)$ muestra ***una dilatación*** o ***alargamiento*** en el sentido vertical en una proporción de a unidades, con respecto a la gráfica de $y = f(x)$.
- Si $0 < a < 1$ la gráfica de $y = af(x)$ presenta una ***compresión*** en el sentido vertical en una proporción de a unidades con respecto a la gráfica de $y = f(x)$.

Ejemplo 35.4

1. En la figura 35.1 se representan las gráficas de las funciones definidas por $y = 2 \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} x$. Observamos que las ordenadas están multiplicadas por 2 y no hay cambios en las abscisas. La amplitud de la función definida por $y = 2 \operatorname{sen} x$ es 2.

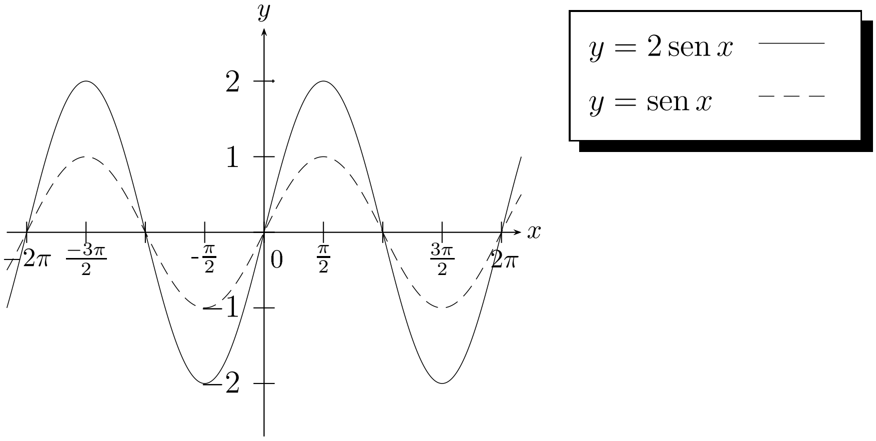


Figura 35.1

2. Gráfica de la función definida por $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$.

Solución
Para obtener la gráfica, observamos que las ordenadas están multiplicadas por $\frac{1}{2}$ y no hay cambios en las abscisas. La amplitud es $\frac{1}{2}$. Véase la figura 35.2.

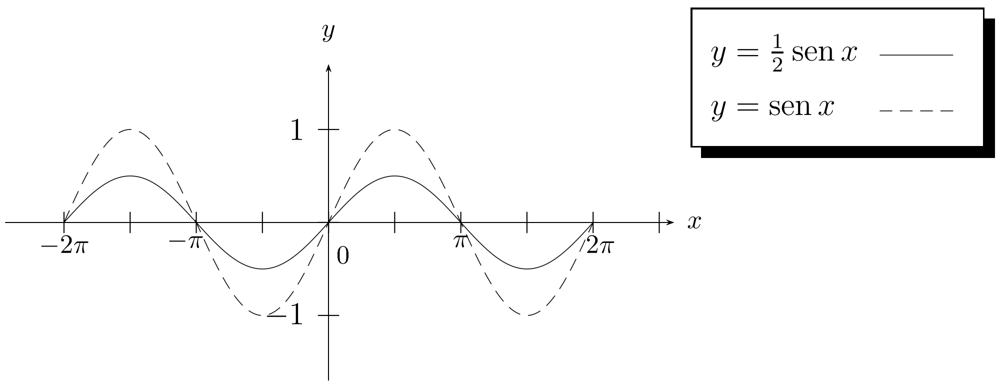


Figura 35.2

Reflexión con respecto al eje horizontal

Si el número a por el cual se multiplica la función f es negativo, se obtiene ***una reflexión*** con respecto al eje de las abscisas, debido a que las ordenadas de los puntos de la gráfica quedan multiplicadas por un número negativo.

- Si $a < -1$, la gráfica se amplía en el sentido vertical en una proporción de $|a|$ unidades y se ***refleja con respecto al eje horizontal***.

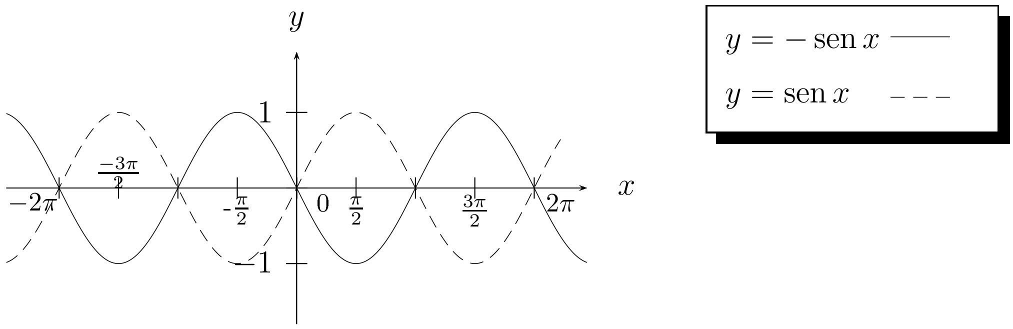


Figura 35.3

- Si $0 > a > -1$, la gráfica se contrae en el sentido vertical en una proporción de $|a|$ unidades y se refleja con respecto al eje horizontal.

Ejemplo 35.5

La gráfica de $y = -\operatorname{sen} x$, se representa en la figura 35.3. La amplitud es $|-1| = 1$. En general para $a < 0$ podemos hacer la gráfica, trazando la correspondiente a $|a| \operatorname{sen} t$ y reflejándola respecto al eje horizontal.

Ejemplo 35.6

En la figura 35.4 aparecen las gráficas de la funciones $y = 2 \operatorname{sen} x$ y $y = -2 \operatorname{sen} x$. La segunda es una reflexión de la primera con respecto al eje x.

Solución

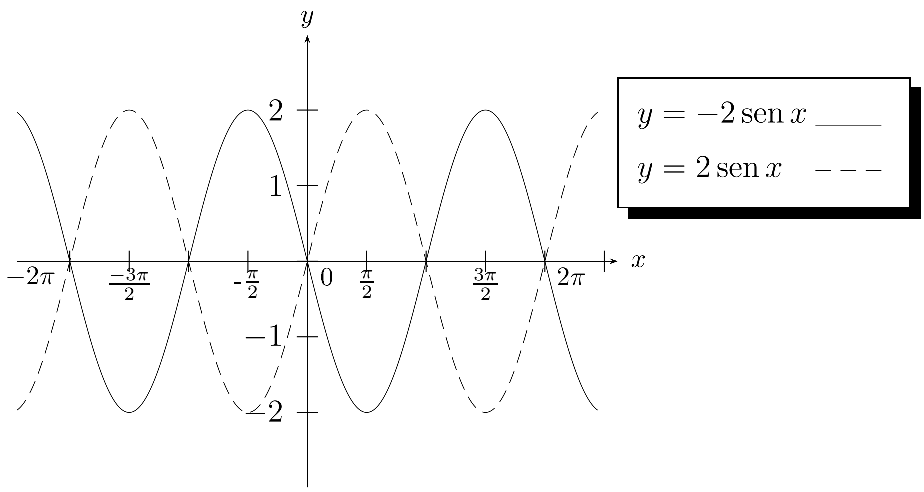


Figura 35.4

Reflexión respecto al eje vertical

Si una función f está definida por $y = f(x)$, la gráfica que se obtiene al reflejar la gráfica de f con respecto al eje vertical es la gráfica de la función $y = f(-x)$.

Recordemos las siguientes igualdades que se deben a la paridad de las funciones seno, coseno y tangente:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

La gráfica de la función $y = \cos x$ coincide con su reflexión respecto al eje vertical.

Las gráficas que se obtienen al reflejar las funciones seno o tangente respecto al eje vertical son iguales, respectivamente, a las que se obtienen por su reflexión respecto al eje horizontal.

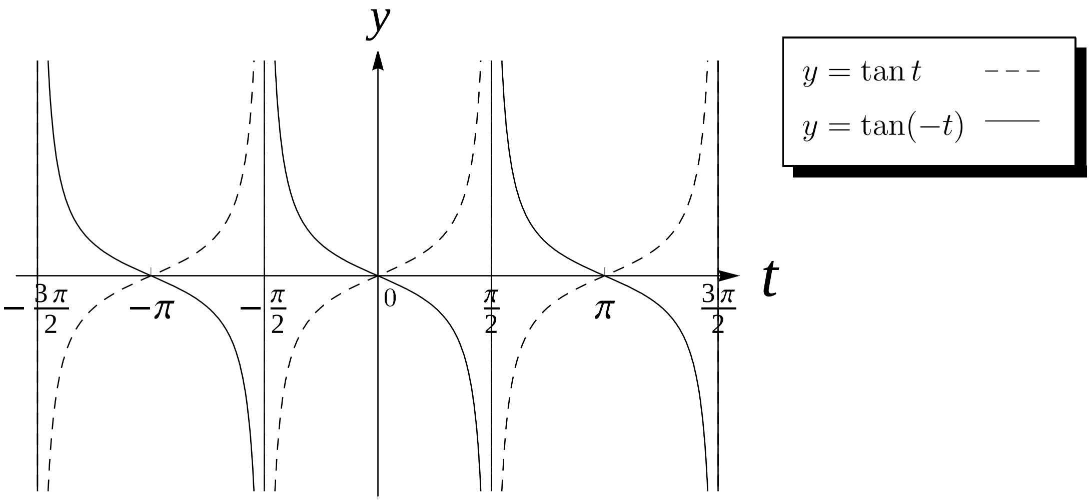


Figura 35.5

Ejemplo 35.7

En la figura 35.5 se muestran las gráficas de la función $y = \tan t$, en líneas punteadas, y de la función $y = \tan(-t) = -\tan t$ la cual es la reflexión de la primera función respecto al eje vertical y.

Ejercicios

1. Para las siguientes funciones encuentre la amplitud; por comparación con las funciones correspondientes $\operatorname{sen} x$ ó $\cos x$ determine si las gráficas de las funciones dadas presentan reflexión con respecto al eje horizontal y compresión o dilatación vertical.

   (a) $y = 3 \operatorname{sen} x$.

   (b) $y = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} x$.

   (c) $y = -5 \cos x$.

   (d) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$.

   (e) $y = -3 \operatorname{sen} x$.

2. Trace las gráficas de las funciones del numeral 1 en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

3. Identifique las ecuaciones de las funciones a las cuales corresponden las siguientes gráficas.

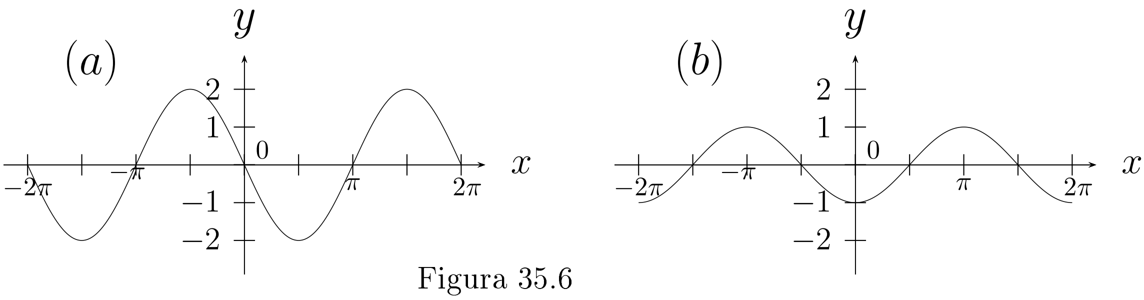


Figura 35.6

Lección 36

Gráficas y aplicaciones de las funciones sinusoidales II

En esta lección estudiaremos las funciones $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$, las cuales se obtienen por transformaciones de las funciones seno y coseno. Estas transformaciones dan lugar a cambios en la amplitud y el período. Haremos su representación gráfica e identificaremos sus propiedades fundamentales. Además, mostraremos aplicaciones de este tipo de funciones.

Período de las funciones $a \operatorname{sen} bx$ y $a \cos bx$

Supondremos que el coeficiente b de la variable x es positivo, esto es $b > 0$. Esta suposición es suficiente para estudiar todos los casos debido a las propiedades que conocemos sobre ángulos opuestos:

$$\operatorname{sen}(-bx) = -\operatorname{sen} bx; \quad \cos(-bx) = \cos bx.$$

Para calcular el período de las funciones $\operatorname{sen} bx$ y $\cos bx$ observamos que los valores tomados por estas funciones deben repetirse en intervalos de longitud 2π para la variable independiente bx. Así,

$$0 \leq bx \leq 2\pi.$$

Como $b > 0$, al dividir por b tenemos,

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}.$$

Por lo tanto el ciclo completo o fundamental de las funciones $a \operatorname{sen} bx$ y $a \cos bx$ es la porción de las gráficas definidas en el intervalo cerrado $[0, \frac{2\pi}{b}]$. Esto implica que el período de estas funciones es $p = \frac{2\pi}{b}$.

Ejemplo 36.1

El período de la función $\operatorname{sen} 2x$ es $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ejemplo 36.2

Para cada una de las funciones dadas encuentre la amplitud y el período.

1. $y = -\frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$,
2. $y = 2 \operatorname{sen} 3x$,

3. $y = -\sqrt{3}\cos 2x$.

Solución

1. $y = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ tiene como amplitud $A = |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$.

   Para hallar el período, observamos que el coeficiente de x es $\frac{1}{2}$. Encontramos entonces que el período de la función es $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

2. La función definida por $y = 2\operatorname{sen} 3x$ tiene como amplitud $A = 2$ y como período $p = \frac{2\pi}{3}$.

3. $y = -\sqrt{3}\cos 2x$ tiene como amplitud $A = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ y su período es $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ejemplo 36.3

Represente gráficamente la función $y = -\cos 2x$, en el intervalo cerrado $[-\pi, 2\pi]$.

Solución
La amplitud de la función $y = -\cos 2x$ es $A = |-1| = 1$ y el período de la función es

$$\frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Trazamos primero la gráfica de la función $y = \cos 2x$, representada en la parte izquierda de la figura 36.1 y después la reflejamos con respecto al eje horizontal, para obtener la gráfica de la función $y = -\cos 2x$, la cual aparece en la parte derecha de la figura 36.1.

Para trazar la gráfica de la función $y = \cos 2x$ ubicamos primero el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ sobre el eje x. Luego observamos que el período de la función $y = \cos 2x$ es igual a π. Esto significa que el ciclo fundamental de la función $y = \cos 2x$ va a repetirse en intervalos de longitud π. Por lo anterior podemos iniciar la construcción de la gráfica en el intervalo $[0, \pi]$ y luego extendemos dicha gráfica al intervalo $[-\pi, 2\pi]$, repitiendo el ciclo fundamental el número de veces que sea necesario.

Tenemos en cuenta que en el ciclo fundamental de la función coseno, la gráfica corta dos veces al eje de las abscisas, tiene un valor máximo 1 y un valor mínimo -1. Nuestro objetivo inicial es buscar los puntos de corte de la gráfica de la función $y = \cos 2x$ con el eje x y los puntos en los que se encuentran el máximo y el mínimo de la función en el intervalo $[0, \pi]$. Observemos que

$$\cos 2x = 0 \quad \text{si} \quad 2x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad 2x = \frac{3\pi}{2}.$$

Entonces la gráfica va a cortar al eje x, en $x = \frac{\pi}{4}$ y en $x = \frac{3\pi}{4}$.

El máximo se presenta cuando $\cos 2x = 1$. Así, $2x = 0$, y por tanto $x = 0$. El mínimo ocurre cuando $\cos 2x = -1$. Esto ocurre para $2x = \pi$ y tenemos entonces que $x = \frac{\pi}{2}$.

Trazamos la gráfica de la función $y = \cos 2x$ en el intervalo cerrado $[0, \pi]$. Ésta va a repetirse en intervalos de longitud π, hasta completar la gráfica sobre el intervalo cerrado $[-\pi, 2\pi]$, extendiéndose a la derecha y a la izquierda del intervalo $[0, \pi]$. Véase la parte izquierda de la figura 36.1. Posteriormente hacemos la reflexión con respecto al eje horizontal para obtener la gráfica de la función $y = -\cos 2x$. Véase la parte derecha de la figura 36.1.

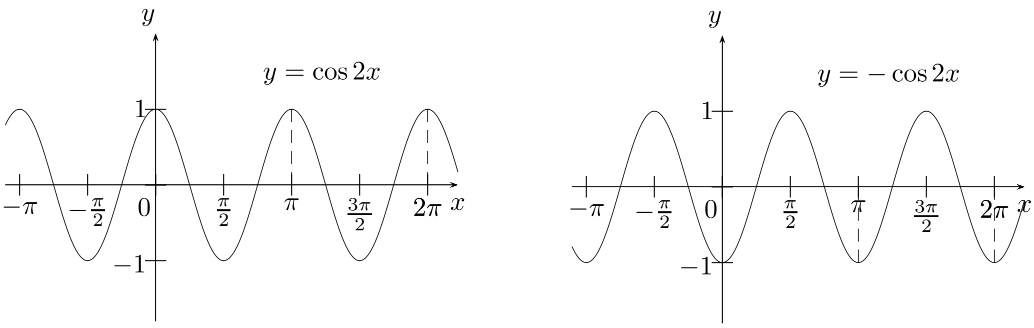


Figura 36.1

Las funciones trigonométricas sirven para modelar fenómenos periódicos.

La frecuencia de cada una de las funciones $y = a\cos bt$ y $y = a\,\mathrm{sen}\,bt$ se define como el inverso multiplicativo del período, es decir la frecuencia de estas dos funciones es $\omega = \frac{b}{2\pi}$.

Ejemplo 36.4

La gráfica de la parte izquierda de la figura 36.2 muestra la variación del nivel del agua en relación con el nivel medio del agua del mar en Tacoma Washington, durante un período particular de 24 horas. Obtenga una ecuación de la forma $y = a\,\mathrm{sen}\,bt$ que describa la variación del nivel del agua como una función del número de horas transcurridas después de la media noche. ¿Cuál es la altura del agua con respecto al nivel del mar a la 1:00 p.m.?

Solución

Observamos que la gráfica dada en la parte izquierda de la figura 36.2 presenta algunas diferencias con la representación usual en el plano cartesiano. Sin embargo, es interesante utilizarla porque muchas aplicaciones traen gráficas que no corresponden exactamente a la forma dada en el curso y es necesario saberlas interpretar. De la figura deducimos que la gráfica es una reflexión con respecto al eje x de una función senoidal, cuya amplitud es 6. La función puede expresarse por

$$y = -6\,\mathrm{sen}\,bt.$$

Para calcular el valor de b recordemos que el período de una función de este tipo es $\frac{2\pi}{b}$. De la gráfica obtenemos que el período de la función es 12. Así, $\frac{2\pi}{b} = 12$. Resolvemos la ecuación anterior para b y obtenemos que

$$b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

La ecuación que describe la variación del nivel del agua es

$$y = -6\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}t.$$

La gráfica de esta función en el sistema de coordenadas ty se representa en la parte derecha de la figura 36.2. La altura a la 1:00 p.m. se presenta en $t = 13$. Reemplazamos este valor en la ecuación obtenida:

$$y = -6\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{6} = -6\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = -6\left(\frac{1}{2}\right),$$
$$y = -3 \text{ pies.}$$

A la 1:00 p.m. el agua se encuentra a 3 pies bajo el nivel promedio del mar.

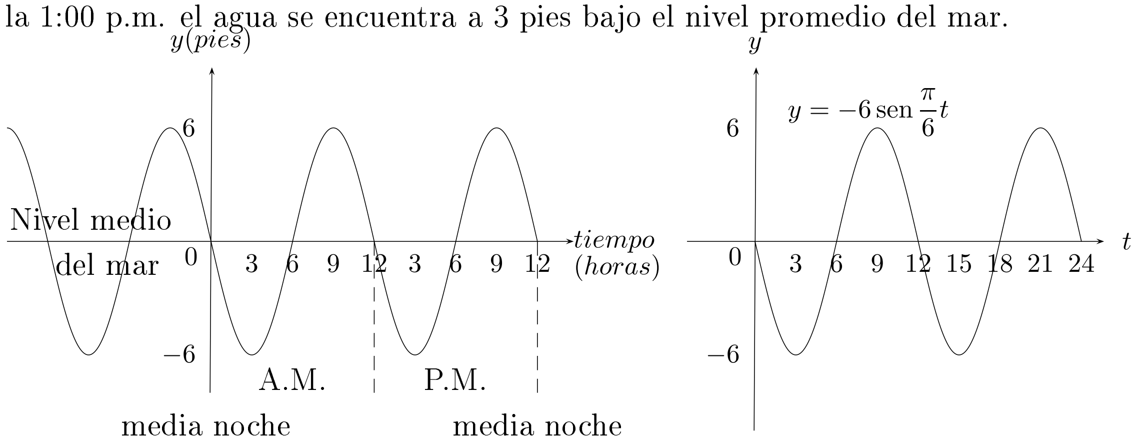


Figura 36.2

Ejercicios

1. Encuentre la amplitud y el período de la función $g(x) = -\frac{1}{3}\cos 2x$. En un sistema de coordenadas xy represente la gráfica de la función g y de la función definida por $j(x) = \cos x$ en el intervalo cerrado $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Encuentre la amplitud de cada una de las funciones $f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x$ y $g(x) = -3\,\mathrm{sen}\,x$. En un sistema de coordenadas xy represente la gráfica de las funciones f y g y de la función h definida por $h(x) = \mathrm{sen}\,x$ en el intervalo cerrado $[-2\pi, 2\pi]$.

3. Encuentre el período de la función $y = g(x) = \cos 2x$ y represente las gráficas de las funciones $y = g(x)$ y $y = fx) = \cos x$, en el intervalo cerrado $[-2\pi, 2\pi]$, en el mismo sistema de coordenadas xy.

4. Encuentre el período de las función $y = f(t) = \cos \frac{1}{4}t$. En un sistema de coordenadas ty represente la gráfica de la función f y de la función $y = j(t) = \cos t$ en el intervalo cerrado $[-16\pi, 16\pi]$.

5. Para cada función definida sobre el conjunto de los números reales determine la amplitud de su gráfica y el período. Determine cuántos ciclos se repiten en el intervalo dado.

   (a) $y = 2\cos 6x,\ -2\pi \leq x \leq 2\pi$.

   (b) $y = -3\cos(2\pi x),\ -2 \leq x \leq 2$.

   (c) $y = 4\cos(4x),\ -2\pi \leq x \leq 2\pi$.

   (d) $y = -5\,\mathrm{sen}(2x),\ -4\pi \leq x \leq 4\pi$.

(e) $y = \operatorname{sen}(\pi x), \ -2 \leq x \leq 2.$

6. Identifique las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ que se representan en cada una de las siguientes gráficas y escriba su amplitud, período y una ecuación de la forma $y = a \operatorname{sen} bx$ ó $y = a \cos bx$.

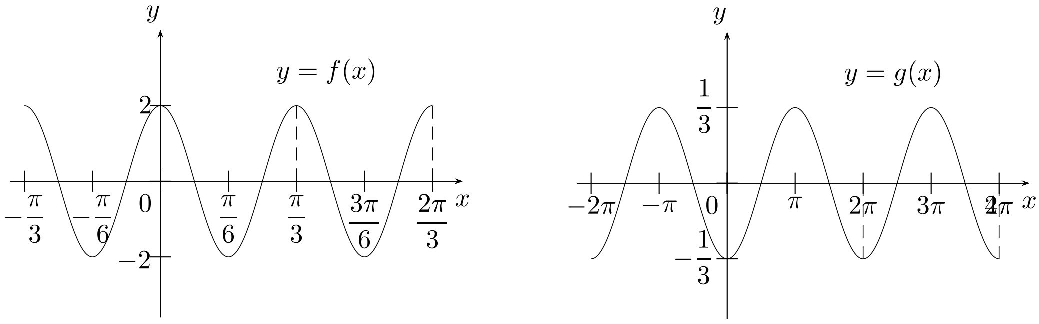


Figura 36.3

7. La caída de voltaje E a través de los terminales de cierto circuito de corriente alterna es de aproximadamente $E = 156 \ \operatorname{sen} 110 \ \pi t$ voltios, donde t representa el tiempo dado en segundos. ¿Cuál es la máxima caída de voltaje y cuál es la frecuencia para este circuito?

Lección 37

Traslaciones horizontales y verticales de las funciones trigonométricas.

En esta lección vamos a estudiar transformaciones en las funciones seno y coseno que conllevan desplazamientos horizontales y verticales de sus gráficas. Resolveremos algunos problemas de aplicación.

Desplazamientos horizontales

En la lección 19 vimos que si $c > 0$, la gráfica de la función $y = f(x + c)$ se obtiene al trasladar la gráfica de la función $y = f(x)$, c unidades a la izquierda, y la gráfica de la función $y = f(x - c)$ se obtiene al trasladar la gráfica de $y = f(x)$, c unidades a la derecha.

En el caso de las funciones trigonométricas se acostumbra llamar ***desfasamiento*** a la traslación horizontal. Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$, la función está desfasada π unidades a la izquierda. Si $g(x) = \operatorname{sen}(x - \pi)$, la función está desfasada π unidades a la derecha.

Funciones $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$ y $y = a\cos(bx + c)$ y sus gráficas

Para analizar estas funciones tenemos que considerar su amplitud, período y desfasamiento. Recordemos que siempre consideramos $b > 0$. La amplitud es $|a|$, el período es $\frac{2\pi}{b}$.

Para determinar el desfasamiento escribimos las funciones en la forma:

$$y = a\operatorname{sen}\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] \quad \text{y} \quad y = a\cos\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right].$$

Observamos que las gráficas de las funciones $y = a\operatorname{sen} bx$ y $y = a\cos bx$ se han desplazado horizontalmente $\frac{c}{b}$ unidades a la izquierda si $c > 0$ y si $c < 0$ hay un desplazamiento horizontal de $-\frac{c}{b}$ unidades a la derecha.

Para las funciones $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$ y $y = a\cos(bx + c)$ se define el desplazamiento de fase por $-\frac{c}{b}$.

Ejemplo 37.1

En la figura 39.1 representamos las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2})e$ Observe que la gráfica de la segunda función es un desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$, $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha. El desplazamiento de fase es igual a $\frac{\pi}{2}$. Cuando este número es positivo se puede interpretar geométricamente como la longitud del segmento que separa horizontalmente ambas gráficas.

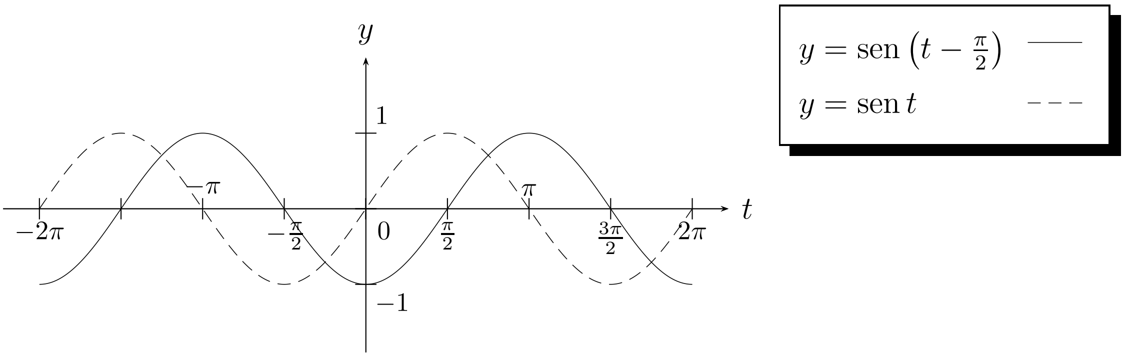


Figura 37.1

Ejemplo 37.2

En la figura 39.2 aparecen las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{2})$. Observe que la gráfica de la segunda función es un desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$, $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda. El desplazamiento de fase es igual a $-\frac{\pi}{2}$.

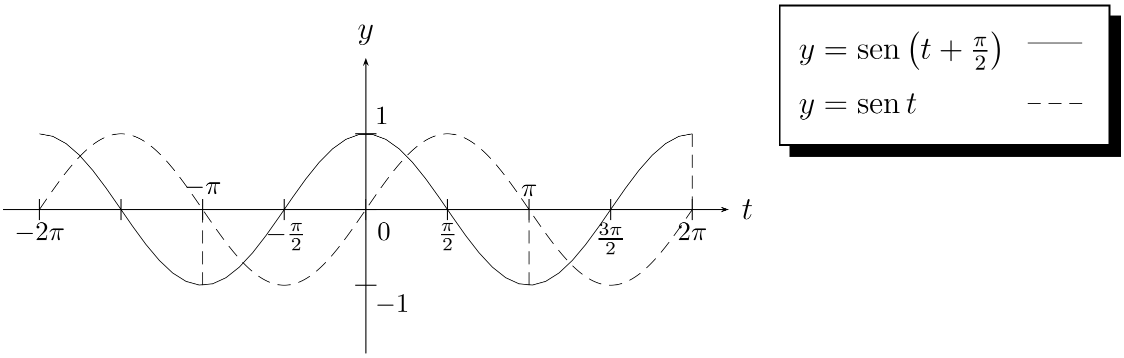


Figura 37.2

Ejemplo 37.3

Encuentre la amplitud, el período y el desfasamiento de la función definida por $f(x) = -\cos(2x + \pi)$ y represente gráficamente la función.

Solución
Amplitud: $A = |-1| = 1$; período: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Para calcular el desplazamiento de fase escribimos la función en la forma

$$y = -\cos(2x + \pi) = -\cos 2(x + \frac{\pi}{2}).$$

Entonces el desfasamiento es $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda, con relación a la función $y = -\cos 2x$. El desplazamiento de fase es $-\frac{\pi}{2}$.

Para hacer la gráfica procedemos en varias etapas.

1. En la figura 39.3 se representan las gráficas de las funciones $y = \cos 2x$ y $y = -\cos 2x$. La primera gráfica está en líneas punteadas y la segunda en trazo continuo. La segunda gráfica es una reflexión sobre el eje horizontal de la primera. El período es π.

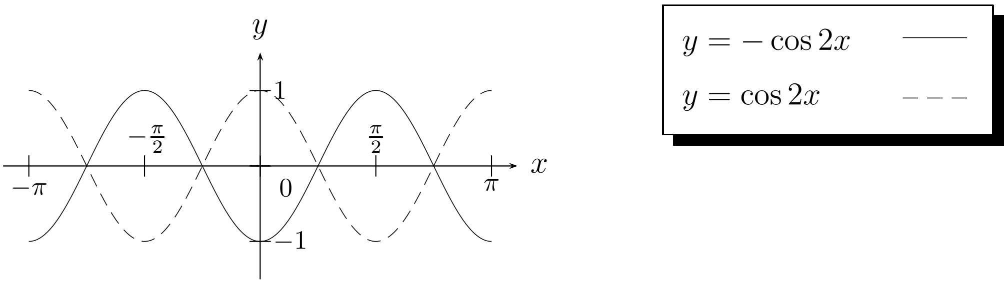


Figura 37.3

2. Consideremos ahora el desplazamiento de $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda, con respecto a la gráfica de $y = -\cos 2x$, la cual aparece en esta gráfica en líneas punteadas.

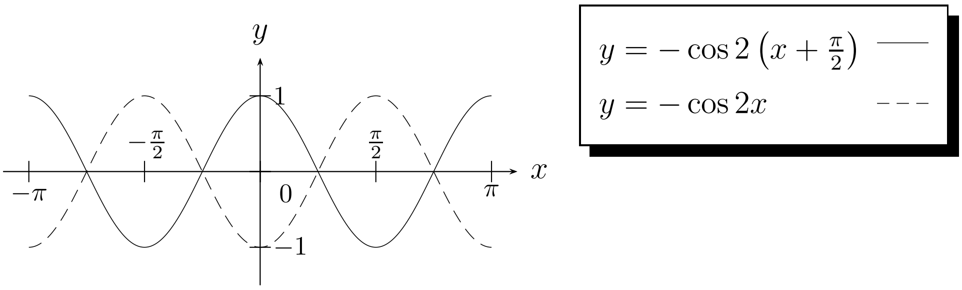


Figura 37.4

La gráfica de la función $y = -\cos\left[2(x + \frac{\pi}{2})\right]$, aparece en esta figura en trazo continuo. En el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ hay un ciclo completo de la función.

Traslaciones verticales

En la lección 19 vimos cómo a partir de las gráficas de la función $y = f(x)$, pueden obtenerse las gráficas de la funciones definidas por $y = f(x) + c$, y $y = f(x) - c$. Para valores positivos de c, la gráfica de la función $y = f(x) + c$ es una traslación de f, c unidades hacia arriba y la gráfica de la función $y = f(x) - c$ es una traslación de la gráfica de f, c unidades hacia abajo.

Cuando se consideran traslaciones verticales de las funciones sinusoidales hay variaciones en el valor que toman las ordenadas, más no en las abscisas. El período es el mismo de la función $y = f(x)$.

Recordemos que la amplitud para cualquier función periódica $y = F(x)$ está dada por

$$A = \frac{1}{2}\,(\text{máximo de } F(x) - \text{ mínimo de } F(x)).$$

Ejemplo 37.4

1. Veamos algunas propiedades de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x + 1.$$

Ya que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, sumando 1 en los tres miembros de esta desigualdad se obtiene que

$$0 \leq \operatorname{sen} x + 1 \leq 2.$$

El valor máximo es 2, el valor mínimo es 0, su amplitud es $\frac{1}{2}(2-0) = 1$ y su período es 2π. La gráfica de f se obtiene desplazando la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ una unidad hacia arriba.

2. Veamos algunas propiedades de la función definida por

$$z(t) = -2\operatorname{sen} 3t - 1.$$

Debemos determinar sus valores máximo y mínimo y la amplitud. Usamos el hecho de que $-1 \leq \operatorname{sen} 3t \leq 1$. Multiplicando por -2, todos los miembros de la anterior de desigualdad y luego restando 1 se obtiene

$$\begin{aligned} 2 &\geq -2\operatorname{sen} 3t \geq -2, \\ 1 &\geq -2\operatorname{sen} 3t - 1 \geq -3. \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que el valor máximo es 1, el valor mínimo -3, y la amplitud $A = \frac{1}{2}(1-(-3)) = \frac{1}{2}(4) = 2$.

El período es $\frac{2\pi}{3}$ y la gráfica se obtiene desplazando la gráfica de $z = -2\operatorname{sen} 3t$ una unidad hacia abajo. En la figura 39.5 se presenta su representación gráfica.

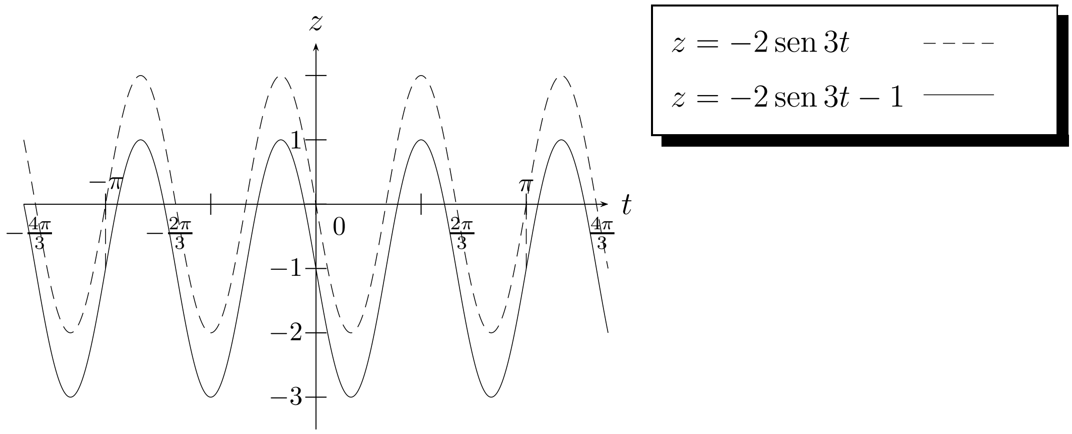


Figura 37.5

Ejercicios

1. Calcule la amplitud, el período, la frecuencia y el desplazamiento de fase para las siguientes funciones:

   (a) $y = -2\cos(x - \frac{\pi}{6}), \ -4\pi \leq x \leq 4\pi.$

   (b) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x + \pi), \ -2\pi \leq x \leq 2\pi.$

   (c) $y = -5\cos(2x - \frac{\pi}{2}), \ -4\pi \leq x \leq 4\pi.$

   (d) $y = 2\cos(2x - \frac{2}{\pi}), \ -4\pi \leq x \leq 4\pi.$

   (e) $y = 2\operatorname{sen}(\pi x), \ -6 \leq x \leq 6.$

   (f) $y = \operatorname{sen}(\pi x - \pi), \ -2 \leq x \leq 2.$

2. Trace la gráfica de cada función del numeral 1 en el intervalo dado.

Lección 38

Gráficas de las funciones $y = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$ y $y = a\cos(bx + c) + d$

En esta lección estudiaremos las funciones trigonométricas de la forma $y = a\,\mathrm{sen}(bx+c)+d$ y $y = a\cos(bx + c) + d$; ésta es la forma más general de las funciones sinusoidales. Mostraremos sus características a través de sus ecuaciones y gráficas. Podemos notar que el estudio de estas funciones involucra todos los casos que estudiamos en las lecciones anteriores. Con relación a las funciones seno y coseno podemos tener cambios en la amplitud y el período, además de traslaciones horizontales y verticales.

Hay diferentes maneras de hacer su representación gráfica. Ilustraremos una de estas formas. Se supone que $b > 0$.

1. Se construyen las gráficas de las funciones $y = a\,\mathrm{sen}\,bx$ y $y = a\cos bx$ como en la lección 39. La amplitud es igual a $|a|$, el período es $\frac{2\pi}{b}$, la frecuencia es $\frac{b}{2\pi}$.

2. Se trasladan las gráficas del numeral 1 horizontalmente $\frac{c}{b}$ unidades de acuerdo con el signo de $\frac{c}{b}$. En esta forma se obtienen las gráficas de las funciones

$$y = a\,\mathrm{sen}\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] \text{ y } y = a\cos\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right].$$

   El desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b}$.

3. Se trasladan las gráficas obtenidas en el numeral 2 en el eje vertical d unidades hacia arriba si $d > 0$ ó $|d|$ unidades hacia abajo si $d < 0$.

Ejemplo 38.1

Tracemos la gráfica de $y = -3\,\mathrm{sen}(2x - \frac{\pi}{2}) + 1$.

1. Determinamos la amplitud A, el período p y la frecuencia ω y trazamos la gráfica de $f(x) = -3\,\mathrm{sen}(2x)$:

$$A = |-3| = 3,\ p = \pi,\ \omega = \frac{1}{\pi}.$$

   La gráfica se representa en la figura 38.1.

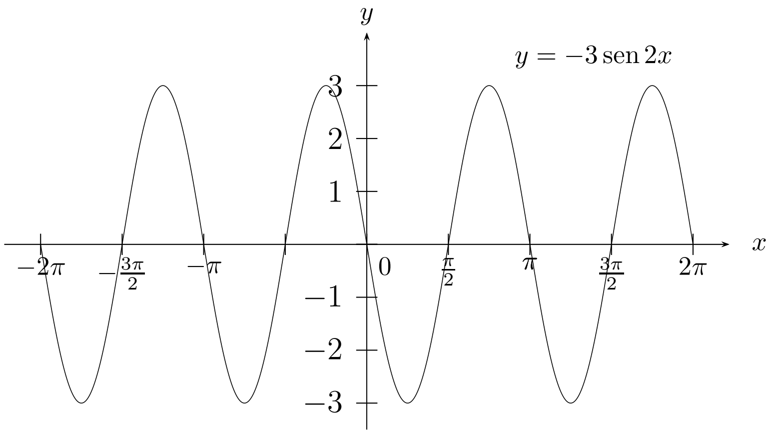


Figura 38.1

2. Trasladamos la gráfica de la función $f(x) = -3\,\text{sen}(2x)$, $\frac{\pi}{4}$ unidades a la derecha; el desplazamiento de fase es igual a $\frac{\pi}{4}$. Las gráficas se representan en la figura 38.2. La gráfica de la función $f(x) = -3\,\text{sen}(2x)$ aparece con líneas punteadas y la gráfica de la función $y = -3\,\text{sen}\,2(x - \frac{\pi}{4})$ con trazo continuo.

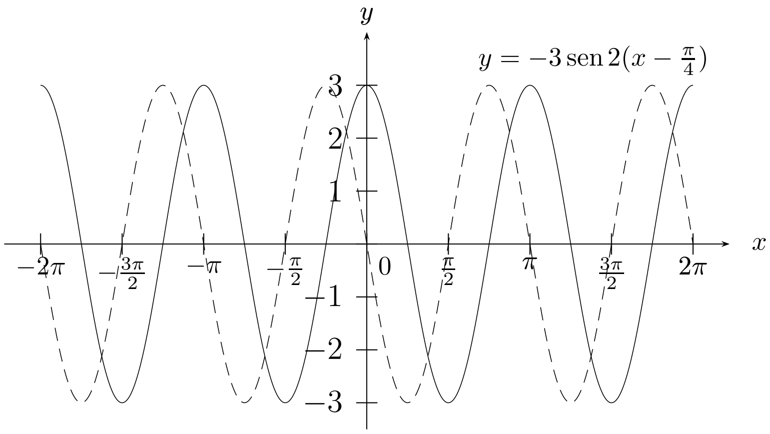


Figura 38.2

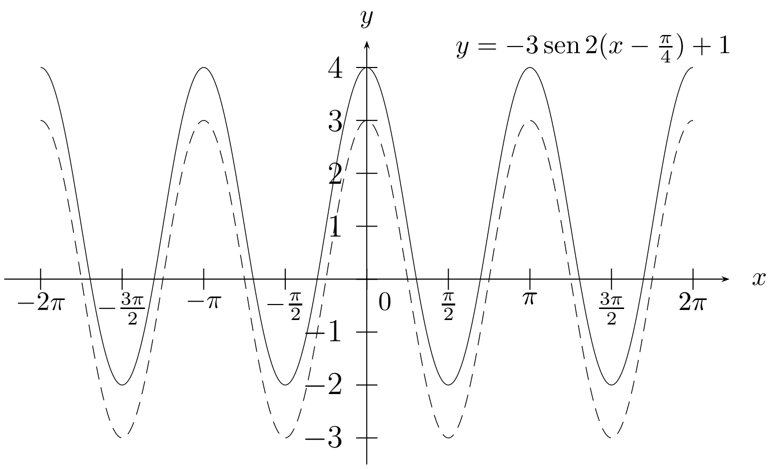


Figura 38.3

3. Trasladamos la gráfica de la función $y = -3\,\text{sen}\,2(x - \frac{\pi}{4})$ una unidad hacia arriba. Las gráficas se representan en la figura 38.3. La gráfica de la función $y = -3\,\text{sen}\,2(x - \frac{\pi}{4})$ aparece con líneas punteadas y la gráfica de la función $y = -3\,\text{sen}(2x - \frac{\pi}{2}) + 1$ con trazo continuo.

Ejemplo 38.2

La variación anual de la temperatura T (en grados centígrados) en Ottawa, Canadá, se puede calcular mediante la función

$$T(t) = 15.8\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right) + 5.$$

donde t es el tiempo en meses y $t = 0$ corresponde al 1 de Enero. Halle la temperatura máxima del año y la fecha en que ocurre.

Solución

La temperatura depende de la variación de la función seno. Va a ser máxima cuando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Por lo tanto la temperatura máxima es:

$$T(t) = 15.8 + 5 = 20.8°C.$$

Como $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{6}t &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi, \\ t &= \frac{\pi}{\pi/6} = 6. \end{aligned}$$

Como el tiempo está medido en meses y $t = 0$ corresponde al 1 de Enero, entonces la temperatura máxima se presenta el 1 de Julio.

Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones encuentre la amplitud, el período, el desplazamiento de fase y el desplazamiento vertical. Trace un bosquejo de la gráfica, sin usar cálculadoras graficadoras ni tablas trigonométricas:

   (a) $y = -\cos(2x + \pi)$, $-\pi \leq x \leq \pi$,

   (b) $y = \text{sen}(2x - \pi) + 1$, $-\pi \leq x \leq \pi$,

   (c) $y = -2\cos(2x - 2\pi) - 1$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

2. La temperatura promedio diaria de una región está dada por la función

$$C(t) = 20 + 6\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 10)\right),$$

donde $C(t)$ es el promedio de temperatura del día t de esa región (en grados centígrados) y $t = 1$ es el primero de enero. Determine el período, la amplitud, el desfasamiento y el desplazamiento vertical. Trace una gráfica de esta función. Determine la máxima y la mínima temperatura en el año y el día en que ocurre.

3. Suponga que la temperatura diaria promedio de un lugar es periódica. Suponga que la temperatura promedio más baja ocurre el día 20 de enero y es de 10 grados centígrados; la más alta es 30 grados centígrados y ocurre el 20 de julio. Trace una gráfica de la temperatura diaria promedio de esa región y exprese la temperatura diaria promedio como función del día del año, utilizando la función coseno.

4. Una investigación científica concluyó que un adulto normal inhala y exhala alrededor de 0.75 litros cada 4 segundos. El volumen de aire (en litros) en los pulmones después de t segundos después de exhalar fue modelado por medio de la función $v(t) = 0.4 - 0.38\cos(\frac{\pi t}{2})$, para $0 \leq t \leq 8$.

   (a) ¿Cuál es la máxima cantidad de aire en los pulmones?

   (b) ¿Cuál es la mínima cantidad de aire en los pulmones?

   (c) ¿Cuál es el período?

   (d) ¿Cuántas inhalaciones se hacen por minuto?

5. Algunos científicos usan la fórmula $f(t) = a\,\mathrm{sen}(bt-c)+d$ para simular las variaciones de temperatura durante el día. El tiempo t está dado en horas y f(t) en grados celsius. La temperatura de media noche es la que corresponde a t = 0 . Si un día en Alaska la temperatura varió según la fórmula

$$f(t) = 10\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}).$$

   Dadas las afirmaciones A y B:
   A. A la media noche la temperatura fue igual a $5°C$;
   B. La temperatura mínima fue $-10°C$;
   es correcto afirmar que:

   (a) A y B son verdaderas.

   (b) A es verdadera y B es falsa.

   (c) A es falsa y B es verdadera.

   (d) A y B son falsas.

Lección 39

Traslaciones horizontales y verticales de las funciones trigonométricas.

En esta lección vamos a estudiar transformaciones en las funciones seno y coseno que conllevan desplazamientos horizontales y verticales de sus gráficas. Resolveremos algunos problemas de aplicación.

Desplazamientos horizontales

En la lección 19 vimos que si $c > 0$, la gráfica de la función $y = f(x + c)$ se obtiene al trasladar la gráfica de la función $y = f(x)$, c unidades a la izquierda, y la gráfica de la función $y = f(x - c)$ se obtiene al trasladar la gráfica de $y = f(x)$, c unidades a la derecha.

En el caso de las funciones trigonométricas se acostumbra llamar ***desfasamiento*** a la traslación horizontal. Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$, la función está desfasada π unidades a la izquierda. Si $g(x) = \operatorname{sen}(x - \pi)$, la función está desfasada π unidades a la derecha.

Funciones $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$ y $y = a\cos(bx + c)$ y sus gráficas

Para analizar estas funciones tenemos que considerar su amplitud, período y desfasamiento. Recordemos que siempre consideramos $b > 0$. La amplitud es $|a|$, el período es $\frac{2\pi}{b}$.

Para determinar el desfasamiento escribimos las funciones en la forma:

$$y = a\operatorname{sen}\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] \quad \text{y} \quad y = a\cos\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right].$$

Observamos que las gráficas de las funciones $y = a\operatorname{sen} bx$ y $y = a\cos bx$ se han desplazado horizontalmente $\frac{c}{b}$ unidades a la izquierda si $c > 0$ y si $c < 0$ hay un desplazamiento horizontal de $-\frac{c}{b}$ unidades a la derecha.

Para las funciones $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$ y $y = a\cos(bx + c)$ se define el desplazamiento de fase por $-\frac{c}{b}$.

Ejemplo 39.1

En la figura 39.1 representamos las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2})e$ Observe que la gráfica de la segunda función es un desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$, $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha. El desplazamiento de fase es igual a $\frac{\pi}{2}$. Cuando este número es positivo se puede interpretar geométricamente como la longitud del segmento que separa horizontalmente ambas gráficas.

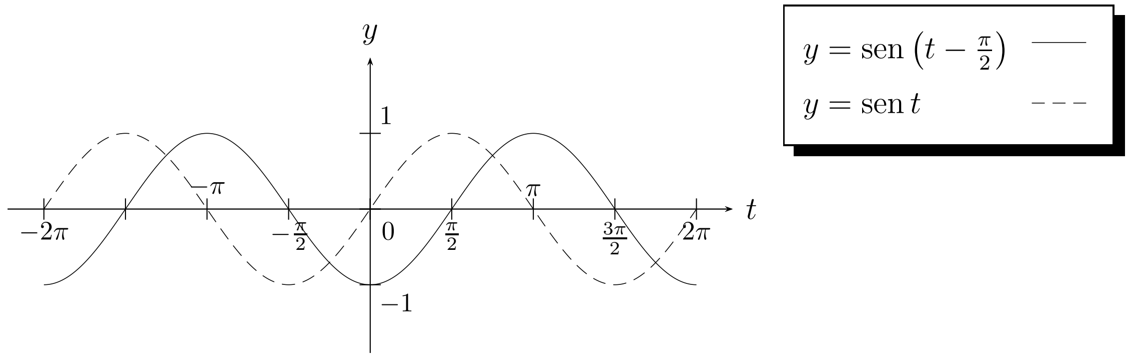


Figura 39.1

Ejemplo 39.2

En la figura 39.2 aparecen las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{2})$. Observe que la gráfica de la segunda función es un desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$, $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda. El desplazamiento de fase es igual a $-\frac{\pi}{2}$.

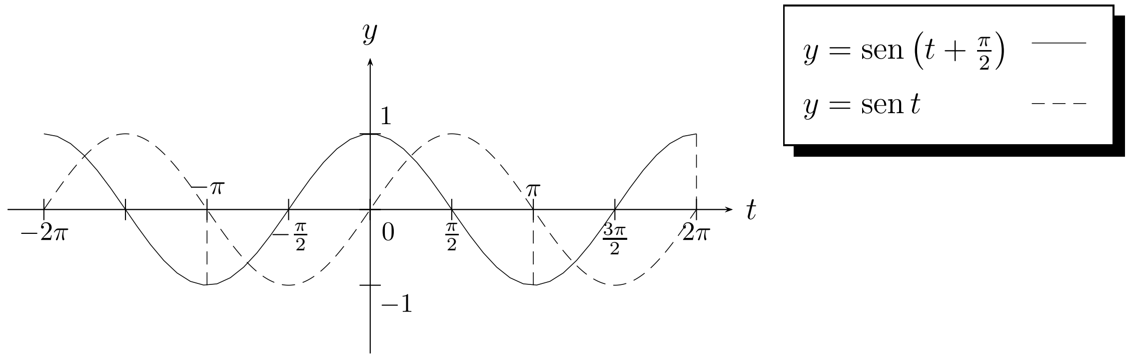


Figura 39.2

Ejemplo 39.3

Encuentre la amplitud, el período y el desfasamiento de la función definida por $f(x) = -\cos(2x + \pi)$ y represente gráficamente la función.

Solución
Amplitud: $A = |-1| = 1$; período: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Para calcular el desplazamiento de fase escribimos la función en la forma

$$y = -\cos(2x + \pi) = -\cos 2(x + \frac{\pi}{2}).$$

Entonces el desfasamiento es $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda, con relación a la función $y = -\cos 2x$. El desplazamiento de fase es $-\frac{\pi}{2}$.

Para hacer la gráfica procedemos en varias etapas.

1. En la figura 39.3 se representan las gráficas de las funciones $y = \cos 2x$ y $y = -\cos 2x$. La primera gráfica está en líneas punteadas y la segunda en trazo continuo. La segunda gráfica es una reflexión sobre el eje horizontal de la primera. El período es π.

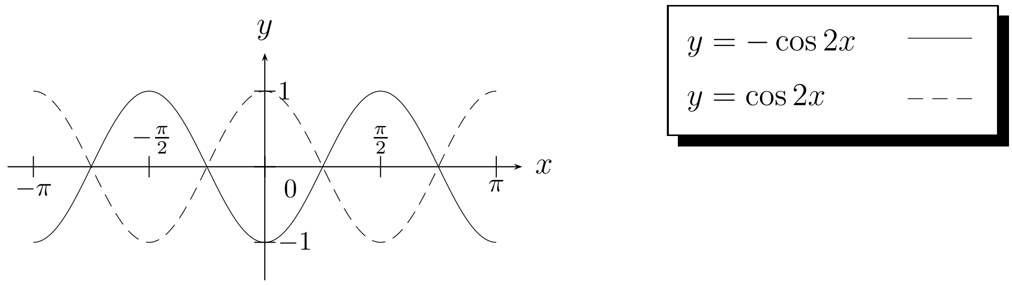


Figura 39.3

2. Consideremos ahora el desplazamiento de $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda, con respecto a la gráfica de $y = -\cos 2x$, la cual aparece en esta gráfica en líneas punteadas.

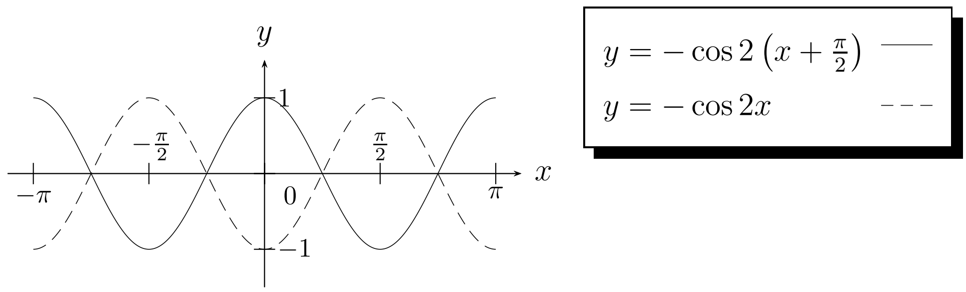


Figura 39.4

La gráfica de la función $y = -\cos\left[2(x + \frac{\pi}{2})\right]$, aparece en esta figura en trazo continuo. En el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ hay un ciclo completo de la función.

Traslaciones verticales

En la lección 19 vimos cómo a partir de las gráficas de la función $y = f(x)$, pueden obtenerse las gráficas de la funciones definidas por $y = f(x) + c$, y $y = f(x) - c$. Para valores positivos de c, la gráfica de la función $y = f(x) + c$ es una traslación de f, c unidades hacia arriba y la gráfica de la función $y = f(x) - c$ es una traslación de la gráfica de f, c unidades hacia abajo.

Cuando se consideran traslaciones verticales de las funciones sinusoidales hay variaciones en el valor que toman las ordenadas, más no en las abscisas. El período es el mismo de la función $y = f(x)$.

Recordemos que la amplitud para cualquier función periódica $y = F(x)$ está dada por

$$A = \frac{1}{2}\,(\text{máximo de } F(x) - \text{ mínimo de } F(x)).$$

Ejemplo 39.4

1. Veamos algunas propiedades de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x + 1.$$

Ya que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, sumando 1 en los tres miembros de esta desigualdad se obtiene que

$$0 \leq \operatorname{sen} x + 1 \leq 2.$$

El valor máximo es 2, el valor mínimo es 0, su amplitud es $\frac{1}{2}(2-0) = 1$ y su período es 2π. La gráfica de f se obtiene desplazando la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ una unidad hacia arriba.

2. Veamos algunas propiedades de la función definida por

$$z(t) = -2\operatorname{sen} 3t - 1.$$

Debemos determinar sus valores máximo y mínimo y la amplitud. Usamos el hecho de que $-1 \leq \operatorname{sen} 3t \leq 1$. Multiplicando por -2, todos los miembros de la anterior de desigualdad y luego restando 1 se obtiene

$$\begin{aligned} 2 &\geq -2\operatorname{sen} 3t \geq -2, \\ 1 &\geq -2\operatorname{sen} 3t - 1 \geq -3. \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que el valor máximo es 1, el valor mínimo -3, y la amplitud $A = \frac{1}{2}(1-(-3)) = \frac{1}{2}(4) = 2$.

El período es $\frac{2\pi}{3}$ y la gráfica se obtiene desplazando la gráfica de $z = -2\operatorname{sen} 3t$ una unidad hacia abajo. En la figura 39.5 se presenta su representación gráfica.

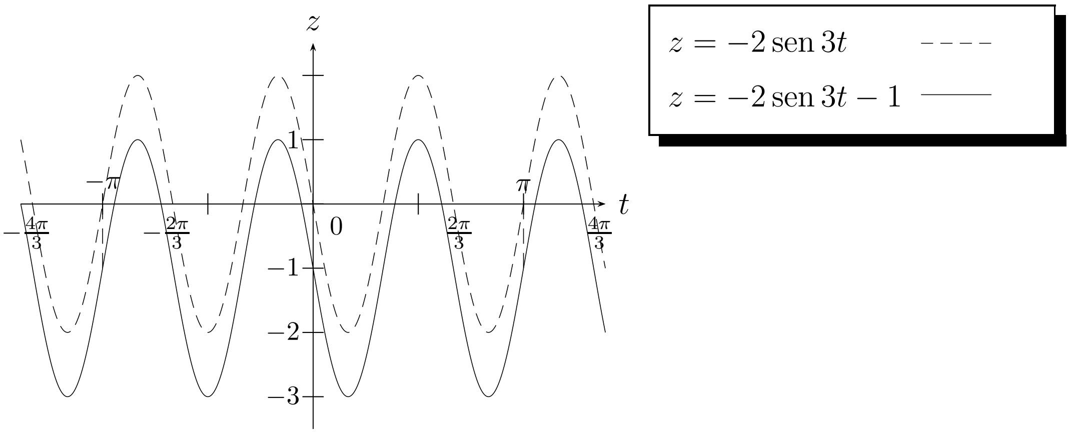


Figura 39.5

Ejercicios

1. Calcule la amplitud, el período, la frecuencia y el desplazamiento de fase para las siguientes funciones:

   (a) $y = -2\cos(x - \frac{\pi}{6}),\ -4\pi \leq x \leq 4\pi.$

   (b) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x + \pi),\ -2\pi \leq x \leq 2\pi.$

   (c) $y = -5\cos(2x - \frac{\pi}{2}),\ -4\pi \leq x \leq 4\pi.$

   (d) $y = 2\cos(2x - \frac{2}{\pi}),\ -4\pi \leq x \leq 4\pi.$

   (e) $y = 2\operatorname{sen}(\pi x),\ -6 \leq x \leq 6.$

   (f) $y = \operatorname{sen}(\pi x - \pi),\ -2 \leq x \leq 2.$

2. Trace la gráfica de cada función del numeral 1 en el intervalo dado.

Lección 40

Identidades trigonométricas II

Simplificación de expresiones trigonométricas

En esta lección ilustraremos mediante varios ejemplos cómo se pueden simplificar expresiones trigonométricas.
Para simplificar expresiones trigonométricas utilizamos, además de las identidads trigonométricas fundamentales, las mismas técnicas que son empleadas para simplificar expresiones algebraicas.

Ejemplo 40.1

Simplifique las siguientes expresiones trigonométricas

1. $$\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x.$$

2. $$\frac{\operatorname{sen} y}{\csc y} + \frac{\cos y}{\sec y}.$$

3. $$\tan\theta \cos\theta \csc\theta.$$

4. $$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}.$$

5. $$\frac{\sec y - \cos y}{\tan y}.$$

6. $$(1 - \cos^2 x)\tan x \cos x + \operatorname{sen}^2 x \cot x \cos x.$$

Solución

1. $$\begin{aligned}\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x &= \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x,\\ &= \operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)\\ &= \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} y}{\csc y} + \frac{\cos y}{\sec y} &= \frac{\operatorname{sen} y}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} y}} + \frac{\cos y}{\dfrac{1}{\cos y}},\\
&= \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y,\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Observación: En muchos casos es útil escribir la expresión a simplificar en términos de las funciones seno y coseno, como se hizo en este ejemplo.

3.

$$\tan\theta\cos\theta\csc\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos\theta\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\cos\theta}{\cos\theta} = 1.$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} &= \frac{\operatorname{sen} x(1+\operatorname{sen} x) + \cos x\cos x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)},\\
&= \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)},\\
&= \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)},\\
&= \frac{1}{\cos x},\\
&= \sec x.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\frac{\sec y - \cos y}{\tan y} &= \frac{\dfrac{1}{\cos y} - \cos y}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}} = \frac{\dfrac{1-\cos^2 y}{\cos y}}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}},\\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos y}}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}} = \frac{\cos y}{\cos y}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sen} y},\\
&= \operatorname{sen} y.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
&(1-\cos^2 x)\tan x\cos x + \operatorname{sen}^2 x\cot x\cos x\\
&= \operatorname{sen}^2 x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cos x + \operatorname{sen}^2 x\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cos x,\\
&= \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x\cos^2 x,\\
&= \operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x),\\
&= \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Simplifique las siguientes expresiones trigonométricas.

1. $\dfrac{\cot y \sec y}{\csc y}$.

2. $\dfrac{1+\sec^2 x}{1+\tan^2 x}$.

3. $\dfrac{\tan x}{\sec(-x)}$.

4. $\dfrac{\cos y}{\sec y + \tan y}$.

5. $\dfrac{\cos u - \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u \cos u - 1 + \cos^2 u}$.

Lección 41

Identidades trigonométricas III

Esta lección está dedicada a ilustrar el procedimiento a seguir para demostrar que una igualdad es una identidad trigonométrica. Con frecuencia para este proceso usaremos la expresión "verificar una identidad trigonométrica".

El problema de verificar que una igualdad dada es una identidad consiste en probar que ésta es verdadera para todo valor de la variable. El procedimiento que utilizaremos para verificar una identidad consistirá en seleccionar uno de los lados de la igualdad y por medio de las identidades fundamentales o alguna identidad ya conocida y de operaciones algebraicas obtener el otro lado de la igualdad.

Ejemplo 41.1

Demuestre que cada una de las siguientes igualdades es una identidad.

1. $\cos t\ (\tan t + \cot t) = \csc t$.

   Solución

   Una buena idea es reemplazar las funciones trigonométricas en términos de las funciones seno y coseno. También es aconsejable efectuar los productos indicados y simplificar al máximo las fracciones. En este caso, para iniciar, seleccionamos el lado izquierdo de la igualdad por ser más elaborado y contener más operaciones para realizar. Así,

$$\begin{aligned}\cos t\ \left(\ \tan t + \cot t\ \right) &= \cos t \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \right) = \cos t \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + \cos t \cdot \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \\ &= \operatorname{sen} t + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = \csc t.\end{aligned}$$

   Con este procedimiento hemos verificado la identidad $\cos t\ (\tan t + \cot t) = \csc t$.

2. $\sec^4 t - \sec^2 t = \tan^4 t + \tan^2 t$.

   Solución

   En este caso, al observar las potencias pares de las funciones tangente y secante que aparecen en la igualdad, vemos que una buena estrategia es utilizar la correspondiente identidad pitagórica $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$. Los dos lados de la igualdad parecen apropiados para iniciar la verificación. Tomemos el lado derecho de la igualdad. Observemos que en el lado izquierdo no aparece ningún término que involucre la función tangente. Entonces debemos reemplazar en términos de la función secante

$$\tan^4 t + \tan^2 t = \tan^2 t\ (\tan^2 t + 1) = (\sec^2 t - 1)(\sec^2 t) = \sec^4 t - \sec^2 t.$$

Hemos iniciado el procedimiento con el lado derecho de la igualdad y hemos obtenido al final el lado izquierdo de la igualdad, verificándose la identidad.

3. $1 + \tan^2(-t) = \sec^2 t.$

   Solución
   Transformamos el lado izquierdo

   $$1 + \tan^2(-t) = \sec^2(-t) = (\sec(-t))^2 = (\sec t)^2 = \sec^2 t.$$

4. $\dfrac{1+\tan t}{1-\tan t} = \dfrac{\cot t + 1}{\cot 1 - 1}.$

   Solución
   Transformamos el lado izquierdo

   $$\frac{1+\tan t}{1-\tan t} = \frac{\dfrac{1+\tan t}{\tan t}}{\dfrac{1-\tan t}{\tan t}} = \frac{\dfrac{1}{\tan t}+1}{\dfrac{1}{\tan t}-1} = \frac{\cot t + 1}{\cot t - 1}.$$

Observación. Para probar que una igualdad dada no es una identidad, debemos encontrar al menos un valor de la variable para el cual no se satisface la igualdad.

Ejemplo 41.2

Demostremos que la igualdad $\tan x + \cot x = 0$, no es una identidad.

Consideremos el valor $x = \frac{\pi}{4}$. Entonces $\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$. Luego por no verificarse la igualdad para un valor de la variable, la igualdad no es una identidad.

Ejercicios

1. Verifique cada una de las siguientes identidades

   (a) $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t} = \dfrac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t}$,

   (b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$,

   (c) $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x \operatorname{sen}^2 x$,

   (d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} - \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$,

   (e) $\dfrac{1-\cot^2 x}{\tan^2 x - 1} = \cot^2 x$,

   (f) $\dfrac{\sec t + \tan t}{\cot t + \cos t} = \tan t \sec t$,

   (g) $\dfrac{\sec t}{1-\operatorname{sen} t} = \dfrac{1+\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}$,

   (h) $\dfrac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}$.

2. Determine si la igualdad dada es una identidad.
   (a) $(x+1)^2 = x^2 - 1$, (b) $\cot^2 x - \csc^2 x = -1$, (c) $\sec(-x) + \sec x = 2$,
   (d) $(1-\sec x)^2 = \tan^2 x$, (e) $\operatorname{sen}^4 y + \cos^4 y = 1$.

Lección 42

Identidades trigonométricas IV

Ejemplo 42.1

Verifique la identidad

$$(\tan x + \cot x)^4 = \csc^4 x \sec^4 x.$$

Solución

Escribamos el lado izquierdo en términos de las funciones seno y coseno y simplifiquemos:

$$\begin{aligned}(\tan x + \cot x)^4 &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^4 \\ &= \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}\right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\right)^4.\end{aligned}$$

Ahora usamos las identidades recíprocas de secante y cosecante:

$$\begin{aligned}(\tan x + \cot x)^4 &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\right)^4 \\ &= \csc^4 x \sec^4 x.\end{aligned}$$

Ejemplo 42.2

Verifique la identidad

$$\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = 1 - \frac{2}{\sec^2 x}.$$

Solución

Observemos que el lado izquierdo es una diferencia de cuadrados. Podemos entonces factorizar este lado y simplificar, así:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x &= (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \\ &= \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \\ &= 1 - \cos^2 x - \cos^2 x \\ &= 1 - 2\cos^2 x = 1 - \frac{2}{\sec^2 x}.\end{aligned}$$

Ejemplo 42.3

Verifique la identidad

$$\frac{\cot x}{\sec^4 x} = \frac{\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}.$$

Solución

En este caso, observemos que el lado izquierdo luce más simplificado que el lado derecho. Esto sugiere comenzar esta vez por el lado derecho y tratar de llegar al lado izquierdo. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x} =& \frac{\operatorname{sen}^2 x(\operatorname{sen}^2 x - 1)}{\tan^3 x}\\ =& \frac{\operatorname{sen}^2 x(-\cos^2 x)}{\tan^3 x} = \frac{\dfrac{-\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{1}}{\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x}}\\ =& \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cos^4 x.\end{aligned}$$

La última expresión es igual al lado izquierdo de la identidad.

Ejemplo 42.4

Verifique la identidad

$$\frac{\cot x + \tan x}{\sec x + \csc x} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{1 + 2\operatorname{sen} x\cos x}.$$

Solución

Apliquemos nuevamente la técnica de transformar todas las expresiones en términos de senos y cosenos. En este caso debemos transformar el lado izquierdo así:

$$\begin{aligned}\frac{\cot x + \tan x}{\sec x + \csc x} =& \frac{\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)}{\left(\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)}\\ =& \frac{\left(\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}\right)}{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x\cos x}\right)}\\ =& \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}.\end{aligned}$$

Notemos que última expresión contiene la suma de seno y coseno en el denominador, en tanto que el lado derecho de la identidad (al cual queremos llegar) contiene esa suma en el numerador. Procedamos entonces a multiplicar la última expresión de anterior la cadena de igualdades por el término

$$\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x},$$

para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{\cot x + \tan x}{\sec x + \csc x} &= \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Verifique las siguientes identidades.

1. $\cos^2 x(\tan x + \cot x)^3 = \sec x \csc^3 x$
2. $\frac{\tan^2 x}{\cot x \sec x} = \sin x \sec^2 x$
3. $\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) \frac{\tan x}{\sec x} = 1 + \tan x$
4. $\left(\frac{\tan x - \sec x}{\cot x - \csc x}\right) \left(\frac{1 - \sec x}{1 - \csc x}\right) = \tan^2 x$

Lección 43

Identidades trigonométricas V

Hasta el momento hemos considerado identidades trigonométricas que involucran una sola varible; vamos a considerar ahora las identidades para el seno, el coseno y la tangente de la suma y la diferencia de dos variables.

Fórmulas de adición y sustracción

Fórmulas de adición y sustracción para el coseno

$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, \tag{43.1}$$

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t. \tag{43.2}$$

Demostraremos la identidad (43.1). A partir de esta igualdad puede verificarse fácilmente la segunda identidad. Esto lo haremos en el ejemplo 43.1.

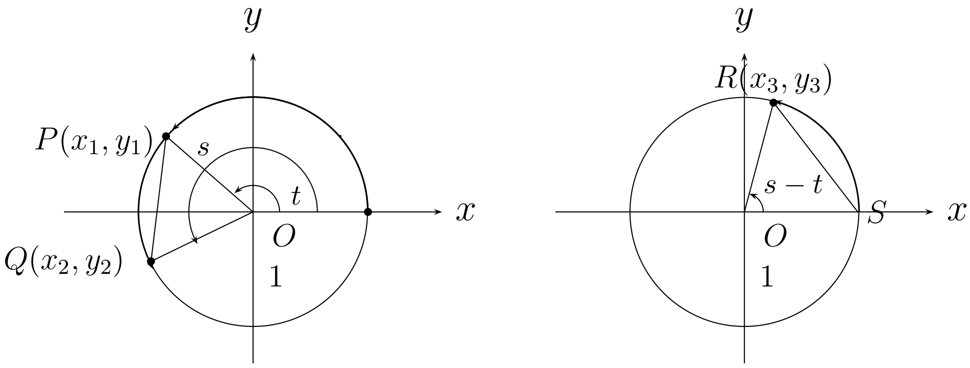


Figura 43.1

Demostración de la identidad $\cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$

Prueba (Opcional)
En esta demostración vamos a usar de nuevo la circunferencia unitaria, y los argumentos que hemos utilizado antes en las lecciones 29 y 30. En la figura 43.1 consideramos los ángulos s, t y $s-t$.

El punto $P(x_1, y_1)$ está en la intersección del lado final del ángulo t, con la circunferencia unitaria. Entonces por las definiciones de seno y coseno, $\operatorname{sen} t = y_1$ y $\cos t = x_1$. Asi las coordenadas de P pueden escribirse como $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$. El punto $Q(x_2, y_2)$ está en el lado final del ángulo s, y sus coordenadas son $\cos s$ y $\operatorname{sen} s$.

Congruente con el triángulo ΔPOQ, situamos el triángulo ΔSOR, el cual se construye de tal forma que el ángulo $\angle POQ$ sea congruente con el ángulo $\angle SOR$, el cual mide $s-t$ radianes, y su lado inicial, el segmento $\overline{OS}$ está sobre el eje x, y S tiene coordenadas 1 y 0. Las coordenadas del punto $R(x_3, y_3)$ son $\cos(s-t)$ y $\operatorname{sen}(s-t)$). Esto es,

$$x_3 = \cos(s-t) \text{ y } y_3 = \operatorname{sen}(s-t).$$

Denotamos la distancia del punto P a Q, por $d(P, Q)$ y la distancia de R a S la denotamos por $d(R, S)$. Entonces

$$d(P, Q) = d(S, R)$$

,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} &= \sqrt{(x_3-1)^2+(y_3-0)^2}, \\
(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 &= (x_3-1)^2+(y_3-0)^2, \\
x_2^2+x_1^2-2x_2x_1+y_2^2+y_1^2-2y_2y_1 &= x_3^2+1-2x_3+y_3^2. \qquad (43.3)
\end{aligned}$$

Ya que los puntos P, Q, R y S están sobre la circunferencia unitaria se satisface que

$$x_1^2+y_1^2=1, \quad x_2^2+y_2^2=1, \quad x_3^2+y_3^2=1.$$

Reemplazando estos valores en (43.3) y simplificando obtenemos

$$2-2x_2x_1-2y_1y_2 = 2-2x_3,$$

$$x_2x_1+y_2y_1 = x_3.$$

Es decir,

$$\cos(s-t) = \cos s \ \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t.$$

Ejemplo 43.1

Verifique la fórmula de adición para el coseno: $\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$.

Solución

Partimos del lado izquierdo de la igualdad y utilizaremos la identidad (43.1) y las identidades del ángulo $(-t)$.

$$\begin{aligned}
\cos(s+t) &= \cos(s-(-t)) = \cos s \ \cos(-t) + \operatorname{sen} s \ \operatorname{sen}(-t) \\
&= \cos s \ \cos t + \operatorname{sen} s \ (-\operatorname{sen}(t)) = \cos s \ \cos t - \operatorname{sen} s \ \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Identidades de cofunción 1

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \operatorname{sen} t, \qquad (43.4)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t. \qquad (43.5)$$

Ejemplo 43.2

Verifique la identidad de cofunción $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \operatorname{sen} t$.

Solución
Partimos del lado izquierdo de la igualdad y utilizamos la identidad del coseno de una diferencia de ángulos (43.2)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\frac{\pi}{2}\ \cos t + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t = (0)\ \cos t + (1)\ \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t.$$

Ejemplo 43.3

Verifique la identidad de cofunción $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$.

Solución
Partimos del lado derecho de la igualdad y de la identidad de cofunción para el coseno (43.4) demostrada en el ejemplo 43.2

$$\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

Fórmulas de adición y sustracción para el seno y la tangente

- $\operatorname{sen}(s + t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$.
- $\operatorname{sen}(s - t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$.
- $\tan(s + t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$.

Ejemplo 43.4

Verifiquemos la fórmula de adición: $\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$. Partimos del lado izquierdo de la igualdad y utilizaremos las identidades de cofunción:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(s + t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s + t)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - t\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\ \cos t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\ \operatorname{sen} t\\
&= \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Ejemplo 43.5

Verifiquemos la fórmula de adición: $\tan(s + t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$.

Partimos del lado izquierdo de la igualdad y utilizaremos las fórmulas de adición para el seno y el coseno:

$$\tan(s + t) = \frac{\operatorname{sen}(s + t)}{\cos(s + t)} = \frac{\operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t}{\cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t}.$$

Dividimos el numerador y denominador por la expresión $\cos s \cos t$. Entonces

$$\tan(s+t) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} s \cos t}{\cos s \cos t} + \dfrac{\cos s \operatorname{sen} t}{\cos s \cos t}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t}{\cos s \cos t}} = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}.$$

Identidades de cofunción 2

- $\tan(\frac{\pi}{2} - t) = \cot t$.
- $\cot(\frac{\pi}{2} - t) = \tan t$.
- $\sec(\frac{\pi}{2} - t) = \csc t$.
- $\csc(\frac{\pi}{2} - t) = \sec t$.

Ejemplo 43.6

Calcule $\operatorname{sen} 75°$, utilizando las funciones seno y coseno de los ángulos $30°$ y $45°$.

Solución

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75° &= \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen} 45° \cos 30° + \cos 45° \operatorname{sen} 30° \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Demuestre las identidades de cofunción 2.
2. Determine si la igualdad dada es una identidad.
   (a) $\tan(x + \pi) = -\tan x$,
   (b) $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x)$,
   (c) $\operatorname{sen}(x - \frac{3\pi}{2}) = \cos x$.
3. Encuentre el valor exacto de las siguienes expresiones.
   (a) $\operatorname{sen} 20° \cos 25° + \cos 20° \operatorname{sen} 25°$,
   (b) $\operatorname{sen} 55° \cos 10° - \cos 55° \operatorname{sen} 10°$,
   (c) $\operatorname{sen} 15°$,
   (d) $\cos 75°$.

Lección 44

Identidades trigonométricas VI

En esta lección consideramos más ejemplos sobre verificación de identidades trigonométricas usando las identidades de adición y sustracción.

Ejemplo 44.1

Verifique la identidad $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$.

Solución

$$\begin{aligned}
\cos(x+y)\cos(x-y) &= (\cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y)(\cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y)\\
&= \cos^2 x\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 y\\
&= \cos^2 x(1-\operatorname{sen}^2 y) - (1-\cos^2 x)\operatorname{sen}^2 y\\
&= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 y\cos^2 x\\
&= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y.
\end{aligned}$$

Ejemplo 44.2

Verifique la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} &= \frac{\operatorname{sen}(3x-2x) + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(3x+2x)}{\cos(3x-2x) + \cos(3x) + \cos(3x+2x)}\\
&= \frac{2\operatorname{sen}(3x)\cos(2x) + \operatorname{sen}(3x)}{2\cos(3x)\cos(2x) + \cos(3x)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(3x)(2\cos(2x)+1)}{\cos(3x)(2\cos(2x)+1)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}\\
&= \tan(3x).
\end{aligned}$$

Expresiones de la forma $A\operatorname{sen} x + B\cos x$

Las expresiones de la forma $A\operatorname{sen} x + B\cos x$ siempre pueden escribirse en la forma $k\operatorname{sen}(x+\phi)$ ó $k\cos(x+\phi)$ con $k>0$.

Ejemplo 44.3

Exprese $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ en la forma $k\cos(x+\phi)$.

Solución

$$\begin{aligned} k\cos(x+\phi) &= k\left[\cos x\cos\phi - \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\phi\right] \\ &= k\cos x\cos\phi - k\operatorname{sen} x\operatorname{sen}\phi \\ &= (-k\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen} x + (k\cos\phi)\cos x. \end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad es necesario que

$$-k\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2} \text{ y que } k\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones:

$$k^2\operatorname{sen}^2\phi = \frac{1}{4} \text{ y } k^2\cos^2\phi = \frac{3}{4}.$$

Ahora, sumando:

$$\begin{aligned} k^2\operatorname{sen}^2\phi + k^2\cos^2\phi &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\ , \\ k^2\left(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi\right) &= \frac{4}{4} = 1\ , \\ k^2\ 1 &= 1\ , \\ k &= 1. \end{aligned}$$

De esta forma, como $-k\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}$, entonces $-1\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}$, es decir $\operatorname{sen}\phi = -\frac{1}{2}$. De otra parte, como $k\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $\operatorname{sen}\phi < 0$ y $\cos\phi > 0$, ϕ se encuentra en el IV cuadrante. Por lo tanto, $\phi = -\frac{\pi}{6}$.

Así,

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1\cos\left(x + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ejemplo 44.4

Escriba la función $3\operatorname{sen}\pi x + 3\sqrt{3}\cos\pi x$ sólo en términos de seno.

Solución

Debemos escribir la expresión $3\operatorname{sen}\pi x + 3\sqrt{3}\cos\pi x$ en la forma $k\operatorname{sen}(\pi x+\phi)$, $k>0$.

$$\begin{aligned} k\operatorname{sen}(\pi x+\phi) &= k[\operatorname{sen}\pi x\cos\phi + \cos\pi x\operatorname{sen}\phi] \\ &= k\operatorname{sen}\pi x\cos\phi + k\cos\pi x\operatorname{sen}\phi \\ &= (k\cos\phi)\operatorname{sen}\pi x + (k\operatorname{sen}\phi)\cos\pi x. \end{aligned}$$

Entonces, con base en la expresión inicial:

$$\begin{aligned} k\cos\phi &= 3\ , \\ k^2\cos^2\phi &= 9\ . \end{aligned} \tag{44.1}$$

$$\begin{aligned} k\operatorname{sen}\phi &= 3\sqrt{3}\ , \\ k^2\operatorname{sen}^2\phi &= 27\ . \end{aligned} \tag{44.2}$$

Sumando las expresiones (44.1) y (44.2) tenemos:

$$\begin{aligned} k^2\operatorname{sen}^2\phi + k^2\cos^2\phi &= 27+9\ , \\ k^2(\operatorname{sen}^2\phi+\cos^2\phi) &= 36\ , \\ k^2 &= 36\ , \\ k &= 6\ . \end{aligned}$$

Reemplazando k en (44.1) y (44.2) tenemos:

en (44.1):

$$\begin{aligned} 6\cos\phi &= 3\ , \\ \cos\phi &= \frac{3}{6}\ , \\ \cos\phi &= \frac{1}{2}\ , \end{aligned}$$

en (44.2):

$$\begin{aligned} 6\operatorname{sen}\phi &= 3\sqrt{3}\ , \\ \operatorname{sen}\phi &= \frac{3\sqrt{3}}{6}\ , \\ \operatorname{sen}\phi &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ . \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}\phi > 0$ y $\cos\phi > 0$, entonces ϕ se encuentra en el primer cuadrante, por tanto $\phi = \dfrac{\pi}{3}$. Así:

$$3\operatorname{sen}\pi x + 3\sqrt{3}\cos\pi x = 6\operatorname{sen}\left(\pi x + \tfrac{\pi}{3}\right).$$

Ejercicios

1. Verifique la identidad.
   (a) $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen}x\cos y$.
   (b) $\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2\cos x\operatorname{sen}y$.
   (c) $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$.
   (d) $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$.
   (e) $\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y)} = \dfrac{\tan x + \tan y}{a + \tan x\tan y}$.
   (f) $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$.
   (g) $\cot\,(x+y) = \dfrac{\cot x\cot y - 1}{\cot x + \cot y}$.
   (h) $\cot\,(x-y) = \dfrac{\cot x\cot y + 1}{\cot y - \cot x}$.

(i) $1 - \tan x \tan y = \dfrac{\cos(x+y)}{\cos x \cos y}$.

(j) $\dfrac{\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(7x)}{\cos(3x) - \cos(7x)} = \cot(2x)$.

2. Expresar $\operatorname{sen}(3x)$ en términos de $\operatorname{sen}(x)$.

3. Expresar $\cos(4x)$ en términos de $\cos(x)$.

Lección 45

Identidades trigonométricas VII

En esta lección introduciremos ejemplos adicionales de identidades de adición y sustracción de ángulos.

En algunas ocasiones debemos hallar el valor de una función trigonométrica en un ángulo no común y es útil expresarlo en términos de ángulos más comunes. Para esto podemos usar identidades trigonométricas como las que veremos en esta lección.

Identidades del producto a la suma

En las lecciones anteriores aprendimos que

$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, \tag{45.1}$$

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, \tag{45.2}$$

$$\operatorname{sen}(s-t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t, \tag{45.3}$$

$$\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t. \tag{45.4}$$

A partir de las identidades (45.1), (45.2), (45.3) y (45.4) podemos obtener tres identidades adicionales para el producto de funciones trigonométricas:

- Si sumamos las identidades (45.1) y (45.2), obtenemos la identidad

$$\cos s \cos t = \frac{1}{2}\left[\cos(s-t) + \cos(s+t)\right]. \tag{45.5}$$

- Si restamos las identidades (45.1) y (45.2), obtenemos la identidad

$$\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}\left[\cos(s-t) - \cos(s+t)\right]. \tag{45.6}$$

- Si sumamos las identidades (45.3) y (45.4), obtenemos la identidad

$$\operatorname{sen} s \cos t = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(s-t) + \operatorname{sen}(s+t)\right]. \tag{45.7}$$

Ejemplo 45.1

Calcule el valor exacto de $\cos(20°)\cos(40°) - \operatorname{sen}(20°)\operatorname{sen}(40°)$.

Solución

Usando las identidades (45.5) y (45.6), podemos ver que

$$\begin{aligned}\cos(20°)\cos(40°) - \operatorname{sen}(20°)\operatorname{sen}(40°) &= \frac{1}{2}\left[\cos(-20°) + \cos(60°)\right] - \frac{1}{2}\left[\cos(-20°) - \cos(60°)\right] \\ &= \cos(60°) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 45.2

Exprese $\operatorname{sen}(2x)\cos(7x)$ sólo en términos de suma y resta de senos y cosenos.

Solución

A partir de la identidad (45.7), obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x)\cos(7x) &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2x-7x) + \operatorname{sen}(2x+7x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(-5x) + \operatorname{sen}(9x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(9x)\right].\end{aligned}$$

Identidades de la suma al producto

De igual manera, si tenemos que calcular una suma de seno con seno, coseno con coseno o seno con coseno, podemos usar las fórmulas del producto (45.5), (45.6) y (45.7) en forma inversa para obtener

$$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2\cos\left(\frac{s-t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{s+t}{2}\right), \tag{45.8}$$

$$\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2\cos\left(\frac{s+t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{s-t}{2}\right), \tag{45.9}$$

$$\cos s + \cos t = 2\cos\left(\frac{s+t}{2}\right)\cos\left(\frac{s-t}{2}\right). \tag{45.10}$$

La expresión para $\cos s - \cos t$ se deja como ejercicio para el lector.

Ejemplo 45.3

Calcule el valor exacto de $\cos(195°) + \cos(105°)$.

Solución Usando la identidad (45.10) podemos ver que

$$\begin{aligned}
\cos(195°) + \cos(105°) &= 2\cos\left(\frac{195° + 105°}{2}\right)\cos\left(\frac{195° - 105°}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{300°}{2}\right)\cos\left(\frac{90°}{2}\right) \\
&= 2\cos(150°)\cos(45°) \\
&= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Calcule el valor exacto de:
   (a) $\cos(25°)\operatorname{sen}(70°) - \operatorname{sen}(25°)\cos(70°)$,
   (b) $\cos(10°)\cos(35°) - \operatorname{sen}(10°)\operatorname{sen}(35°)$,
   (c) $\operatorname{sen}(110°)\operatorname{sen}(80°) + \cos(110°)\cos(80°)$.
2. Demuestre las identidades (45.8), (45.9) y (45.10).
3. Halle una expresión para $\cos s - \cos t$.
4. Calcule el valor exacto de:
   (a) $\cos(90°) + \cos(30°)$,
   (b) $\cos(75°) - \cos(15°)$,
   (c) $\operatorname{sen}(105°) + \operatorname{sen}(75°)$.

Lección 46

Identidades trigonométricas VIII

En esta lección consideraremos las identidades trigonométricas del ángulo doble y las identidades del ángulo medio.

Identidades de ángulos dobles

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t, \tag{46.1}$$
$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, \tag{46.2}$$
$$\tan 2t = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t}, \tag{46.3}$$
$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1, \tag{46.4}$$
$$\cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t. \tag{46.5}$$

Las tres primeras identidades se deducen inmediatamente de las identidades para suma de ángulos estudiadas en la lección 43, al escribir $2t = t + t$. Las identidades (46.4) y (46.5) se deducen de la igualdad (46.2), combinada con la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.

Ejemplo 46.1

Verifique cada una de las siguientes identidades:

1. $\cot 2t = \frac{1}{2}(\cot t - \tan t)$,
2. $\tan 3t = \frac{3\tan t - \tan^3 t}{1 - 3\tan^2 t}$,
3. $\cot 2x = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$.

Solución

1. Transformamos el lado derecho de la igualdad:

$$\frac{1}{2}(\cot t - \tan t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} - \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) = \frac{\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t}{2 \operatorname{sen} t \cos t} = \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} 2t} = \cot 2t.$$

2. Transformamos el lado izquierdo de la igualdad:

$$\tan 3t = \frac{\tan 2t + \tan t}{1 - \tan 2t \tan t} = \frac{\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t} + \tan t}{1 - \dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}.\tan t}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan t + \tan t - \tan^3 t}{1-\tan^2 t}}{\dfrac{1-\tan^2 t - 2\tan^2 t}{1-\tan^2 t}} = \frac{3\tan t - \tan^3 t}{1 - 3\tan^2 t}.$$

3. Transformamos el lado izquierdo de la igualdad:

$$\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}.$$

Identidades de producto - suma

- $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right)$,
- $\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)\right)$,
- $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$,
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$

Ejemplo 46.2

Verifique cada una de las siguientes identidades:

1. $\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)\right)$,
2. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$.

Solución

1. Transformamos el lado derecho de la igualdad:

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x\cos y + \cos x \operatorname{sen} y\right) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cos x \operatorname{sen} y\right) = \cos x \operatorname{sen} y.$$

2. Transformamos el lado derecho de la igualdad:

$$\frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\right) + \frac{1}{2}\left(\cos x\cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cos x\cos y\right) = \cos x \cos y.$$

Ejercicios

Verifique cada una de las siguientes identidades:

1. $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$,
2. $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$,
3. $\cos 2t = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t$,
4. $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$,
5. $\dfrac{\cos 2t}{1 + \operatorname{sen} 2t} = \dfrac{\cot t - 1}{\cot t + 1}$,
6. $(\cos^4 t - \operatorname{sen}^4 t) = \cos 2t$.

Lección 47

Identidades trigonométricas IX

En esta lección deduciremos identidades trigonométricas para ángulos medios

Fórmulas para los ángulos medios

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \tag{47.1}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \tag{47.2}$$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}, \tag{47.3}$$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}. \tag{47.4}$$

Los signos de las dos primeras igualdades están determinados por el cuadrante en el cual está $\frac{x}{2}$. La demostración de las dos primeras identidades es inmediata a partir de las identidades para ángulos dobles (46.4) y (46.5). En las igualdades (47.1) y (47.2) se utilizará el signo $+$ o el signo - de acuerdo con el cuadrante en el cual esté el ángulo $\frac{x}{2}$. Este tema lo aclararemos en esta lección.

Ejemplo 47.1

Verifique la identidad

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

En la igualdad (46.4) reemplazamos t por $\frac{x}{2}$; simplificando obtenemos:

$$\frac{\cos x+1}{2}=\cos^2\frac{x}{2}.$$

Luego

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\cos x+1}{2}}.$$

Es interesante estudiar más detenidamente las fórmulas dadas para los ángulos medios, debido a los signos que aparecen en (47.1) y (47.2).

Ejemplo 47.2

Si $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, determine los subintervalos en los cuales el valor $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ es igual al valor $z = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$.

Solución
Debido a (47.1) y teniendo en cuenta que z es positivo, sólo es necesario encontrar los subintervalos en los cuales el signo de $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ es positivo.

Si $0 \leq x \leq 2\pi$, entonces $0 \leq \dfrac{x}{2} \leq \pi$. Es decir el ángulo cuya medida en radianes es $\frac{x}{2}$ está en el primer o segundo cuadrante. Entonces el signo de y es positivo. En consecuencia

$$y = z, \quad \text{si} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Si $-2\pi < x < 0$, entonces $-\pi < \dfrac{x}{2} < 0$. Es decir el ángulo cuya medida en radianes es $\frac{x}{2}$ está en el tercer o cuarto cuadrante. Entonces el signo de y es negativo. En consecuencia

$$y \neq z, \quad \text{si} \quad -2\pi < x < 0.$$

Ejemplo 47.3

Verifique la identidad

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.$$

Solución
Debido a los signos que aparecen en las igualdades (47.1) y (47.2), vamos a considerar dos casos, separando los valores de $\frac{x}{2}$ donde el valor de $\tan \frac{x}{2}$ sea positivo de aquellos donde $\tan \frac{x}{2}$ sea negativo.

Supongamos que $\frac{x}{2}$ está en el primer o en el tercer cuadrante. Entonces x está en el primer o segundo cuadrante. En efecto, si $0 \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$, tenemos que $0 \leq x \leq \pi$ y si $\pi \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{3\pi}{2}$, entonces $2\pi \leq x \leq 3\pi$.

Observemos que para estos valores de $\frac{x}{2}$, $\tan \frac{x}{2} \geq 0$ y para estos valores de x, $\operatorname{sen} x \geq 0$. Observe tambien que $1+\cos x \geq 0$, para todos los valores de x.

Entonces

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{\cos \dfrac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}} = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}.$$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{1+\cos x}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\tan\frac{x}{2} &= \frac{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}}{\sqrt{(1+\cos x)^2}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{(1+\cos x)^2}}\\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.\end{aligned}$$

Supongamos que $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x}{2} < \pi$, ó $\dfrac{3\pi}{2} < \dfrac{x}{2} < 2\pi$, entonces $\pi < x < 2\pi$ en el primer caso y $3\pi < x < 4\pi$ en el segundo caso.

Para estos valores de $\frac{x}{2}$, $\tan\frac{x}{2} \leq 0$ y para estos valores de x, $\operatorname{sen} x \leq 0$. Observe que $1+\cos x \geq 0$, para todos los valores de x.

Entonces

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}} = -\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}.$$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{1+\cos x}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\tan\frac{x}{2} &= -\frac{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}}{\sqrt{(1+\cos x)^2}} = -\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{(1+\cos x)^2}}.\\ &= -\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{(1+\cos x)} = -\frac{-\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Verifique cada una de las siguientes identidades
   (a) $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}$,
   (b) $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$,
   (c) $\cot\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
2. ¿Es la igualdad dada una identidad en el conjunto de los números reales?
   (a) $\sqrt{x^2+6x+9} = x+3$, (b) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$,
3. Si $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, determine los subintervalos en los cuales el valor y es igual al valor de z.
   (a) $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $z = -\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$,
   (b) $y = \cos\frac{x}{2}$, $z = -\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$.

Lección 48

Identidades trigonométricas X

En esta lección consideraremos ejemplos de identidades trigonométricas del ángulo doble y del ángulo medio.

Ejemplo 48.1

Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones, sin emplear calculadora:

a. $\cos(15°)$.

b. $\cos(112.5°)$.

c. $\operatorname{sen}(292.5°)$.

Solución

a. $\cos(15°) = \sqrt{\frac{1+\cos(30°)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$

b. $\cos(112.5°) = -\sqrt{\frac{1+\cos(225°)}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

c. $\operatorname{sen}(292.5°) = -\sqrt{\frac{1-\cos(585°)}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\cos(225°)}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

Ejemplo 48.2

Calcule $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$, $\cos\dfrac{\theta}{2}$ y $\tan\dfrac{\theta}{2}$ a partir de la información proporcionada.

1. $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}, \quad 180° < \theta < 270°.$

2. $\cot\theta = 5, \quad 180° < \theta < 270°.$

Solución

1. $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$, $180° < \theta < 270°$.

   Como $180° < \theta < 270°$, entonces $90° < \dfrac{\theta}{2} < 135°$, luego $\dfrac{\theta}{2}$ está en el segundo cuadrante. Hallemos las funciones trigonométricas para el ángulo medio:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ ,$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{-\frac{1}{\sqrt{10}}} = -3\ .$$

2. $\cot\theta = 5$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

Como $180^\circ < \theta < 270^\circ$, entonces $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$, luego $\frac{\theta}{2}$ está en el segundo cuadrante.

Considerando el punto $(x, y) = (-5, -1)$, ubicado en el tercer cuadrante, como se muestra en la figura:

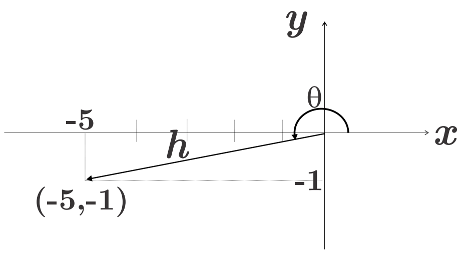


Figura 48.1

Podemos hallar h por teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}\ ,$$
$$h = \sqrt{25+1}\ ,$$
$$h = \sqrt{26}\ .$$

Entonces,

$$\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{26}}.$$

Hallamos entonces las funciones trigonométricas del ángulo medio:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{26}+5}{\sqrt{26}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2\sqrt{26}}}\ ,$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{26}-5}{\sqrt{26}}}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2\sqrt{26}}}\ ,$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2\sqrt{26}}}}{-\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2\sqrt{26}}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{\sqrt{26}-5}}\ .$$

Ejemplo 48.3

Pruebe las siguientes identidades:

1. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$,
2. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Solución

1. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\ ,$

   $\cos 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x\ ,$

   $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\ ,$

   $2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x\ ,$

   $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}\ .$

2. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\ ,$

   $\cos 2x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)\ ,$

   $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1\ ,$

   $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}\ .$

Ejemplo 48.4

Exprese $\operatorname{sen} 3x$ en términos de $\operatorname{sen} x$.

Solución

$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x+x) = \operatorname{sen} 2x\cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x = (2\operatorname{sen} x\cos x)\cos x + (1-2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen}^2 x) + (1-2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x.$

Ejercicios

1. Demuestre que
   (a) $\cos 6x = 1 - 2sen^2 3x\,,$
   (b) $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}\,,$
   (c) $\tan 4x = \dfrac{\operatorname{sen} 8x}{1+\cos 8x}\,.$
2. Pruebe las siguientes identidades:
   (a) $\dfrac{1+\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \dfrac{1}{2}\sec x \csc x\,,$
   (b) $\cot 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\,,$
   (c) $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,,$
   (d) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \tan^2 x = \dfrac{\sec^2 x}{\sec 2x}\;.$
3. Calcule $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$, $\cos\dfrac{\theta}{2}$ y $\tan\dfrac{\theta}{2}$ si se sabe que:
   (a) $\tan\theta = 1$, $0° < \theta < 90°\,,$
   (b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$ y θ en el cuadrante $II\,,$
   (c) $\cos\theta = \frac{3}{7}$ y θ en el cuadrante IV.
4. Exprese $\cos 4x$ en términos de $\cos x$.

Lección 49

Ley de coseno I

En esta lección trataremos el tema de la resolución de triángulos para el caso general en el cual no necesariamente tenemos un ángulo recto. Los lados y ángulos conocidos en un triángulo dado determinan qué método utilizar para resolverlo. Iniciaremos el estudio con la ley del coseno y en próximas lecciones estudiaremos la ley del seno.

Uno de los resultados conocidos que estaremos utilizando a lo largo de esta lección es el siguiente

> "La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, lo cual equivale a π radianes."

Resolución de un triángulo

Resolver un triángulo significa encontrar la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos. Para hacer esto necesitamos conocer la longitud de uno de sus lados. Además, como veremos, se requiere conocer otras dos cantidades.

Conocidos tres datos en un triángulo (entre ellos un lado) tenemos las siguientes cuatro posibilidades:

- Se conocen tres lados.
- Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Se conocen un lado y dos ángulos.

La ***ley del coseno*** se usa para resolver los triángulos en los dos primeros casos y la ***ley del seno*** en los dos últimos casos.

En la figura 49.1 se introduce la notación que usaremos para representar los lados y ángulos del triángulo ΔABC. Denotaremos los ángulos utilizando las letras de los vértices correspondientes. Otra notación usual es usar las correspondientes letras griegas α, β y γ para los ángulos correspondientes a los vértices A, B y C, respectivamente. También se utilizarán estas letras para designar las medidas de los ángulos en grados o en radianes.

Para nombrar los lados y también para designar su longitud utilizaremos, generalmente, las letras minúsculas correspondientes al vértice opuesto.

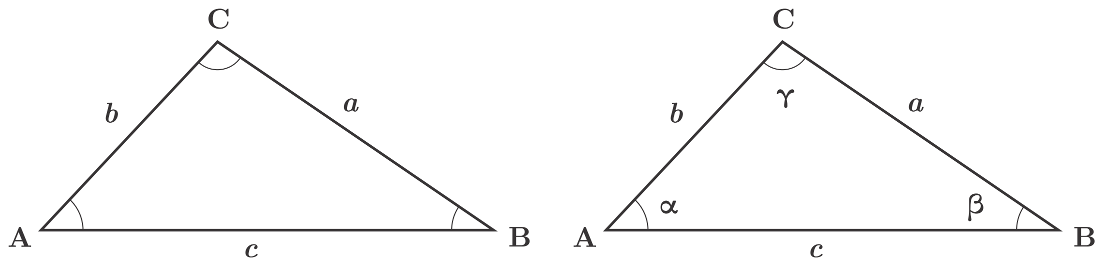


Figura 49.1

Ley de coseno

En cualquier triángulo $\triangle ABC$, como el de la figura 49.1(a),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\ , \qquad (49.1)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B\ , \qquad (49.2)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C\ . \qquad (49.3)$$

Es decir, en cualquier triángulo, el cuadrado de la longitud de cualquiera de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de la longitud de estos dos lados y del coseno del ángulo entre ellos.

La prueba de la ley de coseno es sencilla y usa varios de los conceptos aprendidos en lecciones previas. Por esto vale la pena que la estudiemos a continuación.

Dibujemos el $\triangle ABC$ en el plano cartesiano xy con el $\measuredangle A$ en posición estándar

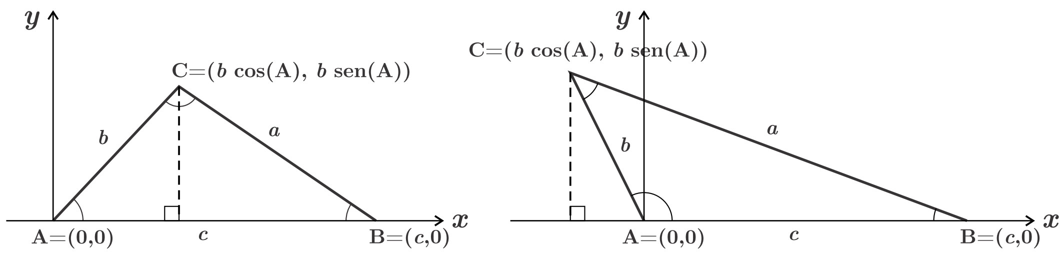


Figura 49.2

Tanto si el ángulo A es agudo como si es obtuso, las coordenadas del vértice B son $(c, 0)$ y las coordenadas del vértice C son $(b\cos A, b\,\mathrm{sen}\,A)$ (¿Por qué?)

Como $a = d(B, C)$ (distancia entre los puntos B y C), entonces:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= [d(B,C)]^2\,,\\
a^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b\,\mathrm{sen}\,A - 0)^2\,,\\
a^2 &= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\,\mathrm{sen}^2\,A\,,\\
a^2 &= b^2(\cos^2 A + \mathrm{sen}^2\,A) - 2bc\cos A + c^2\,,\\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A\,, \quad \text{porque } \cos^2 A + \mathrm{sen}^2\,A = 1\,.
\end{aligned}
$$

En forma similar se prueba el resultado para los otros dos lados b y c.

Observación

Si alguno de los ángulos del triángulo es recto, por ejemplo $A = 90°$, entonces $\cos A = 0$ y la ley de coseno es equivalente al Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$. Por esta razón, la ley del coseno también se suele denominar el teorema de Pitágoras generalizado.

Ejemplo 49.1

Los lados de un triángulo son $a = 20$, $b = 25$, $c = 22$. Encuentre los ángulos del triángulo.

Solución

Notemos que las medidas de los lados del triángulo satisfacen la desigualdad triangular, esta es, en todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante.

Ahora, hagamos un bosquejo del triángulo

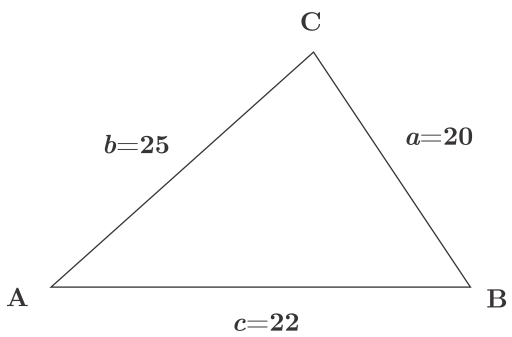


Figura 49.3

Aplicando ley de coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Entonces,

$$\cos A = \frac{(20)^2 - (25)^2 - (22)^2}{-2(25)(22)} \approx 0.644.$$

Luego, $A = 49.87°$.

Similarmente

$$\cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{(25)^2 - (20)^2 - (22)^2}{-2(20)(22)} \approx 0.294.$$

Luego, $B \approx 72.88°$ y

$$\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{(22)^2 - (20)^2 - (25)^2}{-2(20)(25)} \approx 0.541\,,$$

así, $C \approx 57.25°$.

Ejemplo 49.2

Se conocen los tres lados de un triángulo $a = 2, b = 2.5, c = 4$. Determine sus ángulos.

Solución

Determinamos los ángulos mediante las siguientes expresiones, las cuales se deducen inmediatamente de las igualdades (49.1), (49.2) y (49.3):

$$\begin{aligned}
\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= \frac{(2.5)^2 + 4^2 - 2^2}{2(2.5)(4)} = \frac{6.25 + 16 - 4}{20} = \frac{18.25}{20}, \\
A &\approx 24.15°, \\
\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} &= \frac{2^2 + 4^2 - (2.5)^2}{2(2)(4)} = \frac{4 + 16 - 6.25}{16} = \frac{13.75}{16}, \\
B &\approx 30.75°, \\
\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= \frac{2^2 + (2.5)^2 - 4^2}{2(2)(2.5)} = \frac{4 + 6.25 - 16}{10} = \frac{-5.75}{10}, \\
C &\approx 125.10°.
\end{aligned}$$

Observemos que $\cos C$ es negativo. Esto indica que C es un ángulo obtuso, (mayor de $90°$). La suma de A, B y C es $180°$.

Ejercicios

1. Use la ley de coseno para resolver los posibles triángulos ABC que satisfacen las condiciones dadas.

   (a) $a = 65,\ c = 50,\ B = 52°$.

   (b) $b = 60,\ c = 30,\ A = 70°$.

2. Se conocen los dos lados de un triángulo: $a = 2, b = 2.5$ y el ángulo comprendido entre ellos $C = 60°$. Determine sus ángulos restantes y el lado c.

Lección 50

Ley de coseno II

En esta lección continuaremos con el estudio de la ley de coseno y veremos cómo se puede usar para resolver problemas de la vida real. Empecemos con un ejemplo sencillo para recordar cómo se aplica esta ley.

Ejemplo 50.1

Se conocen dos lados de un triángulo $a = 2, b = 2.5$ y el ángulo comprendido entre ellos $C = 60°$. Determine sus ángulos restantes y el lado c.

Solución

Por la ley del coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$:

$$c^2 = 2^2 + (2.5)^2 - 2 \cdot (2) \cdot (2.5)\cos 60° = 4 + 6.25 - 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.25,$$

de donde, $c \approx 2.29$. Para hallar los demás ángulos, puede usarse la ley del coseno.

$$\begin{aligned}
\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &\approx \frac{(2.5)^2 + (2.29)^2 - 2^2}{2(2.5)(2.29)} \approx \frac{6.25 + 5.25 - 4}{11.45} \approx \frac{7.50}{11.45}, \\
A &\approx 49.11°, \\
\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} &\approx \frac{2^2 + 2.29^2 - (2.5)^2}{2(2)(2.29)} \approx \frac{4 + 5.25 - 6.25}{9.16} \approx \frac{3}{9.16}, \\
B &\approx 70.92°.
\end{aligned}$$

Es conveniente revisar nuestros resultados.

Primer método: la suma de los ángulos obtenidos es $A+B+C \approx 49.11° + 70.92° + 60° \approx 180,03°$. Éste es un resultado muy aproximado a $180°$.

Segundo método: podemos confirmar, de nuevo, el valor conocido como un dato del problema, $C = 60°$.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2^2 + (2.5)^2 - (2.29)^2}{2(2)(2.5)} = \frac{4 + 6.25 - 5.24}{10} \approx \frac{5.01}{10}.$$

El ángulo C es aproximadamente $59.96° \approx 60°$.

Respuesta: c es aproximadamente igual a 2.29 y los ángulos son $C = 60°$, A es aproximadamente igual a $49.11°$ y B es aproximadamente igual a $70.92°$.

Ahora si veamos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 50.2 *Aplicación*

Un automóvil viaja por una carretera en dirección Este durante 1 hora, luego viaja durante 30 minutos por otra carretera que se dirige al Noreste. Si el automóvil se desplaza a una velocidad constante de 40 millas/hora, ¿qué tan lejos está de su posición de partida al terminar el recorrido?

Solución

Hagamos un bosquejo de la situación:

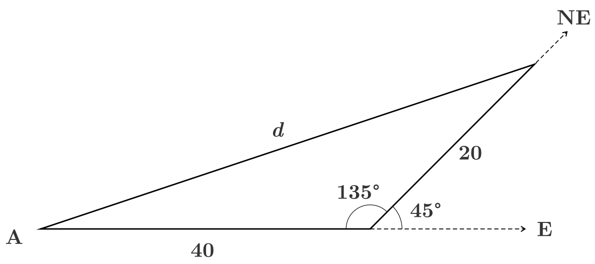


Figura 50.1

Sea d la distancia, en millas, que separa al automóvil del punto de partida. Como

distancia recorrida hacia el Este = 40 millas/hora × 1 hora = 40 millas y
distancia recorrida hacia el Noreste = 40 millas/hora $\times \frac{1}{2}$ hora = 20 millas,
entonces, aplicando la ley de coseno, tenemos:

$$d^2 = 20^2 + 40^2 - 2\,(20)\,(40)\cos(135°) = 2000 - 1600\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 3131.37\,,$$

$$d \approx \sqrt{3131.37} \approx 55.96.$$

Luego, al cabo de hora y media el automóvil está, aproximadamente, a 55.96 millas de su punto de partida.

Ejemplo 50.3 *Aplicación*

Una torre de 125 pies está instalada en una ladera de una montaña que tiene una inclinación de 32° con la horizontal. Debe colocarse un cable guía desde la parte superior de la torre y anclarse en un punto a 55 pies ladera abajo de la base de la torre. Determinar cuál es la magnitud más corta de cable que se necesita.

Solución

Hagamos un bosquejo de la situación:

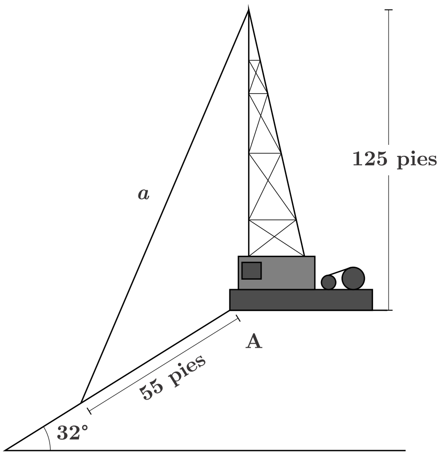


Figura 50.2

Sea a la longitud del cable más corto que se necesita.

Notemos que al trazar una recta paralela a la horizontal en la base de la torre en la figura 50.2 y empleando ángulos alternos internos, podemos concluir que el ángulo que forma la torre con la ladera (A) es $90° + 32° = 122°$ (véase la figura 50.3).

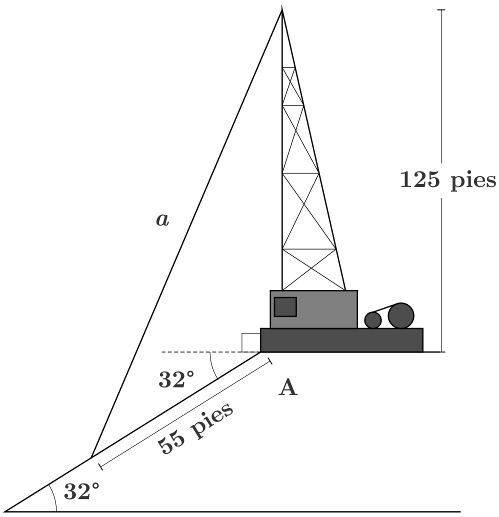


Figura 50.3

Utilizamos la ley de coseno para encontrar la longitud a del cable necesario:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 55^2 + 125^2 - 2(55)(125)\cos 122° \approx 25936.39\,,$$
$$a \approx 161.05\ .$$

Por lo tanto, la longitud del cable más corto que se necesita es de 161.05 pies.

Ejercicios

1. Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65°, es decir, el ángulo entre ellas es de 65°. Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 p.m., uno viaja a 50

kilómetros/h y el otro a 30 kilómetros/h. ¿Qué tan apartados están los automóviles a las 2:30 p.m.?

2. Un piloto vuela en una trayectoria recta durante 1 hora y 30 minutos. Después hace una corrección del curso, en dirección 10° a la derecha de su curso original y vuela 2 horas en la nueva dirección. Si mantiene una velocidad constante de 625 kilómetros/h, ¿qué tan lejos está de su punto de partida?

3. Desde un puesto de observación son detectados dos objetos A y B a distancias de 9 y 8 kilómetros, respectivamente, en relación con el puesto de observación. Si el ángulo entre las líneas de visión hacia los dos objetos es de 140°, ¿cuál es la distancia entre los dos objetos?

4. Un bote navega desde el pueblo A hasta el pueblo B que se encuentra a 100 kms de distancia, sobre la misma margen del río. Luego cambia el rumbo en dirección NE (noreste) y se dirige al punto C. Si la distancia recorrida entre B y C es de 200 kms, ¿cuál es la distancia entre A y C?. ¿Cuál ángulo debe girar el piloto en C para volver al pueblo A?.

Lección 51

Ley de seno I

Como lo mencionamos anteriormente, trataremos el tema de la resolución de triángulos para el caso en el cual no necesariamente tenemos un ángulo recto. Concretamente, consideraremos los siguientes casos:

- Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Se conocen un lado y dos ángulos.

Ley de seno

En cualquier triángulo $\triangle ABC$

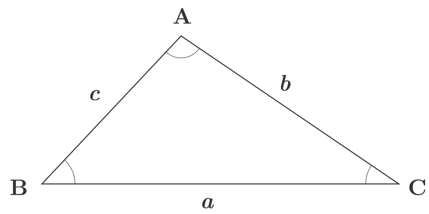


Figura 51.1

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Es decir, en todo triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y la medida del lado opuesto es constante.

Prueba

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Sean h la altura sobre el lado BC y D el pie de dicha altura, es decir, el punto de intersección de la altura con el lado BC.

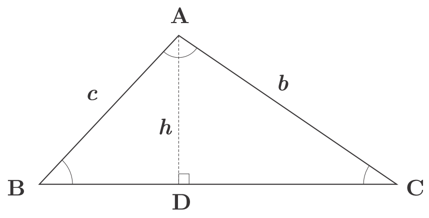


Figura 51.2

Como el $\triangle BDA$ es rectángulo,

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{c}, \text{ o equivalentemente, } h = c \operatorname{sen} B.$$

Además, como el $\triangle ADC$ es rectángulo,

$$\operatorname{sen} C = \frac{h}{b}, \;\text{ o }\; h = b \operatorname{sen} C,$$

y así

$$c \operatorname{sen} B = h = b \operatorname{sen} C.$$

Luego,

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}. \tag{51.1}$$

Tracemos la altura H sobre el lado BA y sea E el pie de dicha altura.

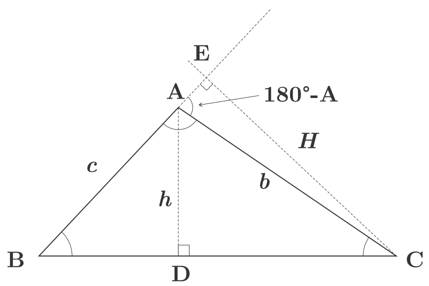


Figura 51.3

Como el $\triangle AEC$ es rectángulo

$$\operatorname{sen}(180° - A) = \frac{H}{b}, \text{es decir, } H = b \operatorname{sen}(180° - A) = b \operatorname{sen} A,$$

ya que $180° - A$ es el ángulo de referencia del ángulo A. Además,

$$H = a \operatorname{sen} B\,,$$

y así

$$b \operatorname{sen} A = H = a \operatorname{sen} B.$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}. \tag{51.2}$$

De (51.1) y (51.2) tenemos que:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Observaciones

Si en un triángulo conocemos un lado y dos ángulos o dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados, podemos usar la ley de seno para resolver el triángulo.

- En el primer caso, conocidos un lado y dos ángulos, el tercer ángulo se calcula usando el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Para hallar cada uno de los otros dos lados aplicamos la ley de seno, usando la proporción entre la razón que involucra el lado conocido y la que involucra el lado que queremos hallar. En este caso existe un único triángulo que cumple las condiciones dadas.

- En el segundo caso, si se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se usa la ley de seno para hallar el ángulo opuesto a uno de los lados conocidos, luego se halla el tercer ángulo y finalmente el tercer lado se calcula usando nuevamente la ley de seno.

  En este caso puede ocurrir que dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo cumplan las condiciones dadas, razón por la cual se conoce como el caso ambiguo.

  Existen cuatro posibilidades, como se muestra en la figura:

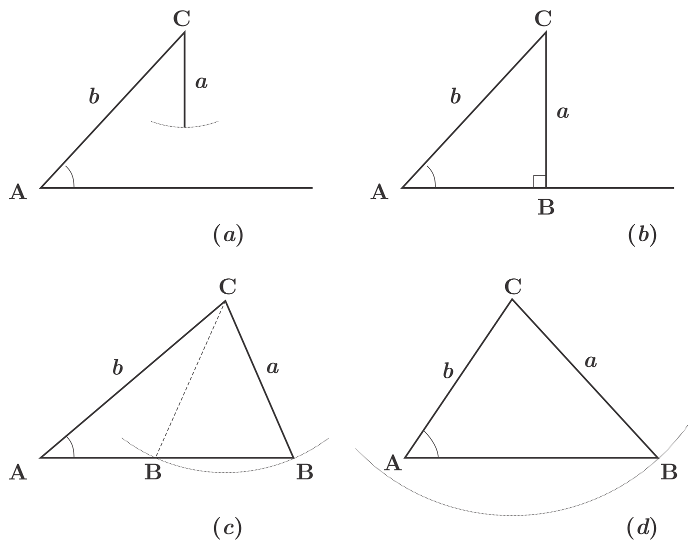


Figura 51.4

En el caso de la Figura 51.4 – (a), no existe un triángulo con las condiciones dadas porque la longitud del lado a es menor que la requerida para formar un triángulo que las cumpla. En la Figura 51.4 – (b), se obtiene un triángulo rectángulo que se resuelve más facilmente usando el Teorema de Pitágoras y la definición de las funciones trigonométricas. En la Figura 51.4 – (c), existen dos triángulos que cumplen las condiciones y por tanto hay dos soluciones posibles y, en la Figura 51.4 – (d), la solución es única.

Ilustremos estas ideas con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 51.1

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$, conocidos los ángulos $A = 70°$, $B = 60°$ y el lado a que mide 2 cms.

Solución En primer lugar hallamos el ángulo C, teniendo en cuenta que $A + B + C = 180°$:

$$C = 180° - 70° - 60° = 50°.$$

Utilizaremos ahora la ley del seno para calcular las longitudes de los lados b y c

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 70°}{2} &= \frac{\operatorname{sen} 60°}{b}, \\
b &= 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 70°} \approx 1.84 \text{ cms}, \\
\frac{\operatorname{sen} 70°}{2} &= \frac{\operatorname{sen} 50°}{c}, \\
c &= 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 70°} \approx 1.63 \text{ cms}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 51.2

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$, si $A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

Solución

Como en el ejemplo anterior, hacemos un bosquejo con la información dada (ver figura 51.4).

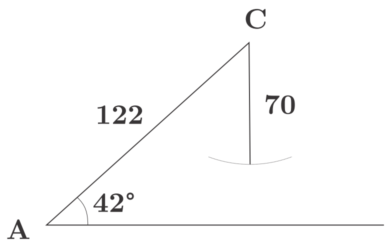


Figura 51.5

Calculemos el ángulo B usando ley de seno:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b},$$

luego

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{122 \operatorname{sen}(42°)}{70} \approx 1.17.$$

Como $\operatorname{sen} A \leq 1$ para todo ángulo A, ya que es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa en un triángulo rectángulo y la longitud de la hipotenusa siempre es mayor que la de cualquiera de los catetos, entonces ningún triángulo satisface las condiciones del problema.

Lección 52

Ley de seno II

En esta lección continuamos con ejemplos de la ley del seno.

Ejemplo 52.1

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$ si $A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$ y $b = 7$.

Solución

Primero, dibujamos un triángulo con la información suministrada. La figura 52.1 es tentativa ya que aún no se conocen los otros ángulos.

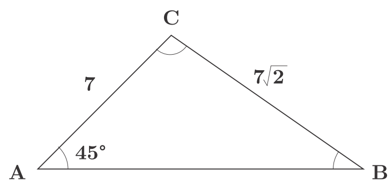


Figura 52.1

Encontremos el ángulo B usando la ley de seno:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}.$$

Luego

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{7 \operatorname{sen} 45°}{7\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Hay dos posibles ángulos B entre $0°$ y $180°$ tales que $\operatorname{sen} B = \frac{1}{2}$, $B = 30°$ y $B = 150°$, pero $B = 150°$ no es solución ya que $150° + 45° > 180°$, es decir, no habría espacio para un tercer ángulo.

Luego, $B = 30°$ y, así, $C = 180° - 45° - 30° = 105°$.

Aplicando nuevamente la ley de seno, podemos hallar la longitud del lado c :

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Por lo tanto,

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \frac{7 \operatorname{sen}(105^\circ)}{\operatorname{sen}(30^\circ)} \approx 13.5.$$

Ejemplo 52.2

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$ si $A = 43.1^\circ$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

Solución

Tracemos un bosquejo del triángulo con los datos del problema (figura 52.2):

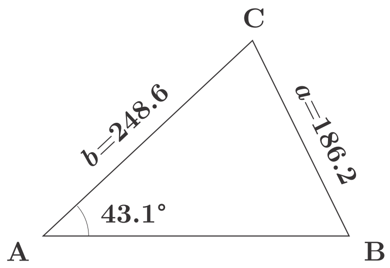


Figura 52.2

Usemos la ley de seno para calcular el ángulo B :

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}.$$

Entonces, $\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{248.6 \operatorname{sen}(43.1^\circ)}{186.2} \approx 0.9192.$

Existen dos ángulos que cumplen esta condición,

$$B \approx 65.82^\circ \text{ y } \quad B' = 180^\circ - 65.82^\circ \approx 114.18^\circ.$$

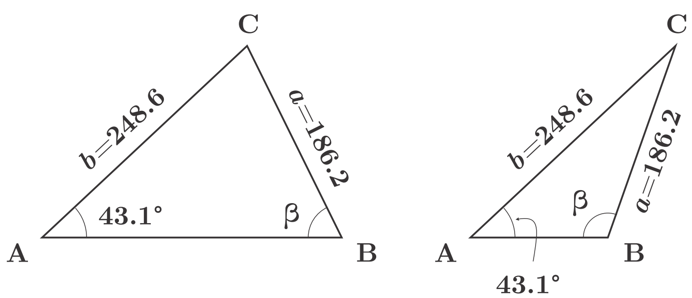


Figura 52.3

Para cada uno de estos valores hay un valor para el tercer ángulo C y C' que satisfacen

$$C = 180^\circ - 43.1^\circ - 65.82^\circ = 71.08^\circ,$$
$$C' = 180^\circ - 43.1^\circ - 114.18^\circ = 22.72^\circ.$$

El tercer lado satisface las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 43.1^\circ}{186.2} &= \frac{\operatorname{sen} C}{c}, \\
c &= \frac{186.2 \operatorname{sen} 71.08^\circ}{\operatorname{sen} 43.1^\circ} &\approx& \quad 257.79, \\
\frac{\operatorname{sen} 43.1^\circ}{186.2} &= \frac{\operatorname{sen} C'}{c'}, \\
c' &= \frac{186.2 \operatorname{sen} 22.72^\circ}{\operatorname{sen} 43.1^\circ} &\approx& \quad 105.25.
\end{aligned}
$$

Luego, hay dos triángulos que satisfacen las condiciones dadas:

$$
\begin{aligned}
&a = 186.2, b = 248.6, c \approx 257.79, \alpha = 43.1^\circ, \beta \approx 65.82^\circ, C \approx 71.08^\circ, \\
&a = 186.2, b = 248.6, c \approx 105.25, \alpha = 43.1^\circ, \beta \approx 114.18^\circ, C \approx 22.72^\circ.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 52.3

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$ si $A = 30^\circ$, $a = 3$ y $b = 4$.

Solución

Empleando la ley de seno:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{3} &= \frac{\operatorname{sen} \beta^\circ}{4}, \\
\operatorname{sen} \beta &= 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{3} &=& \quad 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{3} &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Existen dos ángulos que cumplen esta condición,

$$B \approx 41.81^\circ \text{ y } \ B' = 180^\circ - 41.81^\circ \approx 138.19^\circ.$$

Para cada uno de estos valores hay un valor para el tercer ángulo C y C' que satisfacen

$$
\begin{aligned}
C &= 180^\circ - 30^\circ - 41.81^\circ = 108.19^\circ, \\
C' &= 180^\circ - 30^\circ - 138.19^\circ = 11,19^\circ.
\end{aligned}
$$

El tercer lado satisface las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{3} &= \frac{\operatorname{sen} C}{c}, \\
c &= 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 108.19^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} &\approx& \quad 3 \cdot \frac{0.95}{0.5} &\approx& \quad 5.7, \\
\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{3} &= \frac{\operatorname{sen} C'}{c'}, \\
c' &= 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 11,19^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} &\approx& \quad 3 \cdot \frac{0.19}{0.5} &\approx& \quad 1.14.
\end{aligned}
$$

Luego, hay dos triángulos que satisfacen las condiciones dadas:

$$a = 3, b = 4, c \approx 5.7, \alpha = 30°, \beta \approx 41.81°, C \approx 108.19°,$$
$$a = 3, b = 4, c \approx 1.14, \alpha = 30°, \beta \approx 138.19°, C \approx 11.19°.$$

Ejercicios

Use la ley de seno para resolver los posibles triángulos $\triangle ABC$ que satisfacen las condiciones dadas.

1. $a = 30,\ c = 40,\ A = 37°$,
2. $b = 73,\ c = 82,\ B = 58°$,
3. $c = 628,\ b = 480,\ C = 55°$,
4. $a = 31.5,\ c = 51.8,\ B = 33°$,
5. $c = 25,\ A = 35°,\ B = 68°$,
6. $a = 15,\ A = 112°,\ C = 42°$.

Lección 53

Ley de seno III

En esta lección presentamos algunas aplicaciones de la ley del seno.

Ejemplo 53.1 *Aplicación*

El campanario de la Torre de Pisa en Italia, forma un ángulo de 5.6° con la recta vertical trazada desde la base C de la torre situada en el piso. Una turista se ubica a 105 m de la base C de la torre, en la dirección en la que la torre forma un ángulo agudo con la horizontal. El ángulo de elevación medido por la turista es de 29.2° hasta la parte superior de la torre. Encuentre la longitud de la torre.

Solución

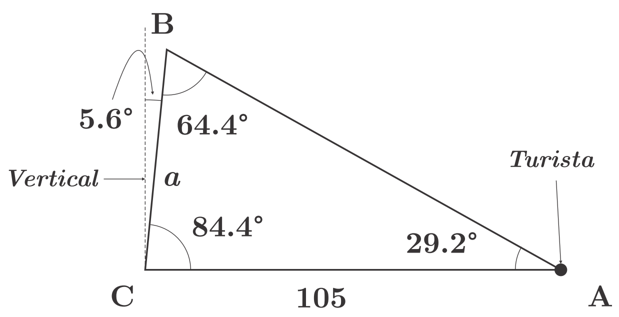


Figura 53.1

Sea a la longitud, en metros, de la Torre. En el triángulo $\triangle ABC$ (figura 53.1) se tiene que:

$C = 90° - 5.6° = 84.4°$, porque 5.6° es el ángulo formado por la torre con la vertical.

$B = 180° - 29.2° - 84.4° = 66.4°$.

Usando la ley de seno tenemos que:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{105},$$

$$a = \frac{105 \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{105 \operatorname{sen}(29.2°)}{\operatorname{sen}(66.4°)} = 55.9 \text{ m}.$$

Luego, la longitud de la torre es aproximadamente 56 m.

Ejemplo 53.2 *Aplicación*

Los puntos A y B están separados por un lago. Para hallar la distancia entre ellos un topógrafo localiza un punto C sobre el suelo tal que $\angle CAB = 48.6°$. También mide $\overline{CA}$ como 312 pies y $\overline{CB}$ como 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B.

Solución

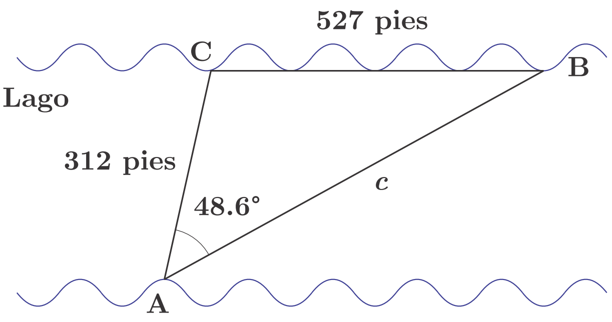


Figura 53.2

Aplicando la ley de seno:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} A}{a} &= \frac{\operatorname{sen} B}{b} \ , \\
\operatorname{sen} B &= \frac{b \operatorname{sen} A}{a} \ , \\
\operatorname{sen} B &= \frac{312 \operatorname{sen} 48.6°}{527} \ , \\
\operatorname{sen} B &\approx 0.44 \ , \\
B &\approx 26.37° \ .
\end{aligned}$$

Podemos hallar la medida del ángulo C:

$$\begin{aligned}
A + B + C = 180° \ , \\
C &= 180° - A - B \ , \\
C &\approx 180° - 48.6° - 26,37° \ , \\
C &\approx 105.03° \ .
\end{aligned}$$

Podemos entonces aplicar la ley de seno para encontrar la distancia entre A y B (c):

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} C}{c} &= \frac{\operatorname{sen} A}{a} \ , \\
a \operatorname{sen} C &= c \operatorname{sen} A \ , \\
c &= \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \ , \\
c &\approx \frac{527 \operatorname{sen} 105.03°}{\operatorname{sen} 48.6°} \ , \\
c &\approx 677.66 \ .
\end{aligned}$$

La distancia entre los puntos A y B es aproximadamente 677.66 pies.

Ejemplo 53.3 *Aplicación*

Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él encuentra que los ángulos de depresión a 2 postes indicadores de millas, a 5 millas de distancia entre si tienen los valores de 32° y 48°, según se observa en la figura 53.3.

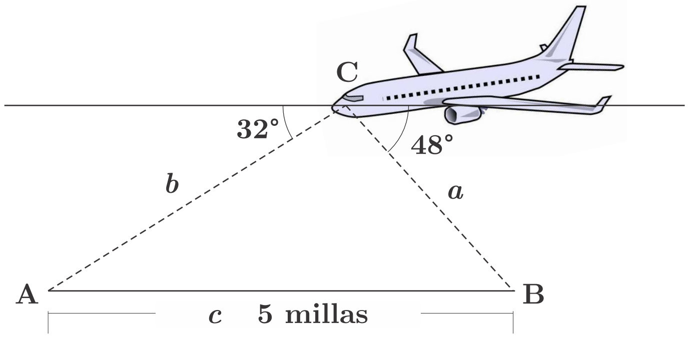


Figura 53.3

1. Determine la distancia del aeroplano al punto A.
2. Determine la altitud del aeroplano.

Solución

1. Distancia del aeroplano al punto A.

Sea b la distancia entre el aeroplano y el punto A.

Según la figura 53.3, usando la igualdad de los ángulos alternos internos, tenemos:

$$B = 48^\circ \ y$$
$$A = 32^\circ \ .$$

Podemos encontrar el valor del ángulo C:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 180^\circ \ , \\ C &= 180^\circ - A - B \ , \\ C &= 180^\circ - 32^\circ - 48^\circ \ , \\ C &= 100^\circ \ . \end{aligned}$$

Utilizando la ley de seno podemos encontrar la distancia entre el aeroplano y el punto A (b):

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} B}{b} &= \frac{\operatorname{sen} C}{c} \ , \\ c \operatorname{sen} B &= b \operatorname{sen} C \ , \\ b &= \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} \ , \\ b &= \frac{5 \operatorname{sen} 48^\circ}{\operatorname{sen} 100^\circ} \ , \\ b &\approx 3.77 \ . \end{aligned}$$

La distancia entre el aeroplano y el punto A es aproximadamente 3.77 millas.

(b) Altitud del aeroplano.

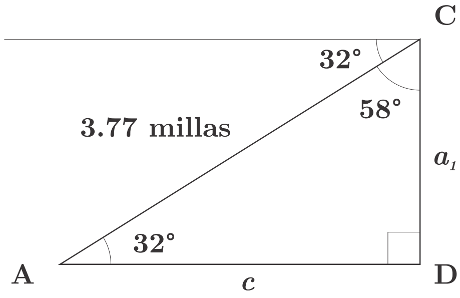


Figura 53.4

Sea a_1 la altitud del aeroplano.

Aplicando la ley de seno podemos hallar el valor de a_1:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} A}{a_1} &= \frac{\operatorname{sen} D}{3.77} \ , \\
3.77 \operatorname{sen} A &= a_1 \operatorname{sen} D \ , \\
a_1 &= \frac{3.77 \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} D} \ , \\
a_1 &\approx \frac{3.77 \operatorname{sen} 32°}{\operatorname{sen} 90°} \ , \\
a_1 &\approx 1.99 \ .
\end{aligned}
$$

La altitud del aeroplano es aproximadamente 1.99 millas.

Ejercicios

1. En las orillas opuestas de un río se sitúan dos puntos A y B. En la orilla donde está situado el punto A se determina un tercer punto C a una distancia de 275 m y se miden los ángulos $CAB = 125°$ y $ACB = 48°$. Encuentre la distancia del punto A al punto B.

2. Sobre un peñasco situado en la ribera de un río se levanta una torre de 125 m de altura. Desde el extremo superior de la torre, el ángulo de depresión de un punto situado en la orilla opuesta es de 28° y desde la base de la torre, el ángulo de depresión del mismo punto es de 18°. Encuentre el ancho del rio y la altura del peñasco.

3. Una antena de radio de onda corta está apoyada por dos cables cuyas longitudes son 165 y 185 pies. Los cables tienen un extremo en la parte superior de la antena y los otros extremos están anclados en puntos del suelo localizados en lados opuestos del pie de la antena. El cable más corto forma un ángulo de 67° con el suelo. ¿Qué tan apartados están los puntos de anclaje?

4. En este ejercicio se trata de reconocer cuál es la estrategia conveniente para resolver el triángulo ΔABC a partir de los datos conocidos y determinar si es posible resolver el triángulo y si se debe utilizar la ley del seno o la ley del coseno. Véase la figura 53.5.

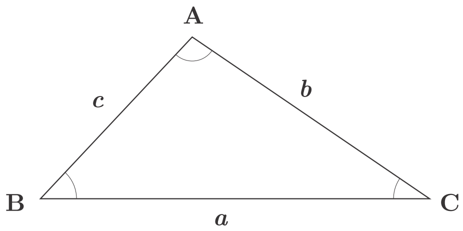


Figura 53.5

   (a) Conocidos los lados a y c y el ángulo C.

   (b) Conocidos los tres ángulos A, B y C.

   (c) Si se conoce que el triángulo es rectángulo y se conocen dos lados del triángulo.

   (d) Si se conoce que el triángulo es rectángulo y se conocen dos lados a y c y $C = 90°$.

Lección 54

Ecuaciones trigonométricas I

En las tres lecciones siguientes estudiaremos la solución de ecuaciones trigonométricas. Las ecuaciones más sencillas serán consideradas en esta lección y las resolveremos usando las identidades fundamentales. Utilizaremos como herramientas auxiliares la circunferencia trigonométrica y las gráficas de las funciones trigonométricas.

Una ***ecuación trigonométrica*** es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas. A diferencia de las identidades trigonométricas, esta igualdad no tiene que satisfacerse para todos los valores posibles de las variables.

En la mayoría de los casos nos interesa encontrar aquellos valores de la variable para los cuales se satisface la igualdad. Esto es lo que se conoce como ***resolver la ecuación***. Los valores de la variable que satisfacen la igualdad se llaman ***soluciones*** de la ecuación.

Generalmente la variable de una ecuación trigonométrica es un número real, con el cual se representa el valor de un ángulo dado en radianes.

Para resolver una ecuación trigonométrica es importante tener en cuenta las siguientes observaciones:

1. Siempre es necesario mirar el conjunto en el cual estamos buscando la solución. En caso de que no se conozca este conjunto, suponemos que éste es el conjunto de los números reales.

2. Podemos aplicar todos los métodos que se utilizan para simplificar y resolver ecuaciones algebraicas.

3. Es importante recordar que las funciones trigonométricas pueden tener el mismo valor en cuadrantes diferentes, por lo cual hay que tener cuidado de tomar todos los valores posibles del ángulo.

4. Como las funciones trigonométricas son periódicas entonces es necesario considerar todos los valores posibles de la variable independiente en un intervalo de longitud igual al período y luego considerar todos los demás ángulos; esto se logra sumando a las soluciones previamente halladas un múltiplo entero del período de la función trigonométrica involucrada.

5. Con el propósito de hallar todas las soluciones posibles de una ecuación trigonométrica podemos utilizar muy diversos recursos, estudiados anteriormente tales como los ángulos de referencia, el círculo trigonométrico, la gráfica de las funciones trigonométricas, entre otros. En los diversos ejemplos exploraremos cada uno de ellos.

6. Al efectuar operaciones algebraicas tales como elevar una expresión a una potencia, o multiplicar por un factor dado, pueden introducirse soluciones extrañas a la ecuación original, es decir, valores que no son soluciones de ésta. Por este motivo es necesario verificar las soluciones en la ecuación original.

Ejemplo 54.1

Determine si $t = \frac{\pi}{2}$ es solución de la ecuación $\operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{2}) = -1$. ¿Es $t = \pi$ una solución de la ecuación?

Solución

Reemplazamos t por $\frac{\pi}{2}$ en la ecuación dada. El resultado es

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\pi) = 0 \neq -1.$$

Concluimos que $\frac{\pi}{2}$ no es solución. Ahora reemplazamos t por π en la ecuación dada. El resultado es

$$\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Así $t = \pi$ es una solución de la ecuación dada.

Ejemplo 54.2

Resuelva la ecuación $2\cos t = \cot t$, para $0 \leq t < 2\pi$.

Solución

Primero hacemos transformaciones para simplificar la ecuación:

$$\begin{aligned}
2\cos t - \cot t = \cos t\left(2 - \frac{1}{\operatorname{sen} t}\right) &= 0, \\
\cos t = 0 \quad \text{ó} \quad \left(2 - \frac{1}{\operatorname{sen} t}\right) &= 0, \\
\cos t = 0 \quad \text{ó} \quad 2\operatorname{sen} t - 1 &= 0, \\
\cos t = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} t &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Consideramos ahora las dos últimas ecuaciones. Las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ tienen período igual a 2π; por ésto estudiaremos las soluciones de estas ecuaciones en el intervalo $0 \leq t < 2\pi$. Usaremos la circunferencia trigonométrica como herramienta auxiliar.

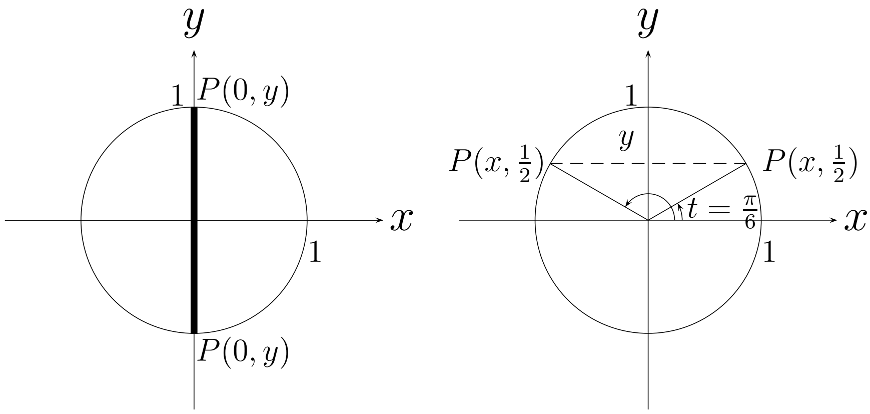


Figura 54.1

Recordemos que en la circunferencia trigonométrica las abscisas del punto P representan a la función coseno y las ordenadas a la función seno.

Si $\cos t = 0$ entonces las abscisas de P son cero. Esta situación ocurre en la intersección del eje y con la circunferencia unitaria, es decir cuando $t = \frac{\pi}{2}$ ó $t = \frac{3\pi}{2}$. Véase la gráfica izquierda de la figura 54.1.

Si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ entonces las ordenadas de P son iguales a $\frac{1}{2}$. Esta situación ocurre en dos puntos P sobre la circunferencia unitaria uno en el primer cuadrante y otro en el segundo.

Un ángulo en el primer cuadrante tal que $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ es $\frac{\pi}{6}$ y en el segundo cuadrante un ángulo correspondiente al ángulo de referencia $\frac{\pi}{6}$ es $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Véase la gráfica derecha de la figura 54.1.

En resumen:

- $\cos t = 0$, si $t = \frac{\pi}{2}$ ó $t = \frac{3\pi}{2}$.
- $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$, si $t = \frac{\pi}{6}$ ó $t = \frac{5\pi}{6}$.

Verifiquemos ahora nuestros resultados reemplazando los valores de t en la ecuación original

- $t = \frac{\pi}{2}$: $2\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 = \cot(\frac{\pi}{2})$.
- $t = \frac{3\pi}{2}$: $2\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 = \cot(\frac{3\pi}{2})$.
- $t = \frac{\pi}{6}$: $2\cos(\frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \cot(\frac{\pi}{6})$.
- $t = \frac{5\pi}{6}$: $2\cos(\frac{5\pi}{6}) = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3} = \cot(\frac{5\pi}{6})$.

Así, todos los valores de t que obtuvimos son soluciones de la ecuación.

Respuesta: Las soluciones de la ecuación $2\cos t = \cot t$, para $0 \le t < 2\pi$ son: $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{6}$ y $t = \frac{5\pi}{6}$.

Ejemplo 54.3

Encuentre la solución de la ecuación $\cos^4 t{+}1 = \operatorname{sen}^2 t$ en el intervalo cerrado $[-2\pi, 2\pi]$.

Solución
Expresamos los valores en términos de la función coseno. Trasponiendo términos y luego utilizando la identidad pitagórica obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos^4 t + 1 - \operatorname{sen}^2 t &= 0,\\
\cos^4 t + \cos^2 t &= 0,\\
\cos^2 t(\cos^2 t + 1) &= 0,\\
\cos^2 t = 0 \text{ ó } \cos^2 t &= -1.
\end{aligned}$$

Como el cuadrado de un número real no puede ser igual a -1, sólo se puede cumplir la primera igualdad. Es decir,

$$\cos^2 t = 0.$$

Por lo tanto

$$\cos t = 0.$$

Para analizar la ecuación $\cos t = 0$, en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, debemos considerar los ángulos que recorren la circunferencia trigonométrica en el sentido positivo y negativo. Los números t en el intervalo $[2\pi, 2\pi]$ que satisfacen la ecuación $\cos t = 0$ son:

$$t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}, t = -\frac{\pi}{2}, \text{ y } t = -\frac{3\pi}{2}.$$

Ejemplo 54.4

Resuelva la ecuación trigonométrica $\csc^2 t = 2\cot^2 t$, para t en el conjunto de los números reales.

Solución

Primero hacemos transformaciones para simplificar la ecuación. Como $\csc^2 t = 1 + \cot^2 t$, (identidad pitagórica) entonces la ecuación dada se trasforma en

$$1 + \cot^2 t = 2\cot^2 t,$$

es decir

$$\cot^2 t = 1.$$

Luego

$$\cot t = 1 \quad \text{ó} \quad \cot t = -1.$$

Recordemos que la función cotangente es periódica con período π. Consideramos las soluciones de las dos últimas ecuaciones en el intervalo $0 \le t \le \pi$. Utilizaremos la gráfica de la función cotangente como auxiliar. Véase la figura 54.2. Con líneas punteadas hemos representado los valores $z = 1$ y $z = -1$ en el intervalo $[0, \pi)$.

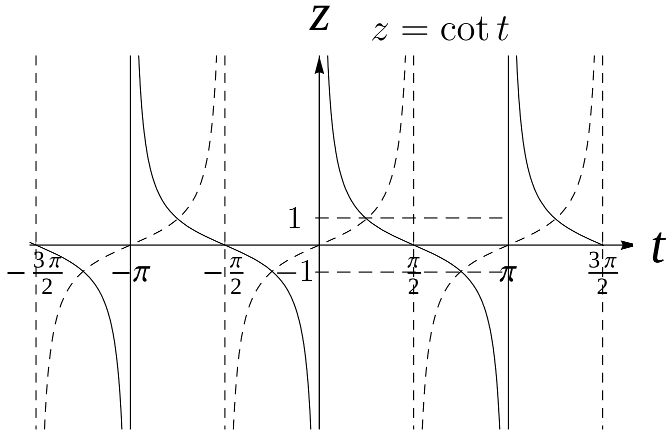


Figura 54.2

- $\cot t = 1$. Hay un solo valor t en el intervalo $[0, \pi)$, $t = \frac{\pi}{4}$.
- $\cot t = -1$. Hay un solo valor t en el intervalo $[0, \pi)$, $t = \frac{3\pi}{4}$.

Verifiquemos ahora nuestros resultados. Reemplazamos por ejemplo $t = \frac{3\pi}{4}$:

$$\csc^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{4}{2} = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \cot^2\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Por tanto $t = \frac{3\pi}{4}$ es solución de la ecuación. Igualmente se puede verificar que $t = \frac{\pi}{4}$ también es solución de la ecuación.

Ahora vamos a considerar todos los números reales que satisfacen la ecuación. Como la función cotangente es periódica y tiene período π, obtenemos que la solución de la ecuación son todos los números reales t que satisfacen:

$$t = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$
$$t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas en el conjunto dado.
   (a) $\cos z = -\frac{1}{2}$, $0 \leq z < 2\pi$, (b) $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\theta \in \mathbb{R}$. (c) $\tan^2\theta = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.
   (d) $\operatorname{sen}^2\theta = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, (e) $\operatorname{sen} w = -1$, $w \in \mathbb{R}$. (f) $\cos z = \cot z$, $0 \leq z < 2\pi$.
2. Encuentre la solución general en grados de la ecuación

$$\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lección 55

Ecuaciones trigonométricas II

En esta lección estamos interesados en el estudio de algunas ecuaciones trigonométricas que requieren un análisis más completo para su solución.

Ejemplo 55.1

Determine los números reales x, para los cuales se cumple la ecuación:

$$\cot x \tan x = 1. \tag{55.1}$$

Solución
Cuando se trabaja con funciones para las cuales hay restricción del dominio, deben tenerse en cuenta los números que deben excluirse.

Así, dado que

$$\cot x \tan x = \frac{\tan x}{\tan x} = 1,$$

la igualdad (55.1) es una identidad para todos los puntos del dominio de las funciones $\tan x$ y $\cot x$. La solución de la ecuación trigonométrica (55.1) es el conjunto de todos los números reales, con excepción de los números reales de la forma $x = n\frac{\pi}{2}$ con n entero.

Ejemplo 55.2

Encuentre la solución de la ecuación $2\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t - 3 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.
Solución
Observamos que esta ecuación tiene la forma de una ecuación de segundo grado. Hacemos un cambio de variable para que se facilite su solución. Definimos $w := \operatorname{sen} t$. Reemplazamos en la ecuación y obtenemos:

$$2w^2 - w - 3 = 0.$$

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$w = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}.$$

Tenemos dos posibilidades:

$$w_1 = -1 \qquad \text{ó} \qquad w_2 = \frac{3}{2}.$$

Reemplazamos el valor de w y obtenemos

$$\operatorname{sen} t = -1 \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{sen} t = \frac{3}{2}.$$

Como el valor de seno no puede ser mayor que 1, se descarta la segunda opción. Resolvemos la ecuación $\operatorname{sen} t = -1$, utilizando la circunferencia trigonométrica como auxiliar. Recordemos que en la circunferencia trigonométrica las abscisas del punto P representan a la función coseno y las ordenadas a la función seno.

Si $\operatorname{sen} t = -1$ entonces la ordenada de P es igual a -1; esta situación ocurre en la intersección del eje y con la circunferencia unitaria. Es decir, cuando $P(0, -1)$ (véase la figura 55.1. El valor correspondiente de t es $t = \frac{3\pi}{2}$.

En resumen: en el intervalo $[0, 2\pi)$ la única solución de la ecuación $2 \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t - 3 = 0$ es $t = \frac{3\pi}{2}$.

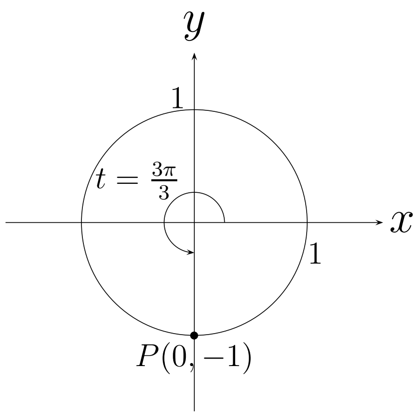


Figura 55.1

Ejemplo 55.3

Encuentre la solución de la ecuación trigonométrica

$$2\cos^2 t + \cos t - 1 = 0, \ \textbf{para} \ 0 \leq t < 2\pi.$$

Solución

Observe que ésta es una ecuación cuadrática en $\cos t$. Entonces

$$\cos t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$
$$\cos t = \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \cos t = -1.$$

Recordemos que en la circunferencia trigonométrica la abscisa del punto P representa a la función coseno y la ordenada a la función seno.

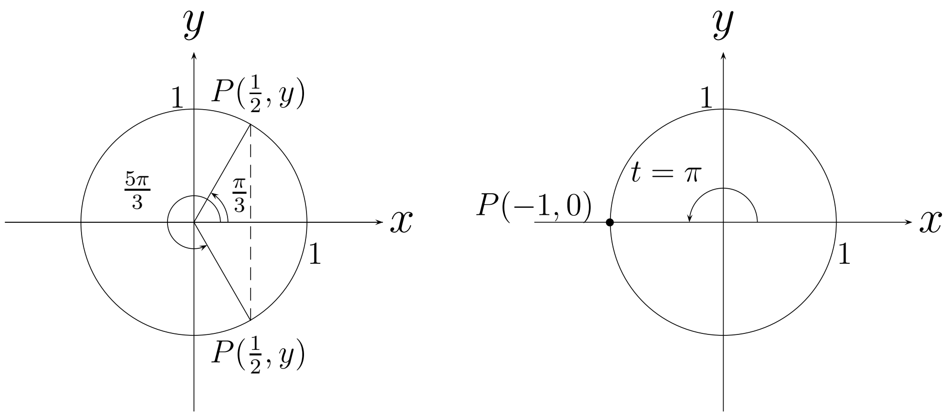


Figura 55.2

Hallemos los valores de t para los cuales $\cos t = \frac{1}{2}$. Trazamos una línea vertical con abscisa igual a $\frac{1}{2}$. Hay dos puntos en la intersección de esta recta con la circunferencia unitaria. Véase la gráfica izquierda de la figura 55.2. En el intervalo $0 \leq t < 2\pi$, los valores correspondientes de t son $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{5\pi}{3}$

Hallemos los valores de t para los cuales $\cos t = -1$. El único punto P en la circunferencia unitaria con abscisa igual a -1 es $P(-1, 0)$. Este punto corresponde al ángulo $t = \pi$ (véase la gráfica derecha de la figura 55.2).

En resumen:

$$\cos t = \frac{1}{2} \text{ si } t = \frac{\pi}{3} \quad \text{ó} \quad t = \frac{5\pi}{3},$$
$$\cos t = -1 \text{ si } t = \pi.$$

Al igual que en el ejercicio anterior debe investigarse si los valores de t obtenidos son en efecto soluciones de la ecuación original. Fácilmente se verifica que todos los valores de t son soluciones de la ecuación. La respuesta es $t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{5\pi}{3}$ y $t = \pi$.

Ejemplo 55.4

Encuentre la solución general de la ecuación

$$\cos 2x = \cos x.$$

Solución
Utilizamos la identidad del ángulo doble: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. De esta manera la ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x - 1 &= \cos x, \\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 &= 0 \\ \cos x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}, \\ \cos x &= 1 \quad \text{ó} \quad \cos x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Resolvemos estas ecuaciones en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$:

$$\begin{aligned}
&\cos x = 1 \text{ si } x = 0, \\
&\cos x = -\frac{1}{2}, \text{ si } x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ó} \quad x = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Debemos verificar si los valores de x obtenidos son en efecto soluciones de la ecuación original.

- $x = 0$: $\cos(2 \times 0) = 1 = \cos 0$. Conclusión: $x = 0$ si es solución de la ecuación.
- $x = \frac{2\pi}{3}$: $\cos(2 \times \frac{2\pi}{3}) = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} = \cos(\frac{2\pi}{3})$. Conclusión: $x = \frac{2\pi}{3}$ si es solución de la ecuación.
- $x = \frac{4\pi}{3}$: $\cos(2 \times \frac{4\pi}{3}) = \cos \frac{8\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} = \cos(\frac{4\pi}{3})$. Conclusión: $x = \frac{4\pi}{3}$ si es solución de la ecuación.

Entonces las soluciones de la ecuación dada, tales que $0 \leq x < 2\pi$ son: $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$ y $x = \frac{4\pi}{3}$.

Debido a que no se ha puesto condición sobre el conjunto al cual debe pertenecer el número real x, se considerará que x es cualquier número real.

En consecuencia la respuesta es

$$\begin{aligned}
&x = 2k\pi, \\
&x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{y} \\
&x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{donde } \ k \text{ es un número entero.}
\end{aligned}$$

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas en el conjunto indicado.

1. $2 \operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0$, $0 \leq t < 2\pi$,

2. $\operatorname{sen}^2 t + 2 \cos t + 2 = 0$, $0 \leq t < 360°$,

3. $2 \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t = 0$, $\quad t \in \mathbb{R}$,

4. $\cos 2t + \operatorname{sen}^2 t = 0$, $0 \leq t < 2\pi$.

Lección 56

Ecuaciones trigonométricas III

En la solución de las ecuaciones trigonométricas con frecuencia algunas operaciones algebraicas alteran la ecuación original. Es posible que surjan algunas soluciones de las ecuaciones intermedias que no son soluciones de la ecuación original. Éstas son comúnmente llamadas soluciones extrañas. Este tema será considerado en esta lección. También nos detendremos en la solución de ecuaciones que involucran ángulos dobles y medios.

Ejemplo 56.1

Resuelva la ecuación trigonométrica:

$$\cos t + \operatorname{sen} t = 1, 0 \leq t < 2\pi.$$

Solución
Elevamos al cuadrado ambos lados de la iguadad

$$\begin{aligned}
(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 &= 1,\\
\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t &= 1,\\
1 + 2\operatorname{sen} t \cos t &= 1,\\
2\operatorname{sen} t \cos t &= 0,\\
\operatorname{sen} t = 0 \quad \text{ó} \quad \cos t &= 0.
\end{aligned}$$

Resolvemos estas dos últimas ecuaciones en el intervalo $0 \leq t < 2\pi$:

- $\operatorname{sen} t = 0$ si $t = 0 \quad$ ó $\quad t = \pi$,
- $\cos t = 0,$ si $t = \frac{\pi}{2} \quad$ ó $\quad t = \frac{3\pi}{2}$.

Debido a que elevamos al cuadrado, es posible que hayan surgido soluciones extrañas. Debemos verificar si los valores de t obtenidos son en efecto soluciones de la ecuación original.

- $t = 0$: $\cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 1 + 0 = 1$. Conclusión: $t = 0$ si es solución de la ecuación.
- $t = \pi$: $\cos\pi + \operatorname{sen}\pi = -1 + 0 \neq 1$. Conclusión: $t = \pi$ no es solución de la ecuación originalmente dada.
- $t = \frac{\pi}{2}$: $\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1$. Conclusión: $t = \frac{\pi}{2}$ si es solución de la ecuación.
- $t = \frac{3\pi}{2}$: $\cos\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 + (-1) = -1 \neq 1$. Conclusión: $t = \frac{3\pi}{2}$ no es solución de la ecuación.

Respuesta: las soluciones t de la ecuación $\cos t + \operatorname{sen} t = 1$ tales que $0 \leq t < 2\pi$ son $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 56.2

Encuentre la solución de la ecuación trigonométrica:

$$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0, \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

Solución
Reemplazamos $\cos x$ por y para escribir la ecuación como un polinomio de grado 3 en y. La ecuación trigonométrica se transforma en

$$2y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0.$$

Puesto que $y = 1$ es una raíz de la ecuación, tenemos:

$$2y^3 - 2y^2 - y + 1 = (y-1)(2y^2 - 1).$$

Entonces

$$y = 1 \qquad \text{ó} \quad 2y^2 - 1 = 0.$$

Esto es:

$$\cos x = 1 \quad \text{ó} \quad 2\cos^2 x - 1 = 0.$$

Para la ecuación $\cos x = 1$, tenemos la solución $x = 0$.

Para la ecuación $2cos^2 x - 1 = 0$ tenemos que:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2},$$
$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Así, x puede tomar los siguientes valores: $x = \frac{\pi}{4}$ ó $x = \frac{3\pi}{4}$ ó $x = \frac{5\pi}{4}$ ó $x = \frac{7\pi}{4}$.

Después de verificar las soluciones en la ecuación trigonométrica original obtenemos que las soluciones de la ecuación en el intervalo dado son $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$.

Ejemplo 56.3

Resuelva la ecuación trigonométrica: $\operatorname{sen} 2x = -1, 0 \leq x < 2\pi$.

Solución
Por tratarse de un ángulo doble, este ejercicio tiene aspectos nuevos que debemos mirar con atención. Vamos a resolver esta ecuación por dos métodos diferentes

1. Mientras el ángulo $2x$ efectúa una rotación completa ente 0 y 2π, el ángulo x varía entre 0 y π. Si queremos que x varíe en el intervalo $[0, 2\pi)$ debemos permitir que $2x$ tome valores en el intervalo $[0, 4\pi)$.

   Resolvemos la ecuación $\operatorname{sen} 2x = -1$, tal que $0 \leq 2x < 4\pi$ y obtenemos $2x = \frac{3\pi}{2}$ ó $2x = \frac{7\pi}{2}$. Así

   $$x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

2. En el segundo método tomamos en cuenta que el período de la función $y = \operatorname{sen} 2x$ es π. Es decir, el intervalo correspondiente a un ciclo completo de la función $y = \operatorname{sen} 2x$ tiene longitud π. Véase la lección 36.

   Debido a que la única solución de la ecuación $\operatorname{sen} 2x = -1$ para $x \in [0, \pi)$ es $2x = \frac{3\pi}{2}$, tenemos que $x = \frac{3\pi}{4}$ es la única solución de la ecuación $\operatorname{sen} 2x = -1$, para $x \in [0, \pi)$.

   Así, teniendo en cuenta el período de la función $\operatorname{sen} 2x$, la solución general de la ecuación $\operatorname{sen} 2x = -1$ tiene la forma:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

   De este número infinito de soluciones seleccionamos aquellas que satisfacen la condición: $0 \leq x < 2\pi$ y verifican la ecuación original. Obtenemos:

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ y } x = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}.$$

   Rta: $x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$.

Ejemplo 56.4

Encuentre la solución general de la ecuación trigonométrica: $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = 0$.

Solución

Utilizamos la identidad del seno del ángulo doble aplicada al ángulo $4x$: $\operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x &= 0, \\ \operatorname{sen} 2x(1 + 2\cos 2x) &= 0, \\ \operatorname{sen} 2x = 0 \quad \text{ó} \quad \cos 2x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para resolver las ecuaciones es conveniente revisar los comentarios en el ejemplo 56.3. Debido a que el período de las funciones $y = \operatorname{sen} 2x$ y $y = \cos 2x$ es π, resolvemos las ecuaciones en el intervalo $[0, \pi)$. Para la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x = 0, \quad \text{para } 0 \leq x < \pi,$$

obtenemos que

$$2x = 0 \text{ ó } 2x = \pi.$$

Es decir,

$$x = 0 \text{ ó } x = \frac{\pi}{2}.$$

Para la ecuación

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \quad \text{para } 0 \leq x < \pi,$$

obtenemos que

$$2x = \frac{2\pi}{3} \text{ ó } 2x = \frac{4\pi}{3}.$$

Es decir,

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ ó } x = \frac{2\pi}{3}.$$

Después de verificar que los valores de x son soluciones de la ecuación original, obtenemos que la solución general es

$$x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ y } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ para } k \text{ cualquier número entero.}$$

Ejercicios

1. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} t = \cos t - 1$, en el intervalo $[0, 2\pi)$.
2. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas en el conjunto indicado
   (a) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1, 0 \leq x < \pi$,
   (b) $\cos 2t + \cos t = 0, t \in \mathbb{R}$,
   (c) $\operatorname{sen} 3t = 1, 0 \leq t < 2\pi$,
   (d) $\cos 4t = 0, 0 \leq t < 2\pi$,
   (e) $\operatorname{sen} 4t = 0, t \in \mathbb{R}$,
   (f) $\operatorname{sen} 4t = 1, t \in \mathbb{R}$.

Lección 57

Ecuaciones trigonométricas IV

En la presente lección consideramos más ejemplos típicos de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 57.1

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$3\tan^3 x - 3\tan^2 x - \tan x + 1 = 0.$$

Solución

Podemos factorizar:

$$\begin{aligned} 3\tan^2 x(\tan x - 1) - (\tan x - 1) =& 0, \\ (3\tan^2 x - 1)(\tan x - 1) =& 0, \\ (\sqrt{3}\tan x + 1)(\sqrt{3}\tan x + 1)(\tan x - 1) =& 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{3}\tan x + 1 = 0 \quad \text{ó} \quad \sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad \tan x - 1 = 0.$$

Es decir,

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ó} \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{ó} \quad \tan x = 1.$$

Puesto que la función tangente es periódica, con período π, hallemos las soluciones en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ si $x = -\dfrac{\pi}{6}$, $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ si $x = \dfrac{\pi}{6}$ y $\tan x = 1$ si $x = \dfrac{\pi}{4}$. Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación están dadas por

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{donde } k \text{ es un número entero.}$$

Ejemplo 57.2

Solucione la ecuación trigonométrica

$$\sec x - \tan x = \cos x.$$

Solución

Escribamos la ecuación en términos de las funciones seno y coseno y simplifiquemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \cos x =& 0,\\ \frac{1 - \operatorname{sen} x - \cos^2 x}{\cos x} =& 0.\end{aligned}$$

La fracción del lado izquierdo de la igualdad es cero cuando su numerador sea cero. Luego

$$\begin{aligned}1 - \operatorname{sen} x - \cos^2 x =& 0,\\ 1 - \operatorname{sen} x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) =& 0,\\ \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x =& 0,\\ \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1) =& 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x - 1 = 0.$$

Es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x = 1.$$

Debido a que la función seno es 2π periódica hallemos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$\operatorname{sen} x = 0$ si $x = 0$ y si $x = \pi$ y $\operatorname{sen} x = 1$ si $x = \dfrac{\pi}{2}$. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación están dadas por

$$x = 0 + 2k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

O, equivalentemente,

$$x = k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 57.3

Solucione la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(3x) = \cos(4x).$$

Solución

Observemos que

$$\operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}(4x + x) = \operatorname{sen}(4x)\cos x + \operatorname{sen} x \cos(4x),$$

y además que

$$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(4x - x) = \operatorname{sen}(4x)\cos x - \operatorname{sen} x \cos(4x).$$

Por lo tanto, la ecuación trigonométrica dada es equivalente a la ecuación trigonométrica

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(4x)\cos x + \operatorname{sen} x\cos(4x) - [\operatorname{sen}(4x)\cos x - \operatorname{sen} x\cos(4x)]& \\ = \cos(4x),&\end{aligned}$$

y simplificando

$$\begin{aligned}2\operatorname{sen} x\cos(4x) &= \cos(4x),\\ 2\operatorname{sen} x\cos(4x) - \cos(4x) &= 0,\\ \cos(4x)(2\operatorname{sen} x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\cos(4x) = 0 \quad \text{ó} \quad 2\operatorname{sen} x - 1 = 0.$$

Es decir,

$$\cos(4x) = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Observemos que la función $\cos(4x)$ es una compresión horizontal de la función $\cos x$ en un factor de 4. Por lo tanto, como $\cos x$ es 2π periódica, se tiene que $\cos(4x)$ es periódica, con período $\frac{\pi}{2}$. Examinemos entonces $\cos(4x) = 0$ para x en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$; es decir para $4x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$

$\cos(4x) = 0$ si $4x = \dfrac{\pi}{2}$ y si $4x = \dfrac{3\pi}{2}$. Es decir, si $x = \dfrac{\pi}{8}$ y si $x = \dfrac{3\pi}{8}$.

Luego $\cos(4x) = 0$ para

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \text{con } k \text{ entero.}$$

Ahora, teniendo en cuenta que la función seno es 2π periódica, analicemos $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ en $[0, 2\pi)$:

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ si $x = \dfrac{\pi}{6}$ y si $x = \dfrac{5\pi}{6}$. Por lo tanto, las respectivas soluciones de la ecuación trigonométrica son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En conclusión las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(3x) = \cos(4x)$ vienen dadas por $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, donde k es un número entero.

Ejercicios

Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

1. $\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x - \dfrac{1}{2}$.
2. $\operatorname{sen}^2 w - 5\cos w = \cos^2 w - 2$.
3. $3\operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$.
4. $\sec z \tan z - \sqrt{2} = 0$.
5. $4\operatorname{sen} x = \cos(2x) - 1$.
6. $\cos^2 x = 3(1 + \operatorname{sen} x)$.
7. $\tan t - 2\sec t = -\cot t$.
8. $\operatorname{sen}(2y + \pi/3) = -\operatorname{sen}(y + \pi/6)$.

Lección 58

Línea recta I

En el plano cartesiano una **línea recta** o **recta** es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas satisfacen una ecuación del tipo

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

donde a, b y c son constantes reales, con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. Esta última ecuación se conoce con el nombre de **forma general** de la ecuación de la recta en el plano.

En el caso de una recta que no es vertical, las coordenadas de los puntos pertenecientes a la recta satisfacen una ecuación del tipo $y = mx + b$, donde m y b son constantes reales.

La constante m se llama **pendiente** de la recta y es la tangente del ángulo de inclinación de la recta (ángulo que forma la recta con el *semieje* x positivo, medido en sentido antihorario, desde el *semieje* x positivo hasta encontrar por primera vez la recta, véase la figura 58.1). La constante b es la coordenada y del punto donde la recta intercepta el *eje* y, que corresponde al punto de la recta para el cual x es 0. Llamamos intercepto a esta constante.

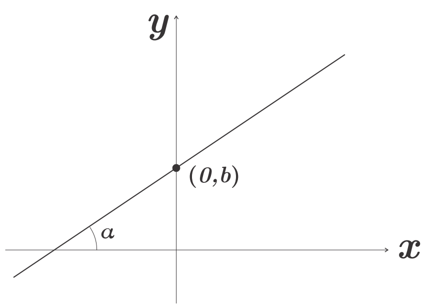


Figura 58.1

La ecuación

$$\boxed{y = mx + b}$$

se conoce con el nombre de ecuación de la recta en la **forma pendiente–intercepto**.

Notemos que en el plano una línea recta está completamente determinada por dos puntos distintos que están sobre ella.

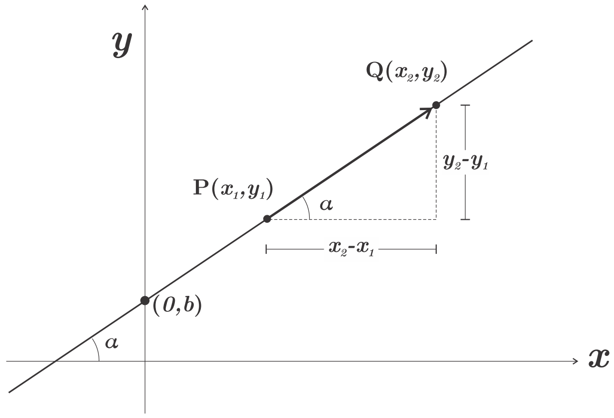


Figura 58.2

Si una recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, podemos demostrar que la pendiente m de dicha recta está dada por

$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},}$$

donde α es el ángulo de inclinación de la recta.

Observaciones

1. La pendiente m de una recta puede ser positiva, negativa o cero. En el caso de una recta vertical la pendiente no está definida (véase la figura 58.3).

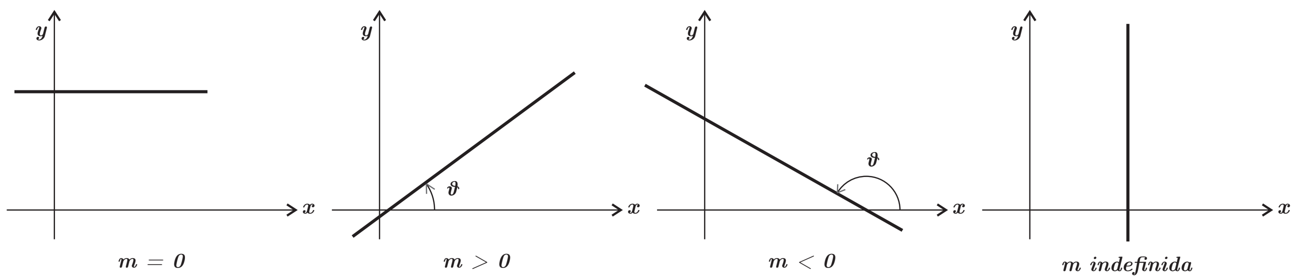


Figura 58.3

2. La pendiente no está definida para rectas verticales, ya que dos puntos cualesquiera sobre una de estas rectas tienen la misma componente en x. La ecuación de una recta vertical es de la forma $x = b$, donde b es una constante.

3. La pendiente de una recta horizontal es siempre igual a 0.

Ejemplo 58.1

La ecuación $y = 2$ corresponde a una recta con pendiente $m = 0$ que corta al eje y en el punto $(0, 2)$. Su gráfica es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = 2$. Esta recta es una recta horizontal, ya que para cualquier valor de x, $y = 2$ (véase la figura 58.4).

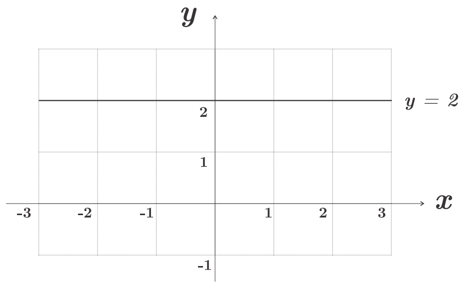


Figura 58.4

Ejemplo 58.2

La ecuación $x = -1$ tiene pendiente indefinida, ya que dos puntos cualesquiera sobre una de estas rectas tienen la misma componente en x. Su gráfica es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tales que $x = -1$. Esta recta es una recta vertical, ya que para cualquier valor de y, $x = -1$ (véase la figura 58.5).

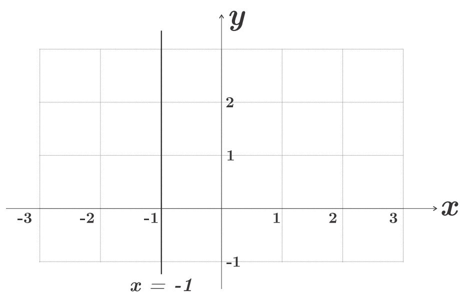


Figura 58.5

Ejemplo 58.3

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(-3, 2)$.

Solución

Primero calculamos la pendiente m de la recta $y = mx+b$ empleando los puntos $(x_1, y_1) = (1, -1)$ y $(x_2, y_2) = (-3, 2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{-3 - 1} = -\frac{3}{4}.$$

Para obtener b basta con reemplazar cualquiera de los puntos en la ecuación, es decir, reemplazando, por ejemplo, el punto $(x_1, y_1) = (1, -1)$ en la ecuación $y = -\frac{3}{4}x + b$, obtenemos que $-1 = -\frac{3}{4}(1) + b$, $b = -\frac{1}{4}$. Concluimos que la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos es $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ (véase la figura 58.6).

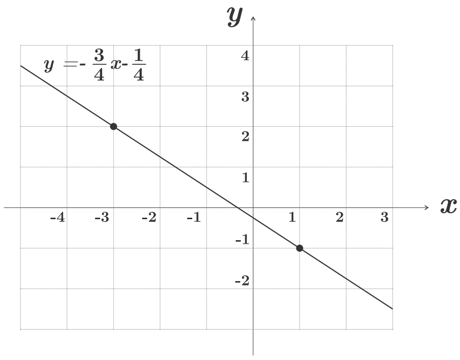


Figura 58.6

Ejemplo 58.4

Si el ángulo de inclinación de una recta que pasa por el punto $P(3, -4)$ es $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, encontrar la ecuación de dicha recta.

Solución

Primero calculamos la pendiente m de la recta $y = mx + b$, para ello tenemos presente que el ángulo de inclinación de la recta es $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$:

$$m = \tan\alpha = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Para obtener b basta con reemplazar el punto P en la ecuación, es decir, reemplazando $P(3, -4)$ en la ecuación $y = \sqrt{3}x + b$, obtenemos que $-4 = \sqrt{3}(3) + b$, $b = -4 - 3\sqrt{3}$. Concluimos que la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación es $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ y pasa por el punto $P(3, -4)$ es $y = \sqrt{3}x - 4 - 3\sqrt{3}$ (véase la figura 58.7).

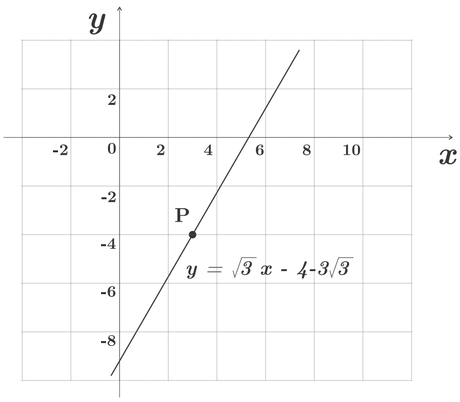


Figura 58.7

Lección 59

Línea recta II

Si una recta no es vertical su pendiente es la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal, cuando pasamos de un punto a otro sobre la recta.

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}.$$

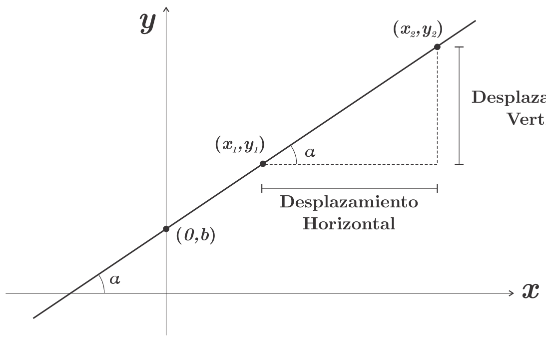


Figura 59.1

En la figura 59.1 observemos que la pendiente de la recta es independiente del orden en que tomemos los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ para calcular los desplazamientos verticales y horizontales. Es decir,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

También podemos usar el intercepto $(0, b)$ como uno de los puntos para calcular la pendiente:

$$m = \frac{b - y_1}{0 - x_1}.$$

Vemos entonces que si una recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, donde $x_1 \neq x_2$, otra manera de escribir su ecuación es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

que es equivalente a $y = mx + b$, con $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y $b = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$.

Como consecuencia de la observación anterior tenemos, la fórmula **punto–pendiente** para hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$ y tiene pendiente m:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0).}$$

Ejemplo 59.1

Grafique la recta L cuya ecuación es $y = 3x - 2$.

Solución

La gráfica de dicha recta es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = 3x - 2$, o sea, el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, 3x - 2)$, donde $x \in \mathbb{R}$. Esta recta tiene pendiente $m = 3$ y corta el eje y en $(0, -2)$.

Como sabemos que la recta pasa por el punto $(0, -2)$, para graficarla necesitamos otro punto que podemos obtener hallando el valor de y para un valor de $x \neq 0$. Si $x = 1$, $y = 3(1) - 2 = 1$ y entonces el punto $(1, 1)$ también está sobre esta recta. A continuación, ubicamos en el plano cartesiano los puntos $(0, -2)$ y $(1, 1)$, y con una regla trazamos la línea recta que pasa por dichos puntos (véase la figura 59.2).

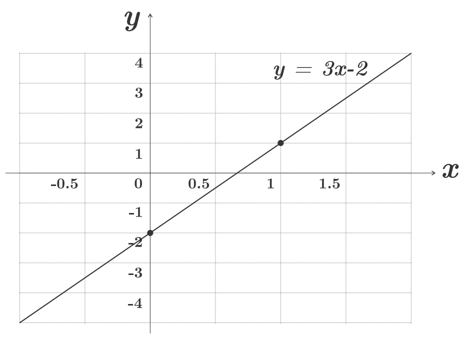


Figura 59.2

Como la pendiente de la recta es 3, si consideramos dos puntos diferentes sobre la gráfica y medimos el desplazamiento vertical entre ellos, éste es el triple del desplazamiento horizontal entre estos puntos.

Ejemplo 59.2

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, 4)$ y tiene pendiente -1.

Solución

Con el punto $P(-2, 4)$ y la pendiente $m = -1$, usamos la fórmula *punto–pendiente* para hallar la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned} y - 4 &= -1(x - (-2)), \\ y - 4 &= -1(x + 2), \\ y &= -x - 2 + 4, \\ y &= -x + 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación pedida es $y = -x + 2$ (véase la figura 59.3).

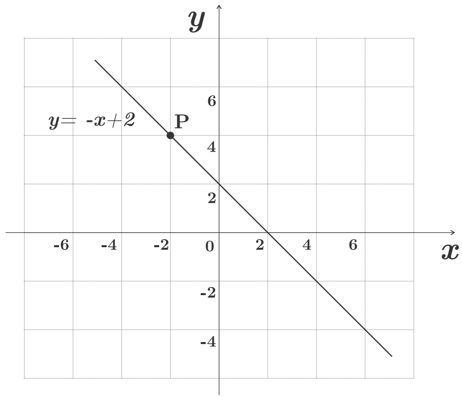


Figura 59.3

Ejemplo 59.3

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $R(-1, -2)$ y $S(4, 3)$

Solución

Primero calculamos la pendiente m de la recta empleando los puntos $R(-1, -2)$ y $S(4, 3)$:

$$m = \frac{-2 - 3}{-1 - 4} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Nuevamente, usaremos la fórmula *punto-pendiente* para hallar la ecuación de la recta. En este caso podemos tomar el punto R o el punto S y llegamos a la misma ecuación, en efecto:

$$\begin{aligned} y - (-2) &= 1(x - (-1)), \\ y + 2 &= x + 1, \\ y &= x - 1. \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} y - 3 &= 1(x - 4), \\ y - 3 &= x - 4, \\ y &= x - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación pedida es $y = x - 1$ (véase la figura 59.4).

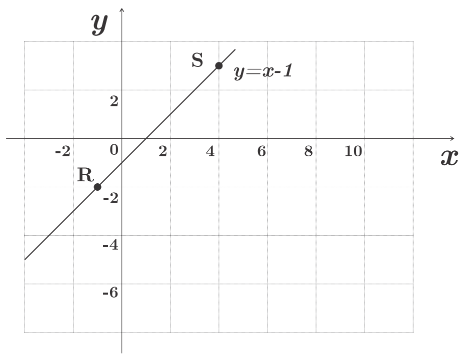


Figura 59.4

Ejercicios

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y forma un ángulo de $60°$ con el eje X.

2. Hallar las pendientes m y los interceptos b (con el eje y), de las siguientes rectas:

   (a) $3x - 5y - 10 = 0$.

   (b) $4x + 3y - 18 = 0$.

   (c) $3x + y = 7$.

   (d) $2x - 3y - 5 = 0$.

3. Calcule la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas.

   (a) Pasa por el punto $P(-2, 4)$ y tiene pendiente -1.

   (b) Pasa por el punto $P(-3, 2)$ y tiene pendiente $\frac{2}{3}$.

   (c) Pasa por el punto $P(2, 4)$ y tiene pendiente 3.

   (d) Pasa por el punto $P(-4, -6)$ y tiene pendiente $\frac{5}{7}$.

   (e) Pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(4, 3)$.

   (f) Pasa por los puntos $(-2, -2)$ y $(5, 2)$.

   (g) Pasa por los puntos $(5, -1)$ y $(-4, 3)$.

   (h) Pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(-6, 5)$.

   (i) Las intersecciones con los ejes x y y son, respectivamente, los puntos $(2, 0)$ y $(0, 7)$.

Lección 60

Línea recta III

Distancia de un punto a una recta

Dados un punto $P(x_0, y_0)$ y un recta L *no vertical* con ecuación $ax + by + c = 0$ queremos hallar la distancia del punto P a la recta L (véase la figura 60.1-izquierda).

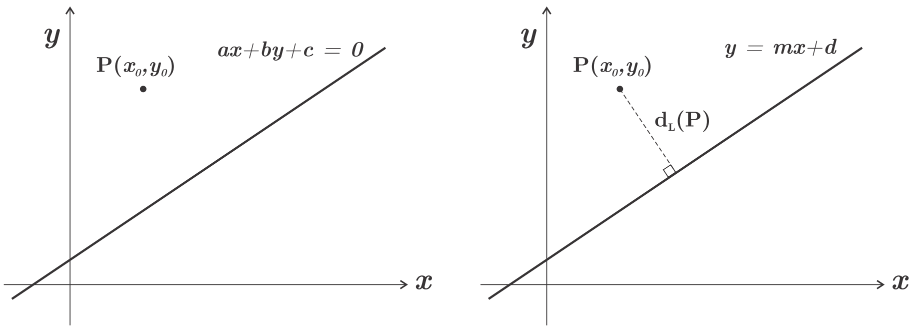


Figura 60.1

Esta distancia es la longitud del segmento de recta que une el punto P y el punto más cercano a él sobre la recta L (véase la figura 60.1-derecha). Para obtener la distancia usaremos triángulos semejantes. En la figura 60.2 los triángulos ABQ y PQR son semejantes. Por lo tanto

$$\frac{d_L(P)}{|\bar{PQ}|} = \frac{|\bar{PR}|}{|\bar{PQ}|} = \frac{|\bar{AB}|}{|\bar{AQ}|}$$

es decir,

$$d_L(P) = |\bar{PQ}|\frac{|\bar{AB}|}{|\bar{AQ}|} \ .$$

Pero, por Teorema de Pitagoras

$$|\bar{AQ}| = \sqrt{|\bar{AB}|^2 + |\bar{QB}|^2} = |\bar{AB}|\sqrt{1 + \frac{|\bar{QB}|^2}{|\bar{AB}|^2}} = |\bar{AB}|\sqrt{1 + m^2},$$

luego

$$d_L(P) = |\bar{PQ}|\frac{|\bar{AB}|}{|\bar{AB}|\sqrt{1+m^2}} = \frac{|\bar{PQ}|}{\sqrt{1+m^2}} \ .$$

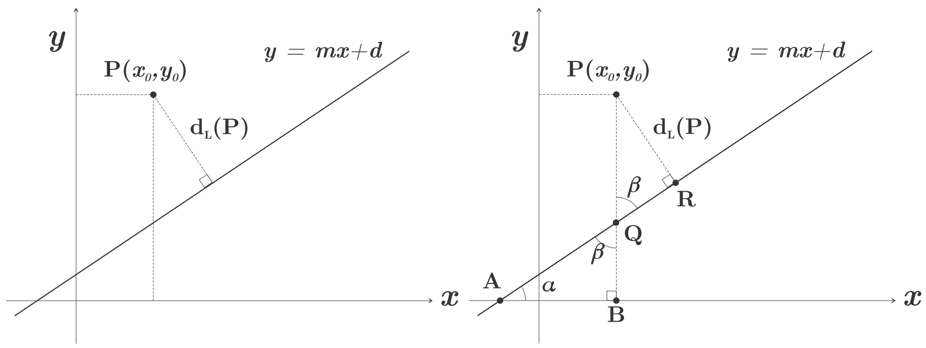


Figura 60.2

El punto Q tiene coordenadas $\left(x_0, mx_0 - \frac{c}{b}\right)$ y $m = -\frac{a}{b}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior obtenemos,

$$d_L(P) = \frac{\left|y_0 - (mx_0 - \frac{c}{b})\right|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\left|y_0 - \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right)\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + 1}}.$$

Simplificando la expresión anterior, concluimos que la distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a la recta no vertical L con ecuación $ax + by + c = 0$ está dado por

$$d_L(P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Consideremos el caso cuando $b = 0$ (recta vertical), es decir cuando la ecuación de la recta L es $ax + c = 0$ $(a \neq 0)$:

$$x = -\frac{c}{a}.$$

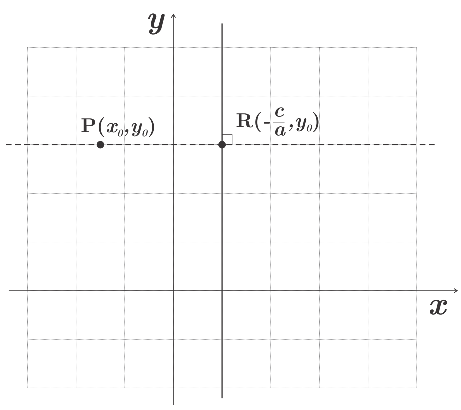


Figura 60.3

La distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a la recta L esta dada por la distancia entre los puntos P y R (véase la figura 60.3):

$$d_L(P) = \left|x_0 + \frac{c}{a}\right| = \frac{ax_0 + c}{|a|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Finalmente, concluimos que la distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a la recta L con ecuación $ax + by + c = 0$ está dado por

$$d_L(P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ejemplo 60.1

Halle la distancia del punto $P(8, -4)$ a la recta $-2x + 3y = 6$.

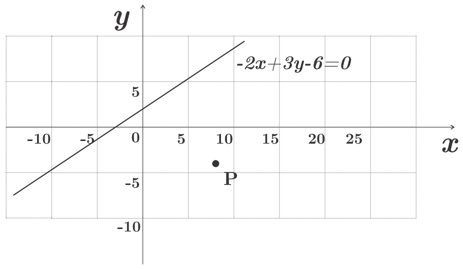


Figura 60.4

Solución

Empleando la fórmula anterior, la distancia del punto $P(8, -4)$ a la recta $-2x+3y-6 = 0$ es:

$$d = \frac{|-2(8) + 3(-4) - 6|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{34}{\sqrt{13}}.$$

Ejemplo 60.2

Halle la distancia del punto $P(2, -5)$ a la recta que pasa por los puntos $(5, -1)$ y $(-3, 6)$.

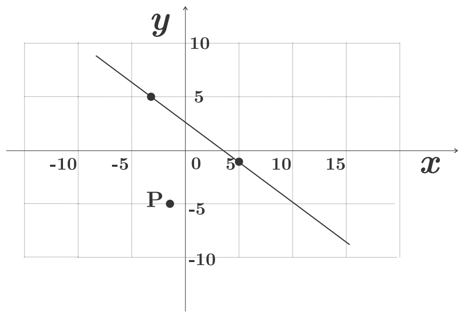


Figura 60.5

Solución

Primero calculamos la ecuación de la recta en la forma pendiente–intercepto $y = mx + b$. La pendiente m está dada por

$$m = \frac{-1 - 6}{5 - (-3)} = -\frac{7}{8}\ .$$

Para obtener b reemplazamos el punto $(5,-1)$ en la ecuación $y=-\dfrac{7}{8}x+b$ y obtenemos que $-1=-\dfrac{7}{8}(5)+b$, es decir, $b=\dfrac{27}{8}$. Concluimos que la ecuación de la recta en la forma pendiente–intercepto es $y=-\dfrac{7}{8}x+\dfrac{27}{8}$ y la ecuación de la recta en la forma general es $7x+8y-27=0$.

Ahora, empleando la fórmula anterior, la distancia del punto $P(2,-5)$ a la recta que pasa por los puntos $(5,-1)$ y $(-3,6)$ es

$$d=\frac{|7(2)+8(-5)-27|}{\sqrt{7^2+8^2}}=\frac{53}{\sqrt{113}}\ .$$

Ejercicios

1. Halle la distancia del punto a la recta en cada uno de los siguientes casos
   (a) $4x-3y-6=0$, $(0,0)$.
   (b) $3x-4y-8=0$, $(2,3)$.
2. Halle la distancia del punto $P(-4,1)$ a cada una de las rectas que cumpla con las condiciones dadas:
   (a) Pasa por el punto $P\,(-2,4)$ y tiene pendiente -1.
   (b) Pasa por los puntos $R\,(-1,-2)$ y $S\,(4,3)$.

Lección 61

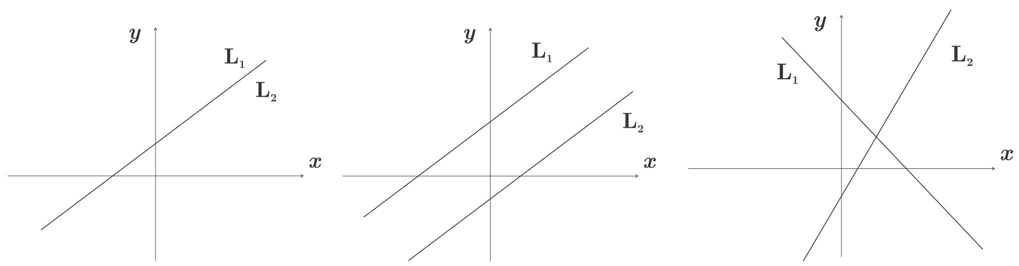
Línea recta IV

Cuando graficamos dos rectas L_1 y L_2 en el mismo plano cartesiano, nos encontramos con uno y sólo uno de los siguientes casos:

(a) Las rectas L_1 y L_2 tienen todos los puntos en común, es decir, una se monta completamente sobre la otra. Cuando esto sucede decimos que L_1 y L_2 son **coincidentes**.

(b) Las rectas L_1 y L_2 no poseen puntos en común, es decir, nunca se cortan. En este caso decimos que L_1 y L_2 son **paralelas** y escribimos $L_1 \parallel L_2$.

(c) Las rectas L_1 y L_2 tienen un único punto en común P. En dicho caso decimos que L_1 y L_2 se **cortan** o **interceptan** en el punto P.



(a) Rectas coincidentes (b) Rectas paralelas (c) Rectas que se interceptan

Figura 61.1

En la situación (c), cuando las rectas al cortarse forman 4 ángulos rectos, decimos que las rectas L_1 y L_2 son **perpendiculares** y escribimos $L_1 \perp L_2$. Gráficamente se acostumbra usar un pequeño cuadrado para indicar la presencia de un ángulo recto (véase la figura 61.2).

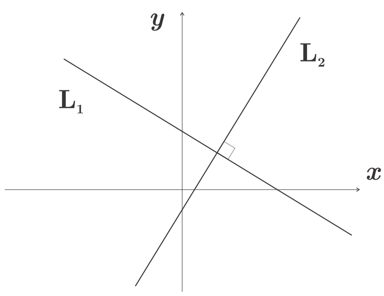


Figura 61.2

Los conceptos de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas se pueden estudiar muy fácilmente haciendo uso de sus pendientes. A continuación estudiaremos el caso cuando las rectas son paralelas.

Rectas paralelas

Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas no verticales, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Como la pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación, se puede demostrar fácilmente que L_1 y L_2 son paralelas si sus pendientes son iguales.

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 = m_2.}$$

Al recordar la forma pendiente intercepto de la ecuación de una recta, vemos que para que dos rectas sean paralelas se requiere además que sus interceptos con el eje y sean distintos. Cuando dos rectas tienen la misma pendiente y el mismo intercepto con el eje y, lo que tenemos es un par de rectas coincidentes.

Hemos excluido a las rectas verticales ya que éstas no poseen pendiente. Con respecto a este tipo de rectas podemos decir que dos rectas verticales distintas son siempre paralelas.

Ejemplo 61.1

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, 1)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-3, -2)$ y $B(4, 2)$.

Solución

Denotemos por L_1 la recta pedida y por L_2 la recta que pasa por los puntos $A(-3, -2)$ y $B(4, 2)$ (véase la figura 61.3).

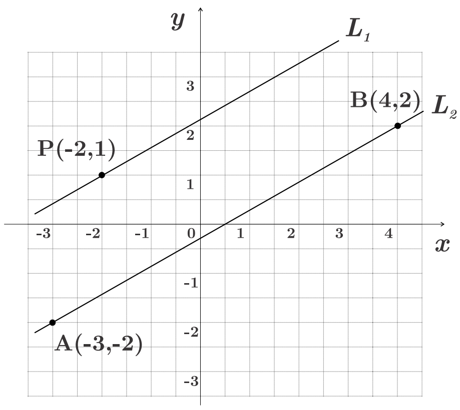


Figura 61.3

Si m_1 es la pendiente de L_1 y m_2 es la pendiente de L_2, entonces para que estas rectas sean paralelas debemos tener que $m_1 = m_2$. Por lo tanto, la pendiente de la recta L_1

es la misma pendiente de la recta L_2, y esta última pendiente la podemos hallar con la ecuación

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

donde $(x_1, y_1) = (-3, -2)$ y $(x_2, y_2) = (4, 2)$. Por lo tanto

$$m_2 = \frac{2 - (-2)}{4 - (-3)} = \frac{4}{7}.$$

Luego $m_1 = m_2 = \frac{4}{7}$. Finalmente, con el punto $P\,(-2, 1)$ y la pendiente $m_1 = \frac{4}{7}$, usamos la fórmula *punto-pendiente* para hallar la ecuación de L_1:

$$\begin{aligned}
y - 1 &= \frac{4}{7}\left(x - (-2)\right), \\
y - 1 &= \frac{4}{7}\left(x + 2\right), \\
y &= \frac{4}{7}x + \frac{8}{7} + 1, \\
y &= \frac{4}{7}x + \frac{15}{7}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación pedida es $y = \frac{4}{7}x + \frac{15}{7}$.

Ejercicios

Halle la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas. Dibuje completamente cada situación.

1. Pasa por el punto $P(-2, 1)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-3, -2)$ y $B(4, 2)$.
2. Pasa por el punto $Q(-1, 3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-5, 3)$ y $B(3, -1)$.
3. Pasa por el punto $P(3, 1)$ y es paralela a la recta cuyos interceptos con los ejes x y y son, respectivamente, -2 y -1.
4. Pasa por el punto $R(1, -2)$ y es paralela a la recta cuyos interceptos con los ejes x y y son, respectivamente, -3 y 4.

Lección 62

Línea recta V

Ejemplos adicionales

Ejemplo 62.1

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\,(-3,1)$ y es paralela a la recta con ecuación $4x+3y=12$.

Solución

Denotemos por L_1 la recta pedida y por L_2 la recta con ecuación $4x+3y=12$ (véase la figura 62.1).

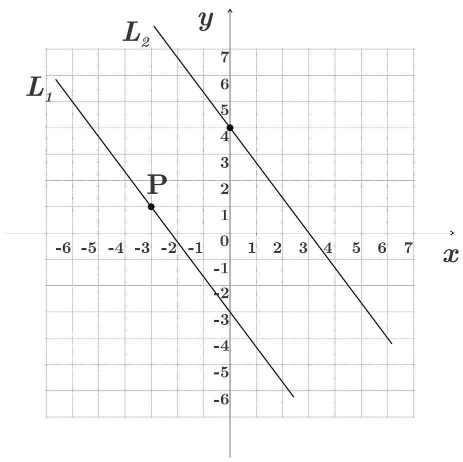


Figura 62.1

Si m_1 es la pendiente de L_1 y m_2 es la pendiente de L_2, entonces para que estas rectas sean paralelas debemos tener que $m_1=m_2$. Podemos hallar el valor de m_2 despejando la variable y en la ecuación de L_2 y leyendo el coeficiente de la variable x, el cual será la pendiente m_2. Veamos:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 12, \\ 3y &= -4x + 12, \\ y &= \frac{-4}{3}x + \frac{12}{3}, \\ y &= -\frac{4}{3}x + 4. \end{aligned}$$

Luego $m_1 = m_2 = -\frac{4}{3}$. Finalmente, con el punto $P(-3, 1)$ y la pendiente $m_1 = -\frac{4}{3}$, usamos la fórmula *punto-pendiente* para hallar la ecuación de L_1:

$$\begin{aligned} y - 1 &= -\frac{4}{3}(x - (-3)), \\ y &= -\frac{4}{3}(x + 3) + 1, \\ y &= -\frac{4}{3}x - 4 + 1, \\ y &= -\frac{4}{3}x - 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación pedida es $y = -\frac{4}{3}x - 3$.

Ejemplo 62.2

Use la noción de pendiente de una recta para determinar si los puntos del plano $A(-3, -4)$, $B(-1, -1)$ y $C(3, 5)$ son colineales o no, es decir, si están o no sobre la misma recta.

Solución

Para descubrir la manera más fácil de resolver este problema, grafiquemos primero estos puntos en el plano cartesiano (véase la figura 62.2).

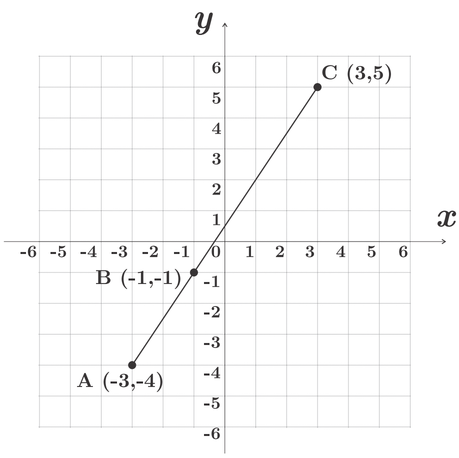


Figura 62.2

Sea L_1 la recta que pasa por los puntos A y B con pendiente m_1, y sea L_2 la recta que pasa por los puntos B y C con pendiente m_2. Para que estos tres puntos sean colineales, las rectas L_1 y L_2 deben ser coincidentes, es decir, deben tener la misma ecuación. Como ambas rectas tienen un punto en común (el punto B), para saber si estas rectas tienen la misma ecuación, basta con averiguar si ellas tienen igual pendiente. Veamos:

$$m_1 = \frac{-1-(-4)}{-1-(-3)} = \frac{-1+4}{-1+3} = \frac{3}{2},$$

y

$$m_2 = \frac{5-(-1)}{3-(-1)} = \frac{5+1}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Luego $m_1 = m_2$ y por lo tanto L_1 y L_2 son coincidentes, con lo cual podemos concluir que los puntos A, B y C son colineales.

Ejemplo 62.3

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1,3)$ y es paralela a la recta con ecuación $x = 2$.

Solución

En este caso vemos que la ecuación $x = 2$ corresponde a una línea recta vertical y por esta razón no posee pendiente. Debido a esto no podemos hacer uso del criterio utilizado en los ejemplos anteriores. Sin embargo, es posible resolver este problema si nos damos cuenta de que una recta que sea paralela a una recta vertical, es precisamente otra recta vertical. Para la situación que tenemos, mediante una gráfica, podemos ver que una recta vertical que pase por el punto $P(-1,3)$ es aquella con ecuación $x = -1$ (véase la figura 62.3).

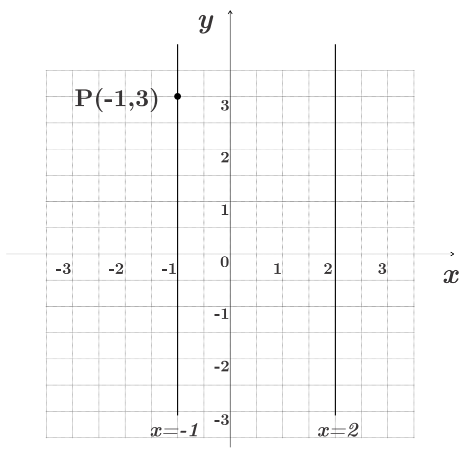


Figura 62.3

Ejercicios

1. Halle la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas. Dibuje completamente cada situación.

(a) Cruza el eje y en $y = 6$ y es paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$.

(b) Pasa por el punto de intersección de la recta $3y + 12x = 7$ con el eje y y es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-5, 0)$ y $B(1, 2)$.

(c) Pasa por el punto $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y es paralela a la recta $4x - 8y = 1$.

(d) Pasa por el punto $P(1, -2)$ y es paralela a la recta con ecuación $y - 3 = 0$.

(e) Pasa por el punto $P(-3, 0)$ y es paralela a la recta con ecuación $x + 1 = 0$.

(f) Pasa por el punto $P(-2, 3)$ y es paralela al eje x.

(g) Pasa por el punto $Q(-1, 3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-5, 3)$ y $B(-5, -1)$.

2. Demuestre que los puntos $A(-4, 3)$, $B(2, 6)$, $C(-6, -3)$ y $D(4, 2)$ son los vértices de un trapecio.

3. Demuestre que los puntos $A(-5, -1)$, $B(-4, 2)$, $C(0, 4)$ y $D(-1, 1)$ son los vértices de un paralelogramo.

4. En cada uno de los siguientes casos, determine si los puntos del plano dados son colineales o no.

   (a) $A(-2, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(3, 4)$.

   (b) $A(-3, 2)$, $B(-1, 1)$ y $C(3, -1)$.

   (c) $A(-4, 3)$, $B(-1, 2)$ y $C(4, 1)$.

   (d) $A(-6, 1)$, $B(-2, 2)$ y $C(6, 3)$.

5. Halle el valor de la constante a de tal manera que las rectas con ecuaciones $5ax+6y = 1$ y $3ay + 10x = -1$ sean paralelas.

6. Halle el valor de la constante a de tal manera que las rectas con ecuaciones $5ax+6y = 1$ y $3ay + 10x = -1$ sean coincidentes.

Lección 63

Línea recta VI

Rectas perpendiculares

Sean L_1 y L_2 dos rectas no verticales, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Como la pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación, se puede demostrar fácilmente que L_1 y L_2 son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 \cdot m_2 = -1.}$$

Tal y como lo hicimos para rectas paralelas, en el resultado anterior excluimos a las rectas verticales, ya que éstas no poseen pendiente. Con respecto a este tipo de rectas podemos decir que una recta vertical es siempre perpendicular a cualquier recta horizontal y viceverza.

Ejemplo 63.1

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(5,-1)$.

Solución

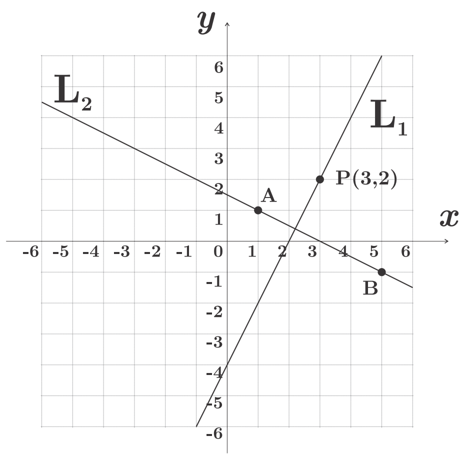


Figura 63.1

Sean L_1 la recta que queremos hallar y L_2 la recta que pasa por los puntos A y B. Denotemos por m_1 y b_1 la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta L_1, respectivamente; es decir, la ecuación de L_1 es $y = m_1\, x + b_1$. Así mismo denotemos por m_2 la pendiente de la recta L_2. Empleando los puntos $(x_1, y_1) = (1, 1)$ y $(x_2, y_2) = (5, -1)$ podemos calcular m_2, obteniendo que

$$m_2 = \frac{-1-1}{5-1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Sabemos que $L_1 \perp L_2$ si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$, esto es

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2.$$

Así la ecuación de L_1 es $y = 2\, x + b_1$. El valor del intercepto b_1 se obtiene al reemplazar el punto $P(3, 2)$ en la ecuación de la recta, es decir, $2 = 2\,(3) + b_1$. Por lo tanto $b_1 = -4$ y así la ecuación de la recta L_1 es $y = 2\,x - 4$.

Ejemplo 63.2

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $4x - 8y = 1$.

Solución

Denotemos por L_1 la recta pedida y por L_2 la recta con ecuación $4x - 8y = 1$.

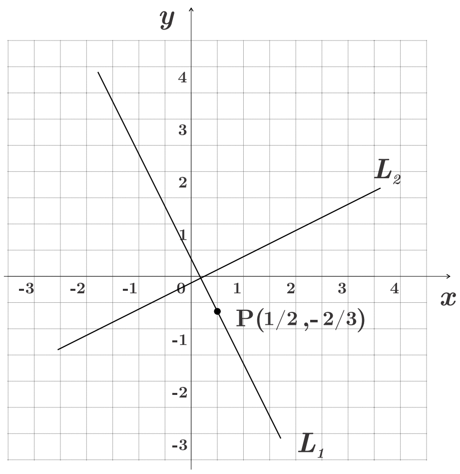


Figura 63.2

Si m_1 es la pendiente de L_1 y m_2 es la pendiente de L_2, entonces para que estas rectas sean perpendiculares debemos tener que $m_1 \cdot m_2 = -1$. Por lo tanto, la pendiente de la recta L_1 la podemos hallar con la ecuación

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Sólo resta hallar el valor de m_2, y para tal fin lo que debemos hacer es despejar la variable y en la ecuación de L_2 y al hacer esto el coeficiente de la variable x será la pendiente m_2. Veamos

$$\begin{aligned} 4x - 8y &= 1, \\ -8y &= -4x + 1, \\ y &= \frac{-4}{-8}x + \frac{1}{-8} \\ y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Luego $m_2 = \frac{1}{2}$, y así

$$m_1 = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Finalmente, con el punto $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y la pendiente $m_1 = -2$, usamos la fórmula *punto-pendiente* para hallar la ecuación de L_1:

$$\begin{aligned} y - \left(-\frac{2}{3}\right) &= (-2)\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ y + \frac{2}{3} &= -2x + \frac{2}{2}, \\ y &= -2x + 1 - \frac{2}{3}, \\ y &= -2x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación pedida es $y = -2x + \frac{1}{3}$.

Ejercicios

1. Halle la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas. Grafique completamente cada situación.
   (a) Cruza el eje y en $y = 6$ y es perpendicular a la recta $2x + 3y + 4 = 0$.
   (b) Pasa por el punto $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y es perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$.
   (c) Pasa por el punto $P(-2, 1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-3, -2)$ y $B(4, 2)$.
   (d) Pasa por el punto $Q(2, 4)$ y es perpendicular a la recta $5x - 7y = 2$.
   (e) Pasa por el punto $Q(-1, 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-5, 3)$ y $B(3, -1)$.

(f) Pasa por el punto de intersección de la recta $3y + 12x = 7$ con el eje y y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-5, 0)$ y $B(1, 2)$.

(g) Pasa por el punto $P(1, -2)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $y - 3 = 0$.

(h) Pasa por el punto $P(-3, 0)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $x + 1 = 0$.

(i) Pasa por el punto $P(-2, 3)$ y es perpendicular al eje x.

(j) Pasa por el punto $R(2, -5)$ y es perpendicular al eje y.

(k) Pasa por el punto $Q(-1, 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-5, 3)$ y $B(-5, -1)$.

2. Si a y b son constantes no nulas, pruebe que las rectas $ax + by = c$ y $bx - ay = d$ son perpendiculares, donde c y d son constantes cualesquiera.

3. Halle el valor de la constante a de tal manera que las rectas con ecuaciones $3ax + 8y = -5$ y $2y - 8ax = -1$ sean perpendiculares. Grafique las dos rectas.

Lección 64

Línea recta VII

Ejemplos adicionales

Ejemplo 64.1

Demuestre que los puntos del plano $A(-3,2)$, $B(-1,5)$ y $C(5,1)$ corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución

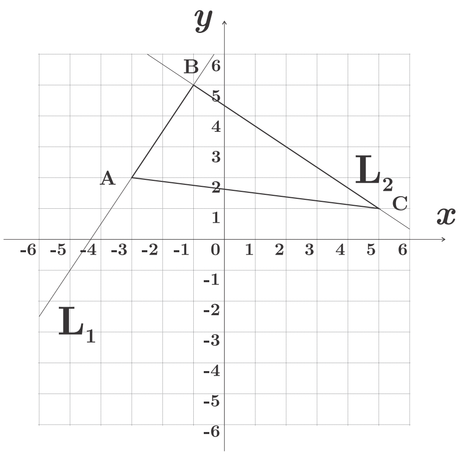


Figura 64.1

La figura 64.1 sugiere que el ángulo recto parece estar en el vértice B. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos A y B, y sea L_2 la recta que pasa por los puntos B y C. Para probar que el triángulo ABC es rectángulo en B, basta demostrar que L_1 es perpendicular a L_2. Para tal fin, calculemos las pendientes m_1 y m_2 de las rectas L_1 y L_2, respectivamente:

$$m_1 = \frac{5-2}{-1-(-3)} = \frac{3}{-1+3} = \frac{3}{2},$$

y

$$m_2 = \frac{1-5}{5-(-1)} = \frac{-4}{5+1} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Como $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$, entonces $L_1 \perp L_2$, y así probamos que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice B.

Ángulo entre rectas

Consideremos dos líneas rectas L_1 y L_2 que no son paralelas, es decir, o se cortan en un punto o son coincidentes. Definimos **el ángulo entre las rectas** L_1 **y** L_2 como el menor de los 4 ángulos que ellas forman al cortarse en un punto, o como cero en el caso de rectas coincidentes. Denotemos por θ el ángulo entre las rectas L_1 y L_2. Entonces $0° \leq \theta \leq 90°$.

Si denotemos por α_1 el ángulo de inclinación de la recta L_1 y por α_2 el ángulo de inclinación de la recta L_2, entonces $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\theta$ (véase la figura 64.2).

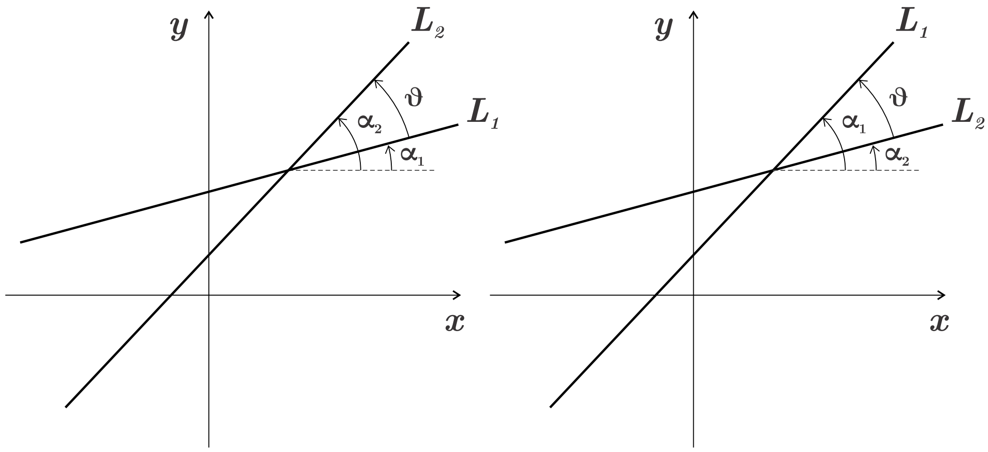


Figura 64.2

Supongamos que las rectas no son verticales. Si las rectas no son perpendiculares, es decir, $\theta \neq 90°$, entonces

$$\begin{aligned} \tan(\pm\theta) &= \tan(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \pm\tan\theta &= \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\tan\theta = \left|\frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}\right|.$$

Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas L_1 y L_2, respectivamente, entonces también tenemos que

$$\boxed{\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|. \qquad (64.1)}$$

Notemos que en la fórmula (64.1) se requiere que $m_1 \cdot m_2 \neq -1$, lo cual está garantizado ya que L_1 y L_2 no son perpendiculares.

Ejemplo 64.2

Halle el ángulo entre las rectas con ecuaciones $y = 2x + 1$ y $y = 5x - 2$.

Solución

Vemos que la pendiente m_1 de la primera recta es 2 y la pendiente m_2 de la segunda es 5. Como $2 \cdot 5 \neq -1$, podemos usar la fórmula (64.1) para hallar la tangente del ángulo θ entre estas rectas:

$$\tan\theta = \left|\frac{2-5}{1+2\cdot 5}\right| = \left|\frac{-3}{11}\right| = \frac{3}{11}.$$

Usamos una calculadora para encontrar que

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{11}\right) \approx 15.26°.$$

Luego el ángulo entre las rectas dadas es aproximadamente igual a 15.26°.

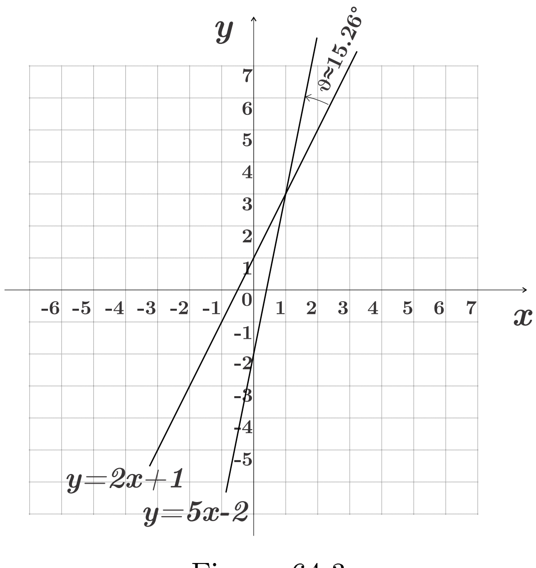


Figura 64.3

Ejercicios

1. Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
2. Demuestre que los puntos $A(-5, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, -3)$ y $D(2, 0)$ son los vértices de un rectángulo.

3. Demuestre que los puntos $A(-3,0)$, $B(-2,2)$, $C(-1,-1)$ y $D(0,1)$ son los vértices de un cuadrado. Demuestre además que sus diagonales son perpendiculares.

4. En cada uno de los siguientes casos, determine el ángulo entre el par de rectas dadas (en algunos casos es necesario usar la calculadora). Grafique el par de rectas y verifique con un transportador su respuesta.

   (a) $2y - 4x = 10$ y $3x - 9y = 1$.

   (b) $2x + 15y = -1$ y $10x + 3y = 4$.

   (c) $2x - 3y = -2$ y $y = -5x + 1$.

   (d) $-y + 4x = 1$ y $x + 2y = -8$.

   (e) $7y - 2x = -5$ y $6x - 21y = 15$.

   (f) $x = -1$ y $y = 0$.

Lección 65

Línea recta VIII

Ejemplos adicionales

Ejemplo 65.1

En cada uno de los siguientes casos, determine si las dos rectas dadas son coincidentes, paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores. Cuando las rectas no sean paralelas, halle el ángulo entre ellas.

1. $L_1 :\ 2x + 5y = -1$ y $L_2 :\ 10x + 25y = 4$.

2. $L_1 :\ x - 3y = -1$ y $L_2 :\ y + 3x = 5$.

3. $L_1 :\ y + 3x = 7$ y $L_2 :\ -x + 2y = -3$.

4. $L_1 :\ 7y - 2x = -5$ y $L_2 :\ 6x - 21y = 15$.

Solución

1. Despejemos en cada una de estas dos ecuaciones la variable y.

   - L_1:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -1, \\ 5y &= -2x - 1, \\ y &= \frac{-2x - 1}{5}, \\ y &= -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

   Para esta recta vemos que su pendiente es $-\frac{2}{5}$ y su intercepto con el eje y es $-\frac{1}{5}$.

- L_2:

$$\begin{aligned} 10x+25y&=4,\\ 25y&=-10x+4,\\ y&=\frac{-10x+4}{25},\\ y&=-\frac{10}{25}x+\frac{4}{25},\\ y&=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}. \end{aligned}$$

  Para esta recta vemos que su pendiente es $-\frac{2}{5}$ y su intercepto con el eje y es $\frac{4}{25}$.

Observamos entonces que estas rectas tienen igual pendiente pero distintos interceptos con el eje y, por lo tanto concluímos que estas rectas son paralelas.

2. Despejemos en cada una de estas dos ecuaciones la variable y.

- L_1:

$$\begin{aligned} x-3y&=-1,\\ -3y&=-x-1,\\ y&=\frac{-x-1}{-3},\\ y&=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

  Para esta recta vemos que su pendiente es $\frac{1}{3}$ y su intercepto con el eje y es $\frac{1}{3}$.

- L_2:

$$\begin{aligned} y+3x&=5,\\ y&=-3x+5. \end{aligned}$$

  Para esta recta vemos que su pendiente es -3 y su intercepto con el eje y es 5.

Tenemos entonces que para estas rectas el producto de sus pendientes es $\left(\frac{1}{3}\right)(-3)=-1$. Por lo tanto concluímos que estas rectas son perpendiculares. En este caso el ángulo entre las rectas es $90°$.

3. Despejemos en cada una de estas dos ecuaciones la variable y.

- L_1:

$$\begin{aligned} y+3x&=7,\\ y&=-3x+7. \end{aligned}$$

  Para esta recta vemos que su pendiente es -3 y su intercepto con el eje y es 7.

- L_2:

$$\begin{aligned}
-x + 2y &= -3,\\
2y &= x - 3,\\
y &= \frac{x-3}{2},\\
y &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

  Para esta recta vemos que su pendiente es $\frac{1}{2}$ y su intercepto con el eje y es $-\frac{3}{2}$.

Observamos entonces que estas rectas tienen pendientes distintas y que el producto de sus pendientes no es igual a -1. Por lo tanto concluímos que estas rectas no son ni coincidentes, ni paralelas, ni perpendiculares. Para hallar el ángulo θ entre las rectas podemos usar la fórmula (64.1). Entonces

$$\tan\theta = \left|\frac{-3-\frac{1}{2}}{1+(-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}\right| = \left|\frac{-\frac{7}{2}}{1-\frac{3}{2}}\right| = \left|\frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}}\right| = 7.$$

Usamos una calculadora para encontrar que

$$\theta = \tan^{-1}(7) \approx 81.87^\circ.$$

Luego el ángulo entre las rectas dadas es aproximadamente igual a 81.87°.

4. Despejemos en cada una de estas dos ecuaciones la variable y.

- L_1:

$$\begin{aligned}
7y - 2x &= -5,\\
7y &= 2x - 5,\\
y &= \frac{2x-5}{7},\\
y &= \frac{2}{7}x - \frac{5}{7}.
\end{aligned}$$

  Para esta recta vemos que su pendiente es $\frac{2}{7}$ y su intercepto con el eje y es $-\frac{5}{7}$.

- L_2:

$$\begin{aligned}
6x - 21y &= 15,\\
-21y &= -6x + 15,\\
y &= \frac{-6x+15}{-21},\\
y &= \frac{6}{21}x - \frac{15}{21},\\
y &= \frac{2}{7}x - \frac{5}{7}.
\end{aligned}$$

  Para esta recta vemos que su pendiente es $\frac{2}{7}$ y su intercepto con el eje y es $-\frac{5}{7}$.

Observamos entonces que estas rectas tienen igual pendiente e igual intercepto con el eje y, por lo tanto concluímos que estas rectas son coincidentes. En este caso el ángulo entre las rectas es $0°$.

Ejercicios

1. Para cada numeral del ejemplo de la presente lección, dibuje el par de rectas dadas y confirme gráficamente lo obtenido en cada caso.
2. En cada uno de los siguientes casos, determine si las dos rectas dadas son coincidentes, paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores. Cuando las rectas no sean paralelas, halle el ángulo entre ellas. Además dibuje ambas rectas en el mismo plano cartesiano.

   (a) $-3x + 7y = -1$ y $6x - 14y = 5$.

   (b) $10y - 6x = -4$ y $3x - 5y = 2$.

   (c) $2x - 5y = 3$ y $2y = -5x + 3$.

   (d) $y + 3x = 7$ y $-6x - 2y = 1$.

   (e) $7y - 2x = -5$ y $6x - 21y = 15$.

   (f) $3x - 11y = 2$ y $2y + 5x = -1$.

   (g) $11x - 2y = 1$ y $6y - 33x = 7$.

   (h) $x + 2 = 1$ y $y = 3$.

   (i) $y = -2$ y $y - 3 = 0$.

   (j) $2x - 7y = 3$ y $35y - 10x = -15$.

   (k) $x = -3$ y $x = 1$.

   (l) $y = 2$ y $y = x - 1$. Se cortan en un punto. $\theta = 45°$.

Lección 66

La circunferencia I

Definición y ecuación

La **circunferencia** es una curva formada por el conjunto de los puntos del plano tales que su distancia a un punto fijo C, llamado **centro**, es una constante positiva fija $r > 0$. Dicha constante positiva r se denomina **radio** de la circunferencia.

Para construir una circunferencia podemos proceder como lo indica la figura 66.1.

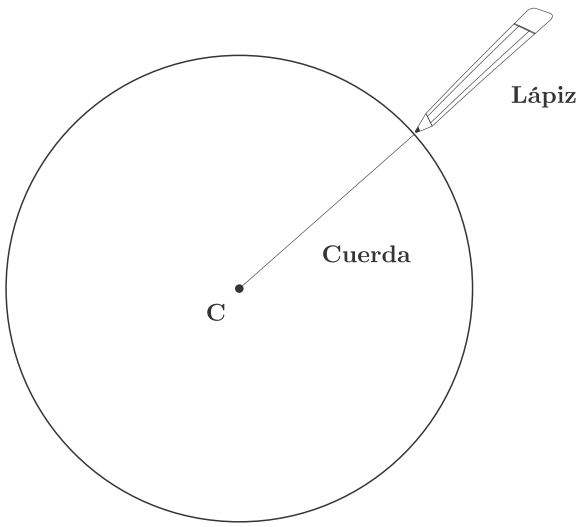


Figura 66.1

Elegimos una cuerda de longitud $r > 0$. Se fija un extremo de la cuerda en el punto C. La curva que se describe al mover la punta del lápiz manteniendo tensionada la cuerda, es una circunferencia con centro ubicado en el punto C y con radio r.

Veamos a continuación como se encuetra la ecuación de una circunferencia. Supongamos que tenemos una circunferencia con centro en el punto $C = (h, k)$, radio $r > 0$, y sea $P = (x, y)$ un punto de la circunferencia.
Como P es un punto de la circunferencia su distancia al centro C debe ser igual a r. Por

la fórmula de la distancia entre dos puntos obtenemos que

$$\begin{aligned} d(P,C) &= r \\ \sqrt{(x-c)^2+(y-k)^2} &= r. \end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados en la ecuación anterior obtenemos

$$(x-c)^2+(y-k)^2=r^2. \tag{66.1}$$

La ecuación anterior recibe el nombre de **ecuación de la circunferencia** con centro en $C=(h,k)$ y radio r.

Cuando el centro de la circunferencia es el origen del sistema de coordenadas cartesianas, es decir, cuando $C=(0,0)$, la ecuación anterior se simplifica y obtenemos la siguiente expresión

$$x^2+y^2=r^2. \tag{66.2}$$

Veamos a continuación como podemos utilizar la ecuación anterior para determinar algunas caracterśticas de la gráfica de una circunferencia

Gráfica de la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio $r>0$

En este caso el centro de la circunferencia es el origen del sistema de coordenadas y se observan las siguientes características.

Simetrías

Observe que en la ecuación de la circunferencia

$$x^2+y^2=r^2,$$

al reemplazar x por $-x$ o y por $-y$, obtenemos la misma ecuación, ya que $(-x)^2=x^2$ y $(-y)^2=y^2$. Esto significa que la gráfica de la circunferencia con centro en $(0,0)$ es simétrica respecto al eje y y al eje x.

Interceptos con los ejes

Si hacemos $x=0$ en la ecuación de la circunferencia se obtiene que

$$y^2=r^2.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $y=r$ y $y=-r$, lo cual significa que la gráfica de la circunferencia con centro en $(0,0)$ intercepta el eje y en los puntos $A_1=(0,r)$ y $A_2=(0,-r)$. Observe que el centro C resulta ser el punto medio entre estos dos puntos.

Por otro lado, si hacemos $y = 0$ en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$x^2 = r^2.$$

Dicha ecuación tiene dos souciones: $x = r$ y $x = -r$. De esta manera concluimos que la gráfica de la circunferencia intercepta al eje x en los puntos $B_1 = (-r, 0)$ y $B_2 = (r, 0)$.

A cada segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro se le denomina *diámetro*, en particular el segmento $\overline{A_1A_2}$ es un diámetro de la circunferencia. La figura 66.2 muestra la gráfica de la circunferencia con centro en $C = (0, 0)$ y radio r.

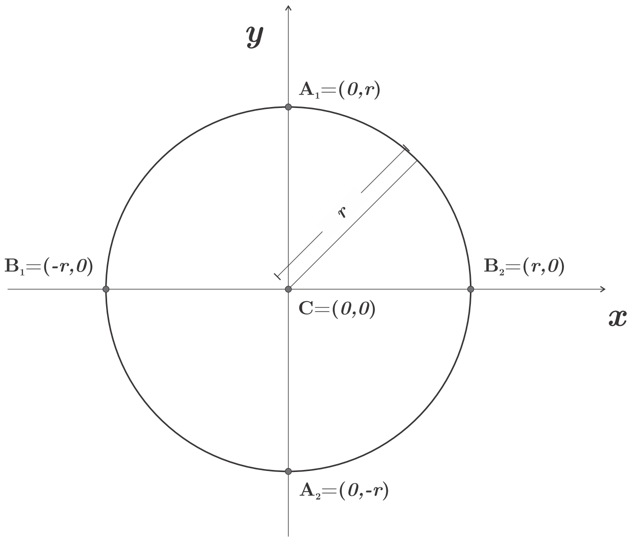


Figura 66.2

Ejemplo 66.1

Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $P = (1, 5)$.

Solución
Para encontrar la ecuación de la circunferencia debemos determinar el centro C y el radio r. De las hipóteis del ejemplo sabemos que $C = (0, 0)$. Por lo tanto solo nos falta encontrar el radio r de la circunferencia.
Observemos que $d(P, C) = r$ y por lo tanto al usar la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos que

$$\begin{aligned} r &= d(P, C) \\ &= d((0, 0), (1, 5)) \\ &= \sqrt{(5-0)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{26}. \end{aligned}$$

Como la circunferencia está centrada en $C = (0,0)$ y su radio es $r = \sqrt{26}$, usando la expresión (66.1) obtenemos que su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 26.$$

Ejemplo 66.2

Halle los elementos y puntos notables de la circunferencia dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - 20 = 0.$$

Solución

Observe que podemos reescribir la ecuación anterior como sigue

$$(x)^2 + (y)^2 = (\sqrt{20})^2).$$

A partir de esta ecuación concluimos que tenemos una circunferencia con centro en $C = (0,0)$ y radio $r = \sqrt{20}$. Los puntos notables en la circunferencia se ubican en las siguientes coordenadas:

- $A_1 = (0, \sqrt{20})$ y $A_2 = (0, -\sqrt{20}$.
- $B_1 = (-\sqrt{20}, 0)$ y $B_2 = (\sqrt{20}, 0)$.

Ejercicios

1. Encuentre los principales elementos de la circunferencia cuya ecuación está dada por
$$x^2 + y^2 = 144$$
2. Trace la gráfica de la circunferencia del segundo ejemplo a partir de los puntos notables encontrados.
3. Encuentre la ecuación de la circunferecia con centro en el origen y cuya longitud de cada uno de sus diámetros es igual a 25. Grafique dicha circunferencia.
4. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de uno de sus diámetros se encuentran ubicados en los puntos $P_1 = (3,4)$ y $P_2 = (-3,-4)$.
5. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro está ubicado en el punto donde la recta $y = 1 + x$ corta al eje y y con radio igual a 2.

Lección 67

La circunferencia II

En la lección anterior dedujimos la ecuación de una circunferencia con centro en el punto $C = (h, k)$ y radio $r > 0$. Para el caso en que el centro de la circunferencia se ubica en el origen del sistema de coordenadas, esto es, $C = (0, 0)$, mostramos como se encontraban los elementos principales de la circunferencia y su gráfica.
Veamos ahora que pasa cuando el centro no es el punto $P = (0, 0)$.

Gráfica de la circunferencia con centro en $C = (h, k)$ y radio r

Consideramos una circunferencia de radio r, cuyo centro está ubicado en el punto del plano (h, k). Como se dedujo en la lección anterior, la ecuación de esta circunferencia es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

En este caso, la forma de la circunferencia es igual a la del caso en que el centro es el punto $(0, 0)$ y se puede verificar fácilmente, usando la ecuación anterior, que los puntos notables C, A_1, A_2, B_1 y B_2 tienen las siguientes coordenadas:

- $C = (h, k)$.
- $A_1 = (h, k + r)$ y $A_2 = (h, k - r)$.
- $B_1 = (h - r, k)$ y $B_2 = (h + r, k)$.

Para este caso, la gráfica de la circunferencia es presentada en la siguiente figura 67.1.

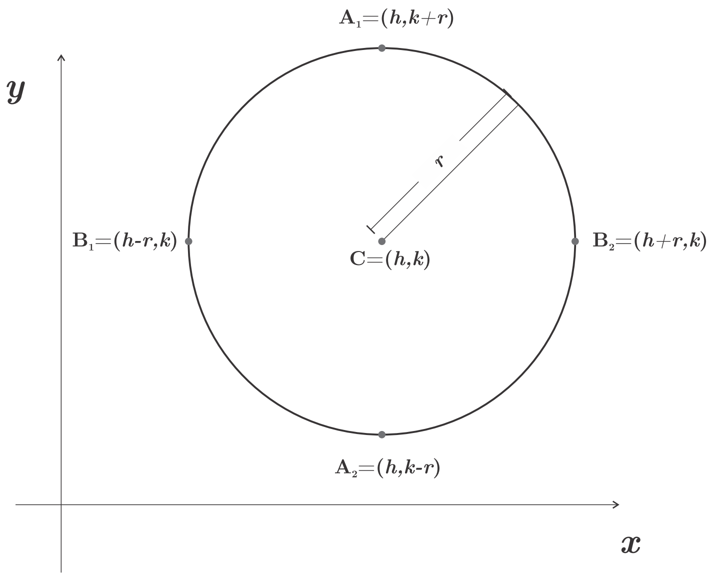


Figura 67.1

Observe que la circunferencia descrita arriba con ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

corresponde a la traslación de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, cuyo centro se ubica en el origen, al punto $C = (h, k)$, que será el centro de un nuevo sistema de coordenadas.

Ejemplo 67.1

Halle los elementos principales de la circunferencia cuya ecuación está dada por

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 16 = 0. \tag{67.1}$$

Solución

Comenzamos reescribiendo la ecuación (67.1) de una manera apropiada y para ello debemos completar los cuadrados perfectos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 4x - 16 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x^2 + 2x + 1) + y^2 - 8 - 1 &= 0 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 9 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 3^2. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación anterior concluimos que tenemos una circunferencia con centro en $C = (-1, 0)$ y radio $r = 3$. Los puntos notables en la circunferencia se ubican en las siguientes coordenadas:

- $A_1 = (-1, 0 + 3) = (-1, 3)$ y $A_2 = (-1, 0 - 3) = (1, -3)$.
- $B_1 = (-1 - 3, 0) = (-4, 0)$ y $B_2 = (-1 + 3, 0) = (2, 0)$.

Ejemplo 67.2

Halle los elementos y trace la gráfica de la circunferencia dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0. \tag{67.2}$$

Solución

Primero reescribimos la ecuación (67.2) de una manera apropiada y para ello debemos completar los cuadrados perfectos como sigue:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 20 - 1 - 4 &= 0\\ (x-1)^2 + (y+2)^2 - 25 &= 0\\ (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 25\\ (x-1)^2 + (y-(-2))^2 &= (5)^2.\end{aligned}$$

A partir de la ecuación anterior concluimos que tenemos una circunferencia con centro en $C = (1, -2)$ y radio $r = 5$. Los puntos notables en la circunferencia se ubican en las siguientes coordenadas:

- $A_1 = (1, -2 + 5) = (1, 3)$ y $A_2 = (1, -2 - 5) = (1, -7)$.
- $B_1 = (1 - 5, -2) = (-4, -2)$ y $B_2 = (1 + 5, -2) = (6, -2)$.

La gráfica de la circunferencia es presentada en la figura 67.2.

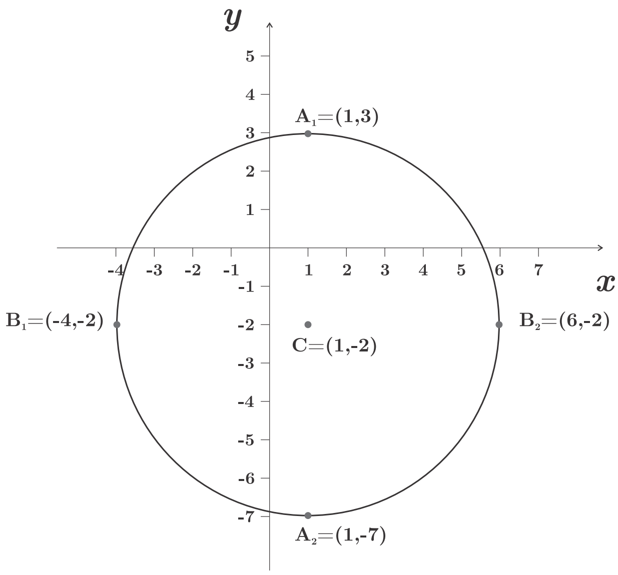


Figura 67.2

Ejemplo 67.3

Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de uno de sus diámetros son los puntos $P_1 = (2, 6)$ y $P_2 = (8, 9)$.

Solución
Para hallar la ecuación de dicha circunferencia debemos encontrar su centro $C = (h, k)$ y su radio r.
En primer lugar observe que como P_1 y P_2 son los extremos de uno de los diámetros de la circunferencia, el punto medio entre P_1 y P_2 es el centro de la circunferencia. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}((2,6) + (8,9)) \\ &= (\frac{1}{2}(2+8), \frac{1}{2}(6+9)) \\ &= (\frac{10}{2}, \frac{15}{2}) \\ &= (5, \frac{15}{2}). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que el centro de la circunferencia es $C = (5, \frac{15}{2})$. Ahora hallemos el radio r. Para esto, notemos que $r = d(P_1, C)$ y por lo tanto podemos utilizar la fórmula de la distancia para calcular el radio como sigue

$$\begin{aligned} r &= d(P_1, C) \\ &= \sqrt{(2-5)^2 + (6 - \frac{15}{2})^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-\frac{3}{2})^2} \\ &= \sqrt{9 + \frac{9}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{45}}{2}. \end{aligned}$$

Usando la información anterior, concluimos que la ecuación de la circunferencia pedida es

$$(x-5)^2 + (y - \frac{15}{2})^2 = \frac{45}{4}.$$

Ejercicios

1. Graficar la circunferencia del primer ejemplo de esta lección.
2. Graficar la circunferencia con ecuación $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 36$.
3. Encuentre la ecuación de la circunferecia que pasa por el origen y cuyo centro es el punto $C = (4, -7)$.

4. Complete los cuadrados para mostrar que la ecuación

$$6x^2 + 6y^2 + 48x - 36y - 300 = 0,$$

representa una circunferencia. Halle sus principales elementos y grafíquela.

5. Complete los cuadrados para probar que la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 18y + 76 = 0,$$

representa una circunferencia. Halle sus principales elementos y trace la gráfica.

6. Grafique las circunferencias $x^2 + y^2 = 16$, $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ y compare las gráficas obtenidas. ¿ Qué puede decir al respecto?.

7. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el intercepto de la recta $y = 3 + x$ con el eje y y cuyo radio es $r = 10$.

Lección 68

La circunferencia III

En esta lección ilustraremos mediante varios ejemplos, como podemos encontrar la ecuación de una circunferencia en diferentes situaciones en donde se tiene información suficiente para conocer su radio y su centro.

Ejemplo 68.1

Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio 5, cuyo centro C, es el punto de intersección de las rectas $y - 2x + 4 = 0$ y $y + 6x - 20 = 0$.

Solución

Primero observe que ya conocemos el radio de la circunferencia, $r = 5$. Ahora debemos encontrar el centro de la circunferencia pedida, es decir, que debemos encontar el punto de intersección de las dos rectas. Para hallar dicho punto observe que si consideramos las dos ecuaciones de las rectas

$$\begin{aligned} y - 2x + 4 &= 0, \\ y + 6x - 20 &= 0, \end{aligned} \tag{68.1}$$

y restamos de la primera ecuación la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} y - 2x + 4 - (y + 6x - 20) &= 0 \\ -8x + 24 &= 0 \\ 8x &= 24 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Si reemplazamos $x = 3$ en la ecuación de la primera recta obtenemos

$$\begin{aligned} y - 2(3) + 4 &= 0 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

El punto de intersección de las dos rectas es $C = (3, 2)$ y de aquí se tiene que la ecuación de la circunferencia pedida es

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

En el próximo ejemplo utilizaremos el siguiente hecho. Considere una circunferencia con centro en $C = (h, k)$. Si una recta L es tangente a la circunferencia en el punto $P = (a, b)$, entonces la recta L_1 que pasa por los puntos C y P, es perpendicular a L.

Ejemplo 68.2

Encuentre la ecuación de la recta L, tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (4,3).

Solución
La circunferencia tiene centro en $C = (0, 0)$. De esta manera podemos calcular la ecuación de la recta L_1 que pasa por el centro de la circunferencia y por el punto $(4, 3)$. Usamos la forma punto pendiente para la ecuación de una recta y obtenemos

$$\begin{aligned}(y - 0) &= \frac{0 - 3}{0 - 4}(x - 0)\\ y &= \frac{3}{4}x.\end{aligned}$$

Observe que la pendiente de esta recta es $m_1 = \frac{3}{4}$. Si m es la pendiente de la recta L, como L_1 y L son perpendiculares, se debe cumplir que $m_1 m = -1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}m &= -1\\ m &= \frac{-4}{3}.\end{aligned} \tag{68.2}$$

De esta manera tenemos que la recta L tiene pendiente $\frac{-4}{3}$ y pasa por el punto $(4, 3)$, por lo tanto al usar la forma punto pendiente de la ecuación de una recta obtenemos que

$$(y - 3) = \frac{-4}{3}(x - 4), \tag{68.3}$$

es la ecuación de la recta L.

Ejemplo 68.3

Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio $r = 9$ que pasa por el origen y cuyo centro se encuentra sobre el semieje positivo y.

Solución
Al solucionar este ejemplo debemos tener en cuenta que existen infinitas circunferencias que pasan por el punto (0,0) y tienen radio $r = 9$.
Sin embargo entre todas estas posibles circunferencias solamente una de ellas tiene su centro en el semieje positivo y. Observe que el centro de la circunferencia debe ser tener la forma $C = (0, a)$ con $a > 0$, ya que debe ser un punto sobre el semieje positivo y y ademas,

$$d((0, 0), (0, a)) = 9.$$

Utilizando la información anterior y la fórmula de la distancia obtenemos que

$$\begin{aligned} 9 &= d((0,0),(0,a)) \\ &= \sqrt{(0-0)^2+(0-a)^2} \\ &= \sqrt{a^2} \\ &= |a| \\ &= a. \end{aligned}$$

De la última igualdad concluimos que $C(0,9)$ es el centro de la circunferencia pedida y como su radio es $r=9$, la ecuación de dicha circunferencia es

$$x^2+(y-9)^2=81.$$

Ejercicios

Sugerencia: Esbozar una gráfica que ilustre la situación.

1. Encuentre la ecuación de la circunferecia con centro $C=(1,1)$, para la cual la recta $y=-x$ es una de sus rectas tangentes.
2. Encuentre la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y que es tangente simultáneamente a las rectas con ecuaciones $y=4$ y $y=-4$.
3. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro está ubicado en el semieje negativo x y que es tangente simultáneamente a las rectas con ecuaciones $x=21$ y $x=-29$.
4. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto donde la recta $y=7$ intercepta al eje y y cuyo centro está ubicado en el punto de intercepcón de las rectas $x=4$ y $y=7$.
5. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo radio es dos veces el radio de la circunferencia con ecuación $x^2+y^2+4y-21=0$ y cuyo centro es el punto de intercepción de las rectas $y=1+x$ y $y=1-x$.
6. Trace la gráfica de cada una de las circunferencias de los ejercicios 1-5.

Lección 69

Traslación de ejes

Supongamos que en el sistema de coordenadas xy ubicamos el punto (h, k) y que en él centramos un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$ tal que los ejes x y x' sean paralelos, al igual que los ejes y y y'. Además supongamos que ambos sistemas de coordenadas están igualmente orientados y tienen la misma unidad de medida (ver figura 69.1).

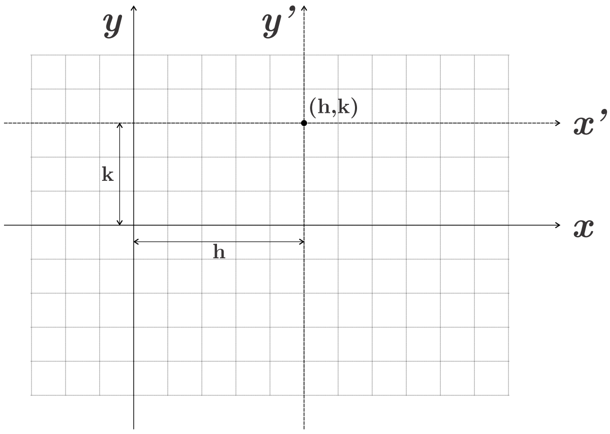


Figura 69.1

Si ubicamos el punto (x', y') en el sistema $x'y'$ ¿cuáles serán las coordenadas de tal punto en el sistema xy? Veamos esta situación en la figura

Observamos que

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k.$$

o, equivalentemente,

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k,$$

definen la relación existente entre los sistemas coordenados xy y $x'y'$.

Ejemplo 69.1

Supongamos que en el punto $(4, 3)$ del sistema de coordenadas xy ubicamos el centro de un sistema de coordenadas $x'y'$.

(a) Si ubicamos el punto P con coordenadas $(5,-2)$ en el sistema $x'y'$ ¿cuáles serán las coordenadas de P en el sistema xy?

(b) Si ubicamos el punto Q con coordenadas $(-4,6)$ en el sistema xy ¿cuáles serán las coordenadas de Q en el sistema $x'y'$?

Solución

Como $(4,3)$ es el centro del sistema $x'y'$ ubicado sobre el sistema xy entonces $h=4$ y $k=3$.

(a) Ubiquemos el sistema de coordenadas $x'y'$ y el punto P (ver figura 69.2).

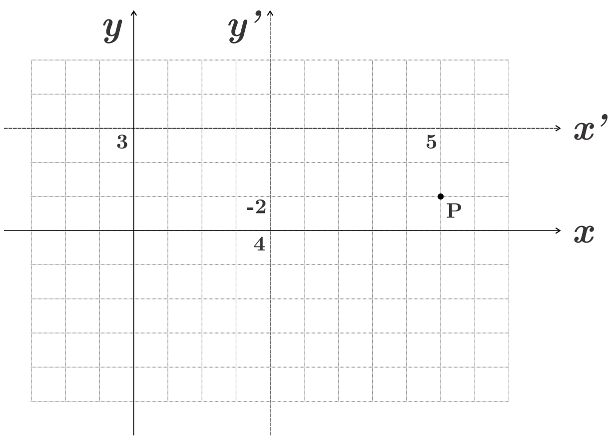


Figura 69.2

El punto P tiene coordenadas, en el plano $x'y'$, $(x',y')=(5,-2)$. Entonces

$$x=x'+h=5+4=9 \quad \text{y} \quad y=y'+k=-2+3=1.$$

De esta forma el punto P tiene coordenadas $(9,1)$ en el sistema coordenado xy.

(b) Ubiquemos el sistema de coordenadas $x'y'$ y el punto Q (ver figura 69.3).

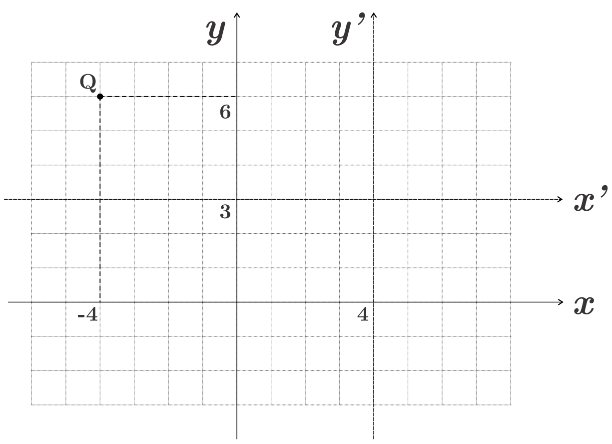


Figura 69.3

El punto Q tiene coordenadas, en el plano xy, $(x, y) = (-4, 6)$. Entonces

$$x' = x - h = -4 - 4 = -8 \quad \text{y} \quad y' = y - k = 6 - 3 = 3.$$

Luego el punto Q tiene coordenadas $(-8, 3)$ en el sistema sistema coordenada $x'y'$.

Ejemplo 69.2

Defina un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$ de tal forma que se simplifique la escritura de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 23 = 0.$$

Solución

Agrupemos los términos que contienen a la variable x y los términos que contienen a la variable y para luego completar un trinomio cuadrado perfecto en cada paréntesis.

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x) + (y^2 + 10y) + 23 &= 0, \\ (x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 10y + 25) - 25 + 23 &= 0, \\ (x - 3)^2 + (y + 5)^2 &= 11. \end{aligned}$$

Si definimos el sistema de coordenadas $x'y'$ mediante las ecuaciones

$$x' = x - 3, \quad y' = y + 5,$$

la ecuación queda simplificada en la forma

$$(x')^2 + (y')^2 = 11.$$

Además identificamos el punto $(h, k) = (3, -5)$. Esto quiere decir que el sistema de coordenadas $x'y'$ estará centrado en el punto $(3, -5)$ del sistema coordenado xy.

Ejercicios

1. En el punto $(10, 5)$ del sistema de coordenadas xy se ubica el centro de un sistema de coordenadas $x'y'$.
   (a) Si ubicamos el punto P de coordenadas $(-3, 8)$ en el sistema $x'y'$ ¿cuáles serán las coordenadas de P en el sistema xy?
   (b) Si ubicamos el punto Q de coordenadas $(5, 4)$ en el sistema $x'y'$ ¿cuáles serán las coordenadas de Q en el sistema xy?
   (c) Si ubicamos el punto R de coordenadas $(7, -2)$ en el sistema xy ¿cuáles serán las coordenadas de R en el sistema $x'y'$?
   (d) Si ubicamos el punto S de coordenadas $(-9, 15)$ en el sistema xy ¿cuáles serán las coordenadas de S en el sistema $x'y'$?
2. En el punto $(-7, 9)$ del sistema de coordenadas xy se ubica el centro de un sistema de coordenadas $x'y'$. Escriba la ecuación $5x - 4y = 15$ en el sistema de coordenadas $x'y'$.

3. En el punto $(5, 7)$ del sistema de coordenadas xy se ubica el centro de un sistema de coordenadas $x'y'$. Escriba la ecuación

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y - 65 = 0$$

en el sistema de coordenadas $x'y'$.

4. Defina un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$ de tal forma que se simplifique la escritura de la ecuación

$$2x^2 - 3y^2 + 16x + 6y + 23 = 0.$$

Lección 70

Parábolas I

Definición

Llamamos **parábola** al conjunto de puntos del plano tales que su distancia a una recta fija, llamada **directriz**, es igual a su distancia a un punto dado, exterior a la directriz, llamado **foco**.

En la figura 70.1 se ilustra la condición que debe cumplir cada punto de la parábola: la distancia del punto a la directriz es igual a la distancia del punto al foco.

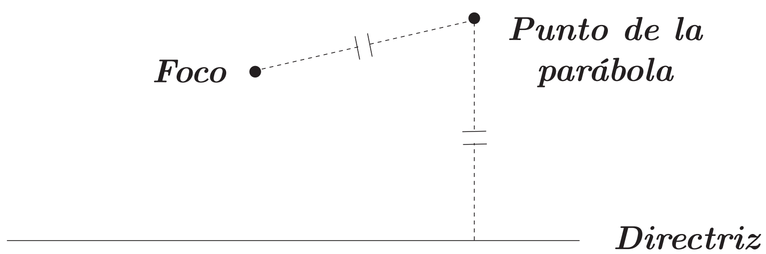


Figura 70.1

La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz R se denomina **eje focal** de la parábola. El punto en el cual el eje focal intersepta a la parábola se llama **vértice** de la parábola. Observemos que, por la definición de parábola, el vértice es el punto medio del segmento sobre el eje focal que une el foco con la directriz.

La recta que pasa por el foco y es paralela a la directriz R intersepta a la parábola en dos puntos. Al segmento que une estos dos puntos se le llama **lado recto**. La terminología anterior se ilustra en la figura 70.2.

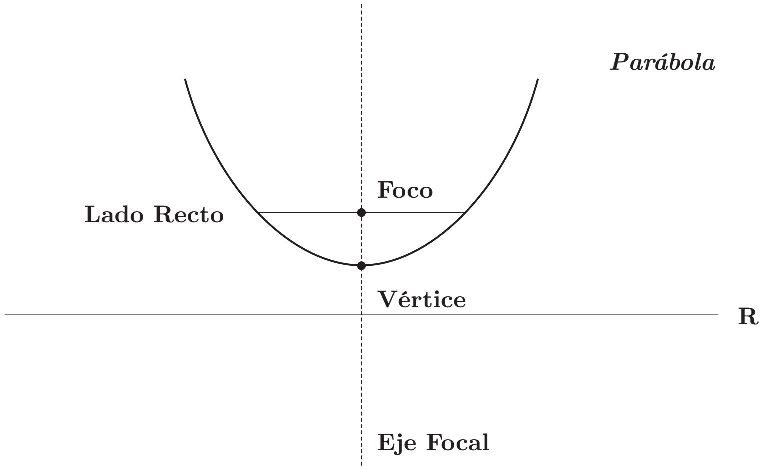


Figura 70.2

Ecuación de la Parábola

Ahora nos planteamos el problema de escribir una ecuación que caracterice los puntos de una parábola dada. Para tal efecto consideramos el sistema de coordenadas cartesianas xy en el plano. Por simplicidad, nos limitaremos por ahora al caso en que el vértice de la parábola es el origen $(0, 0)$ y su eje focal es el eje x o el eje y:

a) Si el eje focal es el eje y, el foco está ubicado en un punto de la forma $(0, p)$ con $p > 0$ o $p < 0$.

b) Si el eje focal es el eje x, el foco está ubicado en un punto de la forma $(p, 0)$ con $p > 0$ o $p < 0$.

Comencemos con el caso a). Como veremos, la situación es la descrita en las figuras 70.3 y 70.4.

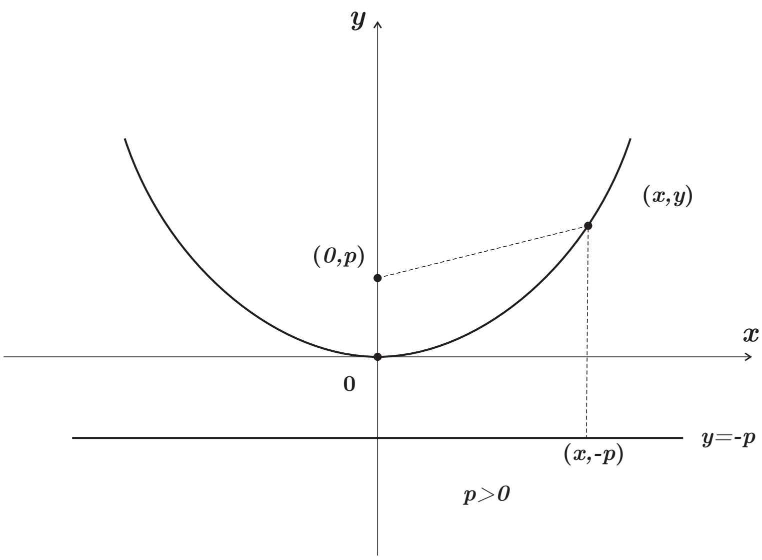


Figura 70.3

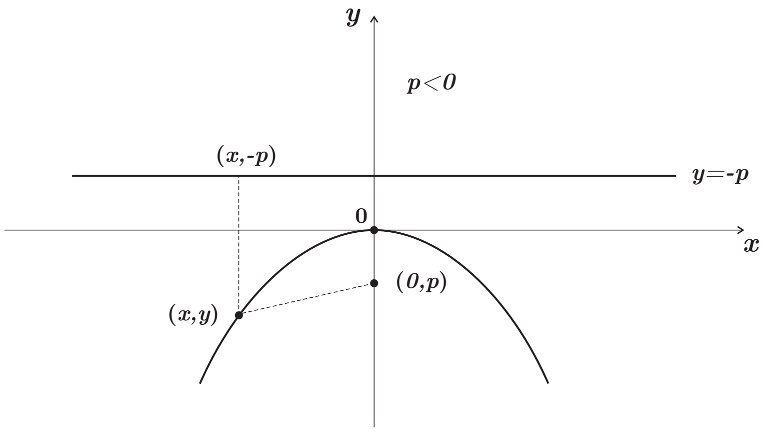


Figura 70.4

En este caso la ecuación de la directriz está dada por la $y = -p$ (pues el vértice $(0,0)$ equidista del foco y de la directriz). Si tomamos un punto $P = (x,y)$ en la parábola, por la definición de parábola la distancia entre (x,y) y $(0,p)$ es igual a la distancia entre (x,y) y la recta $y = -p$. Además, notemos que la distancia de (x,y) a la recta $y = -p$ es igual a la distancia entre (x,y) y $(x,-p)$. Así:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2},\\
\sqrt{x^2 + (y-p)^2} &= \sqrt{(y+p)^2},\\
x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2,\\
x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2,\\
x^2 &= 4py,
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$y = \frac{1}{4p}x^2. \tag{70.1}$$

Observemos que al reemplazar x por $-x$ en la ecuación (70.1), ésta no cambia. Así (x,y) es un punto de la parábola si y sólo si $(-x,y)$ es un punto de la parábola. Esto es, la parábola es simétrica con respecto al eje y. Además, si $p > 0$, entonces de la ecuación (70.1) vemos que $y \geq 0$. Notemos que cuando x toma valores grandes y positivos, o grandes y negativos, y toma valores grandes y positivos. En este caso la parábola se "abre" hacia arriba (véase la figura 70.3).

Si $p < 0$, entonces de la ecuación (70.1) vemos que $y \leq 0$. Notemos que ahora cuando x toma valores grandes y positivos, o grandes y negativos, y toma valores grandes y negativos. En este caso la parábola se "abre" hacia abajo (véase la figura 70.4).

Ahora hallemos los extremos del lado recto. Esto es, hallemos los puntos en los cuales la recta $y = p$ corta a la parábola. Reemplazando y por p en (70.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4p}x^2 &= p, \\ x^2 &= 4p^2, \\ x^2 - 4p^2 &= 0, \\ (x-2p)(x+2p) &= 0, \\ x = 2p \text{ o } x &= -2p, \end{aligned}$$

Así, los extremos del lado recto son $(-2p, p)$ y $(2p, p)$. La longitud del lado recto es la distancia entre estos dos puntos:

$$\sqrt{(p-p)^2 + (2p-(-2p))^2} = \sqrt{(4p)^2} = 4\,|p|\,.$$

Notemos que a mayor $|p|$, mayor es la longitud del lado recto y en consecuencia la parábola es más "abierta". Resumamos toda la información anterior:

La ecuación de la parábola que tiene vértice en $(0,0)$ *y foco en* $(0,p)$ *está dada por*

$$y = \frac{1}{4p}x^2,$$

y la ecuación de la directriz está dada por $y = -p$.

- *Si* $p > 0$ *la parábola se "abre" hacia arriba.*
- *Si* $p < 0$ *la parábola se "abre" hacia abajo.*

Nota Observemos que p es una constante cuyo valor absoluto es la distancia del foco al vértice de la parábola. Esta observación será útil, más adelante, cuando consideremos traslación de ejes.

Ejemplo 70.1

Halle una ecuación para la parábola cuyo vértice está en el origen, cuyo eje focal es el eje y, y que contiene al punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Trace la gráfica de dicha parábola.

Solución

Como el eje focal es el eje y, el foco de la parábola es un punto de la forma $(0, p)$. Sabemos además que el vértice está en el origen. En consecuencia una ecuación para la parábola es de la forma

$$y = \frac{1}{4p}x^2. \tag{70.2}$$

Para determinar el valor de p usamos el hecho de que la parábola contiene al punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Al reemplazar y por $-1/2$ y x por $1/2$ en (70.2) obtenemos:

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{4p}\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

De esta igualdad tenemos que $p = -1/8$. Al reemplazar en (70.2), concluimos que la ecuación para la parábola es $y = -2x^2$.

Con el fin de trazar la gráfica, notemos que $p < 0$, de esta manera la parábola se abre hacia abajo. La directriz de la parábola es la recta horizontal $y = 1/8$. El lado recto de la parábola tiene extremos en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ y $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. En la figura 70.5 representamos la gráfica de la parábola con su lado recto y su foco.

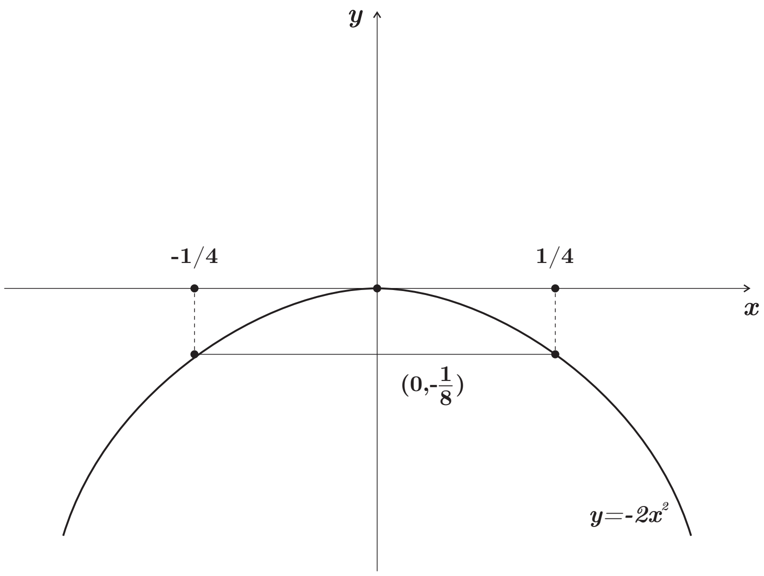


Figura 70.5

Ejercicios

1. Halle una ecuación para la parábola que tiene vértice en el origen, su eje focal es y y pasa por el punto $(-1/2, 5)$.
2. La ecuación de una parábola viene dada por $y = -25x^2$. Halle una ecuación para la directriz de dicha parábola y las coordenadas de su foco.
3. La ecuación de una parábola viene dada por $16y = x^2$. Halle una ecuación para la directriz de dicha parábola y las coordenadas de su foco.

Lección 71

Parábolas II

Consideremos ahora el caso b). Como veremos la situación es la descrita en las figuras 71.1 y 71.2.

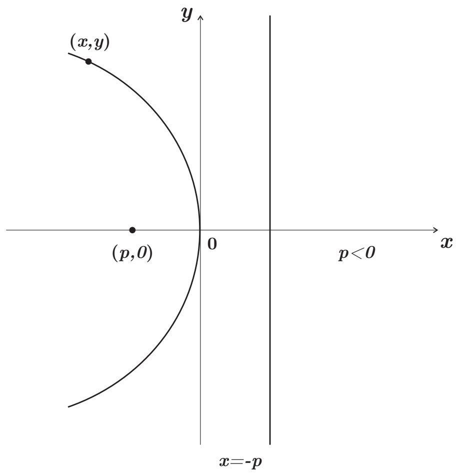


Figura 71.1

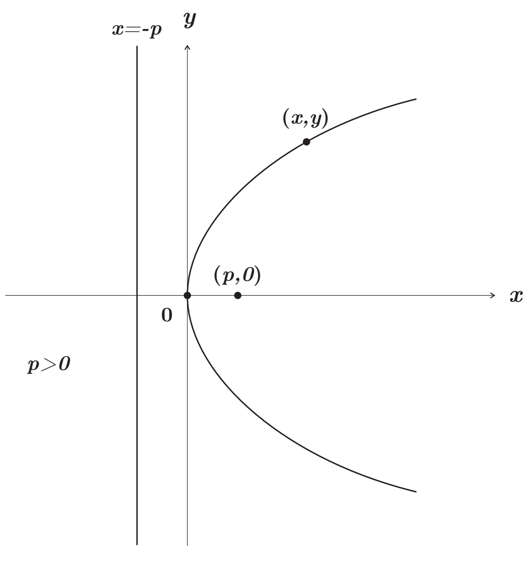


Figura 71.2

En este caso la ecuación de la directriz está dada por $x = -p$. Si tomamos un punto

$P = (x, y)$ en la parábola, por la definición de parábola la distancia entre (x, y) y $(p, 0)$ es igual a la distancia entre (x, y) y la recta $x = -p$. Además, notemos que la distancia de (x, y) a la recta $x = -p$ es igual a la distancia entre (x, y) y $(-p, y)$. Procediendo como lo hicimos en el caso a) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y))^2},\\
\sqrt{(x-p)^2 + y^2} &= \sqrt{(x+p)^2},\\
(x-p)^2 + y^2 &= (x+p)^2,\\
x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2,\\
y^2 &= 4px,
\end{aligned}
$$

Que equivale a

$$x = \frac{1}{4p}y^2. \tag{71.1}$$

Ahora observemos que al reemplazar y por $-y$ en la ecuación (71.1), ésta no cambia. Así (x, y) es un punto de la parábola si y sólo si $(x, -y)$ es un punto de la parábola. Esto es, la parábola es simétrica rcon especto al eje x. Además, si $p > 0$ entonces de la ecuación (71.1) vemos que $x \geq 0$. Notemos que ahora cuando y toma valores grandes y positivos, o grandes y negativos, x toma valores grandes y positivos. En este caso la parábola se "abre" a la derecha (véase la figura 71.1).

Si $p < 0$, entonces de la ecuación (71.1) vemos que $x \leq 0$. Ahora, notemos que cuando y toma valores grandes y positivos, o grandes y negativos, x toma valores grandes y negativos. En este caso la parábola se "abre" a la izquierda (véase la figura 71.2).

Ahora hallemos los extremos del lado recto: estos son los puntos en los cuales la recta $x = p$ corta a la parábola. Reemplazando x por p en (71.1)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4p}y^2 &= p,\\
y^2 &= 4p^2,\\
y^2 - 4p^2 &= 0,\\
(y-2p)(y+2p) &= 0,\\
y = 2p \text{ o } y &= -2p.
\end{aligned}
$$

Obtenemos entonces que el lado recto tiene extremos en $(p, -2p)$ y $(p, 2p)$ y que su longitud es $4\,|p|$. Nuevamente a mayor $|p|$, más "abierta" es la parábola.

Resumamos toda la información anterior del caso b):

La ecuación de la parábola que tiene vértice en $(0, 0)$ *y foco en* $(p, 0)$ *viene dada por*

$$x = \frac{1}{4p}y^2,$$

y la ecuación de la recta directriz viene dada por $x = -p$.

- *Si* $p > 0$ *la parábola se "abre" a la derecha.*

- *Si $p < 0$ la parábola se "abre" a la izquierda.*

Nota Observemos que, nuevamente, p es una constante cuyo valor absoluto es la distancia del foco al vértice de la parábola. Esta observación será útil, más adelante, cuando consideremos traslación de ejes.

Ejemplo 71.1

Encuentre una ecuación para la parábola que tiene vértice en el origen, su eje focal es el eje x y corta a la recta $x = 1$ en los puntos $(1, \frac{1}{3})$ y $(1, -\frac{1}{3})$. A continuación esboce la gráfica de la parábola.

Solución

En primer lugar observemos que la ecuación de la parábola es de la forma

$$x = \frac{1}{4p}y^2, \tag{71.2}$$

pues el eje focal es el eje x. Para hallar p usemos la información del enunciado: al reemplazar $x = 1$ y $y = \pm\frac{1}{3}$ en la ecuación (71.2), obtenemos que $p = \frac{1}{36}$. Usando nuevamente la ecuación (71.2), concluimos que la ecuación de la parábola es $x = 9y^2$. La parábola se abre a la derecha. En la figura 71.3 esbozamos la gráfica.

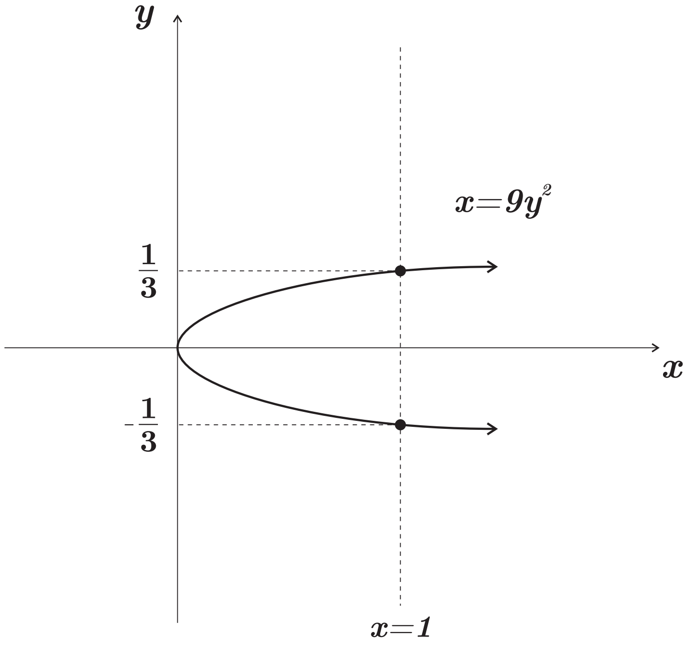


Figura 71.3

Ejercicios

1. Halle la ecuación de la parábola que cumple las condiciones dadas.

   (a) Tiene vértice en el origen y la ecuación de la directriz es $y = -3$.

(b) Tiene el foco en $(0, -1)$ y la ecuación de la directriz es $y = 1$.

2. La ecuación de una parábola viene dada por $y^2 = 16x$. Halle una ecuación para la directriz de dicha parábola y esboce la gráfica de la parábola.

3. La ecuación de una parábola viene dada por $-20y = x^2$. Halle las coordenadas del foco de dicha parábola y esboce la gráfica de la parábola.

4. Halle los puntos de intersección de la recta $y = x + 2$ y la parábola que tiene foco en $(0, \frac{1}{4})$ y vértice en el origen.

Lección 72

Parábolas III

Ejemplo 72.1

Encuentre una ecuación para la parábola que tiene vértice en el origen, su eje focal es el eje y y pasa por el punto $(2, -16)$.

Solución

Puesto que el vértice está en el origen y su eje focal es el eje y, la parábola está dada por una ecuación de la forma

$$y = \frac{1}{4p}x^2. \tag{72.1}$$

Sólo resta encontrar p. Para esto, usemos el hecho de que la parábola contiene al punto $(2, -16)$. Al reemplazar $x = 2$ y $y = -16$ en (72.1), obtenemos

$$-16 = \frac{1}{4p}4,$$

es decir, $p = -\frac{1}{16}$. Reemplazando este valor en (72.1) y simplificando obtenemos la ecuación requerida

$$y = -4x^2.$$

Ejemplo 72.2

Halle una ecuación para la parábola cuyo eje focal es el eje x, tiene su vértice en el origen y corta a la recta $x = -5$ en los puntos $(-5, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(-5, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Solución

En este caso la parábola está dada por una ecuación de la forma

$$x = \frac{1}{4p}y^2. \tag{72.2}$$

Puesto que la parábola contiene los puntos $(-5, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(-5, \frac{1}{\sqrt{2}})$, al reemplazarlos en la ecuación (72.2) obtenemos

$$-5 = \frac{1}{4p}\frac{1}{2},$$

$$p = \frac{-1}{40}.$$

Reemplazando este el valor de p en (72.2) concluimos que la ecuación que describe a la parábola es

$$x = -10y^2.$$

Ejemplo 72.3

Halle la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas:

(a) Tiene vértice en el origen y su directriz es $y = 2$.

(b) Tiene foco en $(1, 0)$ y su directriz es $x = -1$.

Solución

a) De las condiciones dadas, el eje focal de la parábola es el eje y (pues tal eje contiene al vértice y es perpendicular a la directriz). En consecuencia, la parábola está determinada por una ecuación de la forma

$$y = \frac{1}{4p}x^2, \tag{72.3}$$

donde $(0, p)$ es el foco. Sólo nos queda por encontrar, entonces, el valor de p. Recordemos que el vértice de una parábola equidista de la directriz y del foco. Como en este caso la directriz es la recta $y = 2$, el foco es $(0, -2)$. Así, $p = -2$ y al reemplazar este valor en (72.3) llegamos a

$$y = \frac{-1}{8}x^2,$$

que es la ecuación requerida.

b) En este caso el eje focal de la parábola es el eje x, pues tal eje contiene al foco y es perpendicular a la directriz. Así, la parábola viene dada por una ecuación del tipo

$$x = \frac{1}{4p}y^2. \tag{72.4}$$

Nuevamente debemos encontrar el valor de p. Recordemos que p en la ecuación (72.4) es tal que el foco se ubica en el punto $(p, 0)$. En este caso, como el foco está en $(1, 0)$, tenemos que $p = 1$. Reemplzando en (72.4)

$$x = \frac{1}{4}y^2.$$

Ejemplo 72.4

Una parábola viene dada por la ecuación $16y = -48x^2$. Determine las coordenadas del foco, la ecuación para la directriz de la parábola, y los puntos extremos del lado recto. A continuación esboce la gráfica de la parábola.

Solución

La ecuación $16y = -48x$ se puede llevar a la forma

$$y = \frac{-48}{16}x^2,$$

$$y = -3x^2.$$

Observemos que esta ecuación es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$, con $(4p)^{-1} = -3$, es decir, $p = -\frac{1}{12}$.

Tenemos entonces que el foco está en $(0, -\frac{1}{12})$ y la directriz viene dada por $y = \frac{1}{12}$. El lado recto de la parábola tiene extremos en $(\frac{-2}{12}, \frac{-1}{12})$ y $(\frac{2}{12}, \frac{-1}{12})$. Observemos la figura 72.1.

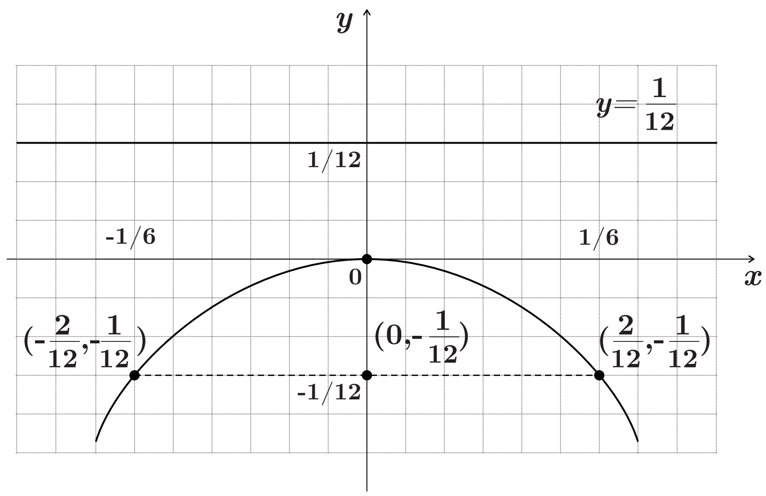


Figura 72.1

Ejemplo 72.5

Halle los puntos de intersección de la recta $y = -x - 1$ y la parábola que tiene vértice en el origen y foco en $(-\frac{1}{8}, 0)$.

Solución

En primer lugar, hallemos la ecuación de la parábola. Puesto que su vértice está en el origen y su foco sobre el eje x, la ecuación de la parábola es de la forma (72.4), donde $(p, 0)$ es el foco. Observemos que, en este caso $(p, 0) = (-\frac{1}{8}, 0)$. Al reemplazar $p = -1/8$ en (72.4), obtenemos la ecuación $x = -2y^2$. Esta es la ecuación para la parábola.

Ahora hallamos los puntos de intersección requeridos. Si (x, y) denota uno de tales puntos, observemos que los números x y y satisfacen tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola. Podemos proceder entonces despejando x en la ecuación de la recta, e igualando el valor obtenido con la x de la parábola. Esto es,

$$-y - 1 = -2y^2,$$
$$2y^2 - y - 1 = 0.$$

La última igualdad es una ecuación cuadrática en la variable y, cuyas soluciones son

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}.$$

Obtenemos entonces dos valores: $y = -1/2$ y $y = 1$. Al reemplazar cada uno de estos valores en la ecuación de la parábola (o, equivalentemente, en la ecuación de la recta) obtenemos las coordenadas en la variable x de los puntos de intersección: si $y = -1/2$, $x = -2 \cdot (-1/2)^2 = -1/2$. Si $y = 1$, $x = -2 \cdot 1^2 = -2$.

Los puntos de intersección de la recta y la parábola son $(-1/2, -1/2)$ y $(-2, 1)$.

Ejercicios

1. Encuentre una ecuación para la parábola que tiene vértice en el origen, su eje focal es el eje x y pasa por el punto $(-4, 1)$.
2. Una parábola viene dada por la ecuación $16x = -48y^2$. Determine las coordenadas del foco, la ecuación para la directriz de la parábola, y los puntos extremos del lado recto. A continuación esboce la gráfica de la parábola.
3. Halle los puntos de intersección de la recta $y = -x$ y la parábola que tiene vértice en el origen y foco en $(-\frac{1}{8}, 0)$.

Lección 73

Parábolas IV

Parábola con eje focal paralelo a los ejes coordenados

Consideremos ahora una parábola cuyo eje focal es paralelo a uno de los ejes coordenados. En lo que sigue, supondremos que el vértice de la parábola está ubicado en el punto (h, k) del sistema de coordenadas xy. Dos ejemplos de esta situación se ilustran en las figuras 73.1 y 73.2.

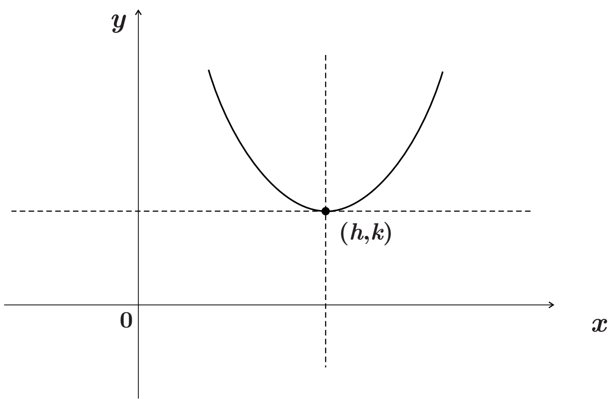


Figura 73.1

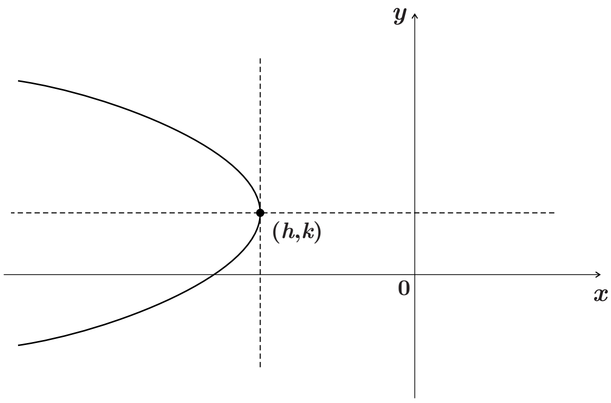


Figura 73.2

Definamos un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$ con centro en el vértice de la parábola.

Sabemos que los sistemas coordenados xy y $x'y'$ están relacionados por las ecuaciones

$$x' = x - h \text{ y } y' = y - k. \tag{73.1}$$

Tal como lo hicimos antes, consideraremos dos casos:

a) El eje focal es la recta $x = h$, es decir, el eje focal es paralelo al eje y.

b) El eje focal es la recta $y = k$, es decir, el eje focal es paralelo al eje x.

Comencemos con el caso a). En el sistema $x'y'$ el vértice de la parábola está en el origen, y su eje focal es y'. Así, por la teoría que hemos estudiado, la parábola está dada por una ecuación de la forma

$$y' = \frac{1}{4p}x'^2, \tag{73.2}$$

donde p es una constante cuyo valor absoluto es la distancia del foco al vértice. Reemplazando (73.1) en (73.2), obtenemos que la parábola está dada por la ecuación

$$y - k = \frac{1}{4p} = (x - h)^2,$$

donde p es una constante cuyo valor absoluto es la distancia del foco al vértice. Observemos entonces que, en las coordenadas xy, el vértice está en (h, k), el foco en $(h, k+p)$ y la directriz está dada por la ecuación $y = k - p$. Resumamos la información anterior:

La ecuación de la parábola que tiene vértice en (h, k) y foco en $(h, k + p)$ está dada por

$$y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2,$$

y la ecuación de la directriz está dada por $y = k - p$.

- *Si $p > 0$ la parábola se “abre” hacia arriba.*
- *Si $p < 0$ la parábola se “abre” hacia abajo.*

Continuemos con el caso b). Razonando como lo hicimos en el caso anterior, obtenemos que la parábola en este caso está dada por una ecuación de la forma

$$x - h = \frac{1}{4p} = (y - k)^2,$$

El resumen en este caso es:

La ecuación de la parábola que tiene vértice en (h, k) y foco en $(h + p, k)$ está dada por

$$x - h = \frac{1}{4p}(y - k)^2,$$

y la ecuación de la directriz está dada por $x = h - p$.

- *Si $p > 0$ la parábola se “abre” hacia la derecha.*
- *Si $p < 0$ la parábola se “abre” hacia la izquierda.*

Ejemplo 73.1

a) Escriba la ecuación de la parábola que tiene vértice en $(-1, 3)$ y cuyo foco está en $(-1, 2)$.

b) Escriba la ecuación de la parábola que tiene vértice en $(3, 0)$ y cuyo foco está en $(1, 0)$.

Solución

a) En este caso, $h = -1$, $k = 3$ y $p = -1$ (p se despeja de la igualdad $(h, p+k) = (-1, 2)$). Por tanto, la ecuación requerida es

$$y - 3 = \frac{1}{4(-1)}(x+1)^2,$$

que se puede escribir también como

$$4y + x^2 + 2x - 11 = 0.$$

b) En este caso, $h = 3$, $k = 0$ y $p = -2$ (p se despeja de la igualdad $(h+p, k) = (1, 0)$). Por tanto, la ecuación requerida es

$$x - 3 = \frac{1}{4(-2)}y^2,$$

que se puede escribir también como

$$8x + y^2 + 24 = 0.$$

Ejercicios

1. Halle la ecuación de la parábola que cumple las condiciones dadas.
   (a) Tiene vértice en $(0, 2)$ y su eje focal es el eje y.
   (b) Tiene el foco en $(-3, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = 1$.
2. La ecuación de una parábola viene dada por $(y-1)^2 = 16(x-4)$. Halle una ecuación para la directriz de dicha parábola y esboce la gráfica de la parábola.
3. La ecuación de una parábola viene dada por $-20(y+3) = (x-2)^2$. Halle las coordenadas del foco de dicha parábola y esboce la gráfica de la parábola.
4. Halle los puntos de intersección de la recta $y = x$ y la parábola que tiene foco en $(0, 0)$ y vértice en $(1, 0)$.

Lección 74

Parábolas V

Ejemplo 74.1

Determine las coordenadas del vértice y del foco de la parábola dada por la ecuación $y = -9x^2 + 18x - 10$.

Solución
La idea que desarrollaremos consiste en tratar de llevar la ecuación dada para la parábola a una de las formas de la lección anterior. Para ello, "completamos cuadrados" en la ecuación:

$$\begin{aligned}
y &= -\,9x^2 + 18x - 10,\\
y &= -\,9\left(x^2 - 2x + \frac{10}{9}\right),\\
y &= -\,9\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{10}{9}\right),\\
y &= -\,9\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{9}\right),\\
y &= -\,9(x^2 - 2x + 1) - 1,\\
y + 1 &= -\,9(x-1)^2.
\end{aligned}$$

Observemos que la última ecuación es de la forma

$$y - k = \frac{1}{4p}(x-h)^2.$$

En este caso, el vértice de la parábola es $(h, k) = (1, -1)$, su foco es de la forma $(h, k+p) = (1, -1+p)$, y

$$\frac{1}{4p} = -9.$$

Obtenemos $p = \frac{-37}{36}$. Así, el foco de la parábola es

$$(h, k+p) = \left(1, \frac{-37}{36}\right).$$

Ejemplo 74.2

Halle una ecuación para la parábola cuyo vértice es $(-2, 1)$, cuyo eje focal es la recta $y = 1$ y que corta al eje x cuando $x = 1$.

Solución
Dado que el eje focal es paralelo al eje x, la ecuación que buscamos es de la forma

$$x - h = \frac{1}{4p}(y - k)^2.$$

En este caso, el vértice de la parábola es $(-2, 1)$. Así $(h, k) = (-2, 1)$. Tenemos entonces que

$$x + 2 = \frac{1}{4p}(y - 1)^2.$$

Sólo nos queda por hallar el coeficiente del término cuadrático en la ecuación anterior, es decir, el valor de $1/4p$. Para esto, usemos el hecho de que la parábola corta al eje x cuando $x = 1$, es decir, la parábola pasa por el punto $(1, 0)$. Al reemplazar este punto en la ecuación, obtenemos

$$3 = \frac{1}{4p}.$$

Concluimos entonces que la ecuación requerida es

$$x + 2 = 3(y - 1)^2.$$

Ejemplo 74.3

Encuentre los puntos en los cuales la parábola $x = y^2 + 1$ corta a la recta $x + y = 2$.

Solución
Observemos que los puntos (x, y) requeridos satisfacen ambas ecuaciones. Esto es, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x =& y^2 + 1, \\ x + y =& 2. \end{aligned}$$

Podemos proceder de varias formas. Por ejemplo, podemos reemplazar la x de la primera ecuación en la segunda, para obtener una ecuación cuadrática en y:

$$\begin{aligned} y^2 + 1 + y =& 2, \\ y^2 + y - 1 =& 0. \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación está dada por la fórmula cuadrática

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Hemos obtenido las coordenadas en y de los puntos requeridos. Para encontrar las coordenadas en x, reemplazamos cada uno de los valores de y hallados en alguna de las ecuaciones, por ejemplo en la segunda. Así, si

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

entonces

$$x = 2 - y = 2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Así, el punto $(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ es uno de los puntos de intersección. Para hallar el otro punto, tomamos el otro valor de y hallado, y calculamos x. Esto es, si

$$y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

entonces

$$x = 2 - y = 2 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Así, el punto $(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ es el otro punto de intersección requerido.

Ejemplo 74.4

Determine los puntos en los cuales la parábola cuyo eje focal es el eje y, y que pasa por $(1,-1)$ y por $(2,-1/3)$, corta al eje x.

Solución

En primer lugar debemos hallar una ecuación para la parábola descrita. En este caso, el eje focal de la parábola es la recta vertical descrita por la ecuación $x = 0$ (el eje y). Usando los resultados de la lección anterior, tenemos que la ecuación para la parábola es de la forma

$$y - k = c(x-h)^2, \tag{74.1}$$

donde $c = \frac{1}{4p}$. Puesto que el foco (h,k) está en el eje y, $h = 0$. Para hallar k y c usemos el hecho de que los puntos $(1,-1)$ y $(2,-1/3)$ pertenecen a la parábola. Al reemplazar $x = 1$ y $y = -1$ en (74.1) tenemos que

$$-1 - k = c.$$

Al reemplazar $x = 2$ y $y = -1/3$ en (74.1) tenemos que

$$-\frac{1}{3} - k = 4c.$$

Tenemos entonces dos ecuaciones lineales. Resolviendo este sistema de ecuaciones, concluimos que $c = 2/9$ y que $k = -11/9$. Reemplazando en (74.1) tenemos que

$$y + \frac{11}{9} = \frac{2}{9}x^2.$$

Para determinar en qué puntos la parábola corta al eje x, basta reemplazar $y = 0$ en la ecuación anterior, para obtener

$$x = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

Así, los puntos de corte requeridos son $(\sqrt{\frac{11}{2}}, 0)$ y $(-\sqrt{\frac{11}{2}}, 0)$.

Ejercicios

1. Esboce las gráficas de las parábolas de los ejemplos 1 y 2 de esta lección.
2. Esboce las gráficas, en el mismo plano cartesiano, de la parábola y de la recta del ejemplo 3 de esta lección. Señale en el dibujo los puntos de intersección de ambas gráficas.
3. Esboce las gráficas, en el mismo plano cartesiano, de la parábola y del eje x del ejemplo 4 de esta lección. Señale en el dibujo los puntos de intersección de ambas gráficas.

Lección 75

La elipse I

Definición

La **elipse** es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es igual a una constante positiva $2a$, que es mayor a la distancia entre los focos.
Para construir una elipse podemos proceder como se ilustra en la figura 75.1.

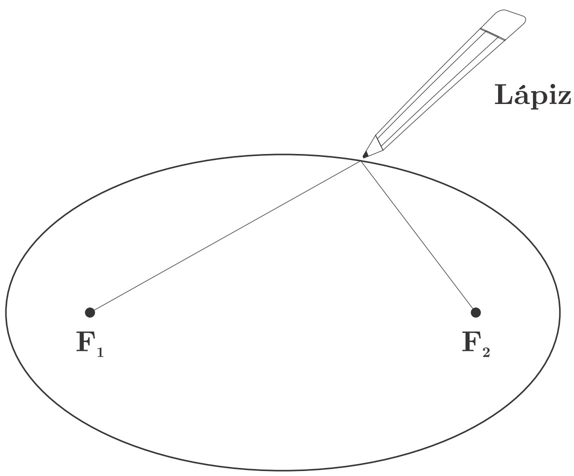


Figura 75.1

Se fijan dos puntos, los cuales llamaremos F_1 y F_2 y se elige una cuerda de longitud $2a$, con $2a > d(F_1, F_2)$. Se fijan los extremos de la cuerda en F_1 y F_2. La curva que se describe al mover la punta del lápiz manteniendo tensionada la cuerda es una elipse con focos ubicados en F_1 y F_2.

Ecuación de una elipse

A continuación deduciremos la ecuación cartesiana de una elipse.
Consideremos una elipse cuyos focos sean los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, donde $c > 0$, y supongamos que $P = (x, y)$ es un punto de la elipse.
Denotemos por $2a$, con $a > 0$, a la suma de las distancias de P a F_1 y de P a F_2. Como

P es un punto sobre la elipse se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 &= (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4xc \\
a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\
(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 &= (a^2 - xc)^2 \\
a^2((x-c)^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2).
\end{aligned}$$

Observemos que como $2a > d(F_1, F_2)$ y como $d(F_1, F_2) = 2c$, entonces $a > c$ y por lo tanto $a^2 > c^2$. Concluimos de esta manera que $a^2 - c^2 > 0$ y si definimos $b^2 = a^2 - c^2$, con $b > 0$, al reemplazar en la ecuación obtenida anteriormente se obtiene

$$\begin{aligned}
b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\
\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

La última expresión es la ecuación de la elipse con focos en $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, con constante en la definición igual a $2a$.

Ejemplo 75.1

Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(4, 0)$ y $(-4, 0)$ y que pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución

Dado que los focos de la elipse son los puntos $(4, 0)$ y $(-4, 0)$, podemos concluir que $c = 4$. Como el punto $(0, 1)$ es un punto de la elipse y la ecuación de una elipse de este tipo es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

entonces se debe cumplir que

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1.$$

De esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1^2}{b^2} &= 1 \\ b^2 &= 1,\end{aligned}$$

y como $b > 0$, concluimos que $b = 1$. Para finalizar observe que

$$a^2 = b^2 + c^2 = 1^2 + 4^2 = 17.$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ejercicios

1. Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y que pasa por el punto $(0, -7)$.
2. Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y que pasa por el punto $(4, 0)$.
3. Encuentre los focos de la elipse cuya ecuación está dada por

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

4. Encuentre los focos de la elipse cuya ecuación está dada por

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Lección 76

La elipse II

En esta lección estudiaremos los principales elementos de una elipse y aprenderemos a graficar una **elipse horizontal** a partir del análisis de su ecuación cartesiana.

Elementos geométricos de una elipse

Observemos los elementos resaltados en la siguiente figura 76.1.

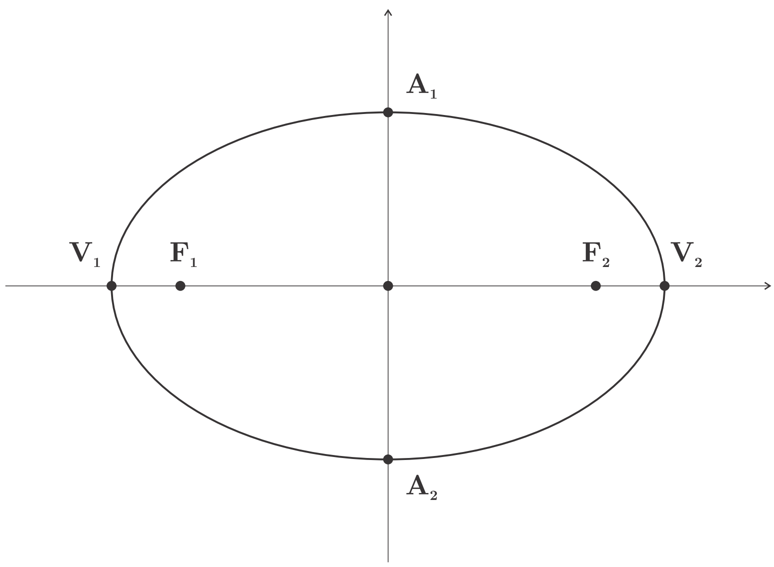


Figura 76.1

- Al punto C, punto medio entre los focos F_1 y F_2, lo denominamos centro de la elipse.
- A la recta L, que pasa por los focos F_1 y F_2, se le llama eje focal.
- Los puntos de intersección de la elipse con el eje focal L, denotados por V_1 y V_2 se llaman vértices de la elipse.
- Al segmento $\overline{V_1V_2}$ se le denomina eje mayor de la elipse.
- A la recta K que pasa por el centro C y es perpendicular al eje focal L se le llama eje normal de la elipse.
- Al segmento $\overline{A_1A_2}$, donde A_1 y A_2 son los puntos de intersección de la elipse con el eje normal K, se le denomina eje menor de la elipse.

Gráfica de la elipse con focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$.

En este caso el centro de la elipse está ubicado en el origen, $C = (0, 0)$. Además, como los focos de la elipse están sobre el eje x, decimos que dicha elipse es horizontal.

Simetrías

Observe que en la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

al reemplazar x por $-x$ o y por $-y$, obtenemos la misma ecuación, debido a que $(-x)^2 = x^2$ y $(-y)^2 = y^2$. Esto significa que la gráfica de la elipse es simétrica respecto al eje y y al eje x.

Interceptos con los ejes

Si hacemos $x = 0$ en la ecuación de la elipse, obtenemos que

$$y^2 = b^2.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $y = b$ y $y = -b$. Es decir, la gráfica de la elipse intercepta el eje y en los puntos $A_1 = (0, b)$ y $A_2 = (0, -b)$. Estos dos puntos son los extremos del eje menor de la elipse y por lo tanto la longitud del eje menor de la elipse es $2b$.

Si hacemos $y = 0$ en la ecuación de la elipse, se obtiene que

$$x^2 = a^2.$$

Dicha ecuación tiene dos souciones: $x = a$ y $x = -a$. De esta manera concluimos que la gráfica de la elipse intercepta al eje x en los puntos $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$. Estos dos puntos son los vértices de la elipse y entonces tenemos que la longitud del eje mayor de la elipse es igual a $2a$.

Ejes de la elipse

El eje focal , pasa por los puntos F_1 y F_2 y por lo tanto coincide con ele eje x.
El eje normal pasa por el punto $C = (0, 0)$ y es perpendicular al eje focal, lo cual quiere decir que es el eje y.

La figura 76.2 muestra la gráfica de la elipse para este caso.

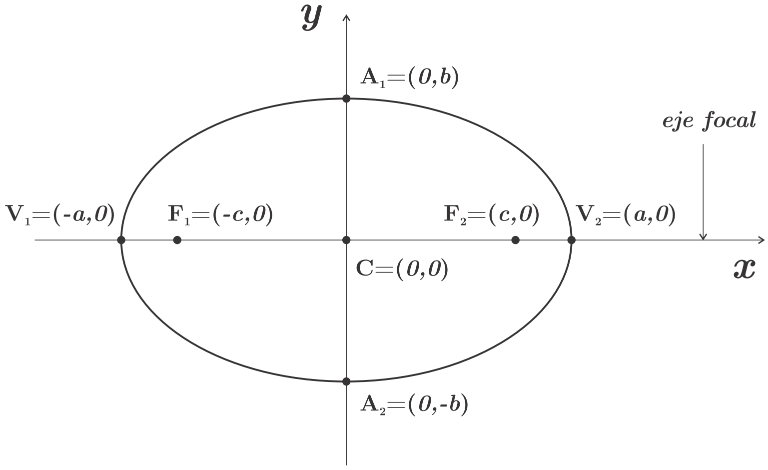


Figura 76.2

Ejemplo 76.1

Halle los elementos y trace la gráfica de la elipse

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Solución Notemos que la elipse es una elipse horizontal con $a^2 = 36$, o equivalentemente $a = 6$, y $b^2 = 9$, o equivalentemente $b = 3$. A partir de la relación $a^2 - c^2 = b^2$, se concluye que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$.
De la información anterior obtenemos los siguientes elementos de la elipse:

- Los vértices son los puntos $V_1 = (-6, 0)$ y $V_2 = (6, 0)$.
- El centro es el punto $C = (0, 0)$.
- Los focos son los puntos $F_1 = (-\sqrt{27}, 0)$ y $F_2 = (\sqrt{27}, 0)$.
- Los extremos del eje menor son los puntos $A_1 = (0, 3)$ y $A_2 = (0, -3)$.
- El eje focal es el eje x y el eje normal es el eje y.

La gráfica de la elipse se presenta a continuación en la figura 76.3

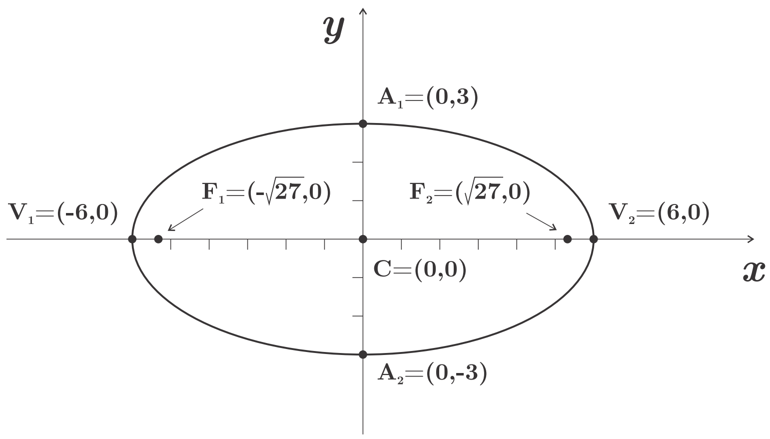


Figura 76.3

Ejercicios

1. Encuentre los focos y los vértices de la elipse con ecuación $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$.
2. Encuentre la ecuación de la elipse centrada en el origen, para la cual uno de los extremos de su eje normal es el punto $(0, 5)$ y uno de sus focos es el punto $(-5, 0)$.
3. Halle los elementos y trace la gráfica de la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$.
4. Grafique la elipse con ecuación $\frac{x^2}{81} + y^2 = 1$.
5. Un foco de una elipse es el punto $(3, 0)$, uno de sus vértices es el punto $(5, 0)$ y su centro es $(0, 0)$. Encuentre la ecuación de dicha elipse.

Lección 77

La elipse III

Elipse con focos en $(0, c)$ y $(0, -c)$.

En la lección anterior consideramos una elipse cuyos focos estaban ubicados sobre el eje x y su centro en el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

Ahora consideramos una elipse con focos ubicados sobre el eje y, $F_1 = (0, c)$ y $F_2 = (0, -c)$, con constante de la definición igual a $2a$. Podemos realizar un razonamiento similar al presentado anteriormente y deducir que la ecuación para dicha elipse es

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = a^2 - c^2 > 0$.
En este caso diremos que la elipse es vertical y se puede ver, como en el caso anterior, que la gráfica tiene las siguientes características:

- Es simétrica respecto a el eje x y al eje y.
- Los interceptos con el eje y son los puntos $V_1 = (0, a)$ y $V_2 = (0, -a)$, los cuales son los vértices de la elipse.
- Los interceptos con el eje x son los puntos $A_1 = (-b, 0)$ y $A_2 = (b, 0)$. Estos son los extremos del eje menor.
- El eje focal de la elipse es el eje y.
- El eje normal de la elipse es el eje x.

En este caso tenemos una **elipse vertical** y su gráfica es presentada en la siguiente figura 77.1.

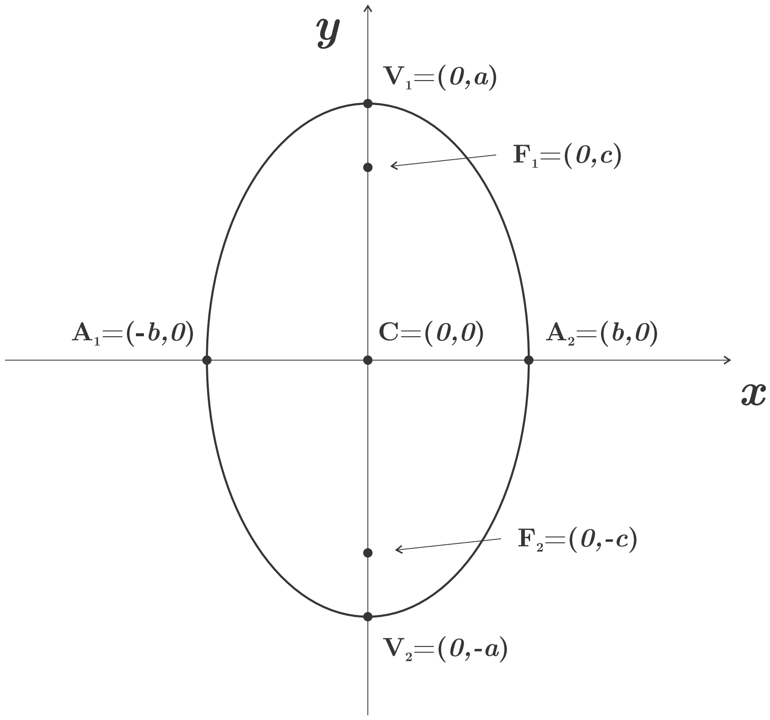


Figura 77.1

Ejemplo 77.1

Halle los elementos y trace la gráfica de la elipse

$$16x^2 + 9y^2 - 144 = 0.$$

Solución

Reescribimos la ecuación anterior en una forma adecuada:

$$\begin{aligned} 16x^2 + 9y^2 - 144 &= 0 \\ 16x^2 + 9y^2 &= 144 \\ \frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} &= 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} &= 1 \\ \frac{x^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(4)^2} &= 1. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación tenemos que $a = 3$, $b = 4$ y $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{7}$. Tenemos una elipse vertical con los siguientes elementos:

- Los vértices son los puntos $V_1 = (0, -4)$ y $V_2 = (0, 4)$.
- El centro es el punto $C = (0, 0)$.

- Los focos son los puntos $F_1 = (0, -\sqrt{7})$ y $F_2 = (0, \sqrt{7})$.
- Los extremos del eje menor son los puntos $A_1 = (3, 0)$ y $A_2 = (-3, 0)$.
- El eje focal es el eje y y el eje normal es el eje x.

La figura 77.2 nos presenta la gráfica de la elipse de este ejemplo.

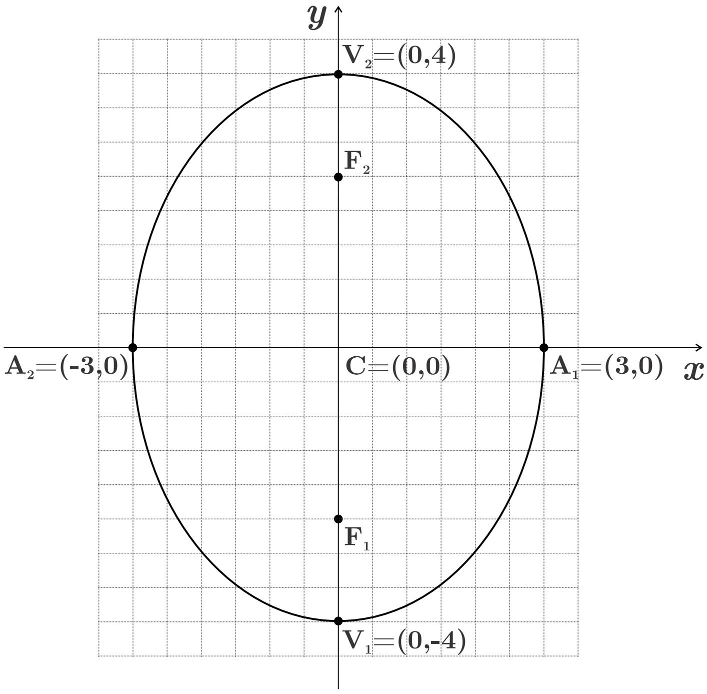


Figura 77.2

Ejemplo 77.2

Encuentre la ecuación de la elipse con vértices en $V_1 = (0, 5)$ y $V_2 = (0, -5)$, y focos en los puntos $F_1 = (0, 4)$ y $F_2 = (0, -4)$.

Solución

Observamos que en este caso la elipse es vertical, pues sus focos se encuentran ubicados sobre el eje y y la ecuación para la elipse tiene la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

A partir de la información sobre los focos tenemos que $a = 5$, $c = 4$ y por lo tanto $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$ y concluimos que la ecuación de la elipse es

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1.$$

Ejercicios

1. Encuentre los principales elementos y trace la gráfica de las siguientes elipses:

   (a) $\dfrac{y^2}{49} + \dfrac{x^2}{25} = 1.$

   (b) $\dfrac{y^2}{64} + \dfrac{x^2}{36} = 1.$

2. Encuentre la ecuación de una elipse cuyos focos son los puntos $(0, -4)$ y $(0, 4)$, y uno de sus vértices es el punto $(0, -6)$.

3. Encuentre la ecuación de la elipse con centro en $(0, 0)$, tal que uno de sus vértices es el punto $(0, -5)$ y uno de sus focos es el punto $(0, -4)$.

4. Una elipse tiene centro en $(0, 0)$, su eje focal es el eje y, su eje mayor mide 4 unidades y la distancia entre sus focos es 2 unidades. Encuentre la ecuación de dicha elipse y trace su gráfica.

5. Muestre que la ecuación
$$25y^2 + 144x^2 - 225 = 0,$$
   representa una elipse. Halle sus focos, sus vértices, los extremos del eje menor y trace su gráfica.

Lección 78

La elipse IV

Estudiaremos en esta lección elipses cuyo centro no está ubicado en el punto $(0, 0)$ del sistema de coordenadas xy. En este caso será necesario realizar una traslación de ejes con el fin de graficar de manera adecuada la elipse. El procedimiento que se llevará a cabo es similar al realizado para la parábola.

Elipse con centro en el punto (h, k)

Supongamos que una elipse horizontal tiene centro en un punto (h, k) diferente al $(0, 0)$. Si en ese punto ubicamos un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$ entonces la elipse tiene por ecuación, en el sistema $x'y'$,

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Notemos que como los sistemas de coordenadas xy y $x'y'$ están relacionados mediante las ecuaciones

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k, \tag{78.1}$$

entonces la ecuación de la elipse en el sistema de coordenadas xy tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

En forma similar podemos probar, que si una elipse vertical tiene centro en el punto (h, k) entonces su ecuación tiene la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Ejemplo 78.1

Una elipse tiene focos en los puntos $(2, 2)$ y $(10, 2)$. Suponga que uno de los vértices de la elipse se encuentra en el punto $(0, 2)$. Halle la ecuación de la elipse, el otro vértice y trace su gráfica.

Solución

Como los focos están ubicados en $(2, 2)$ y $(10, 2)$ entonces el eje focal de la elipse es la recta $y = 2$ y tenemos una elipse horizontal.

Observe que la distancia entre los focos es 8 unidades y por lo tanto $2c = 8$, es decir $c = 4$ y el centro de la elipse se ubica a 4 unidades de cada foco y por lo tanto el centro de la elipse debe ser el punto $(6, 2)$, es decir que $(h, k) = (6, 2)$. Al ubicar en este punto el origen del sistema de coordenadas $x'y'$, obtenemos las ecuaciones que relacionan los dos sistemas de coordenadas, estas son

$$x' = x - 6 \text{ y } y' = y - 2.$$

Con este par de ecuaciones podemos obtener las coordenadas de los focos y el vértice dado en el sistema de coordenadas $x'y'$:
Focos $(2 - 6, 2 - 2) = (-4, 0)$ y $(10 - 6, 2 - 2) = (4, 0)$.
Vértices $(0 - 6, 2 - 2) = (-6, 0)$.

Luego el otro vértice se encuentra en el punto $(6, 0)$ en el sistema de coordenadas $x'y'$, y en el sistema de coordenadas xy en el punto $(6 + 6, 0 + 2) = (12, 2)$.
En la figura 78.1 se muestra la ubicación del sistema de coordenadas $x'y'$, los focos y los vértices.

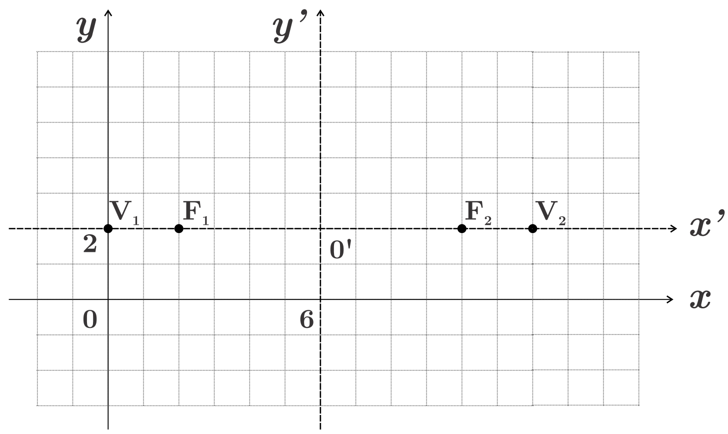


Figura 78.1

Según las coordenadas de los focos y los vértices en el sistema $x'y'$ podemos concluir que $c = 4$ y $a = 6$. Por lo tanto

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20},$$

y entonces la ecuación de la elipse, en el sistema de coordenadas $x'y'$, es

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{20} = 1,$$

y en el sistema de coordenadas xy, es

$$\frac{(x - 6)^2}{36} + \frac{(y - 2)^2}{20} = 1.$$

Los principales elementos de la elipse en el sistema de coordenadas $x'y'$, son los siguientes:

- Centro $C = (0,0)$.
- Focos $F_1 = (-4,0)$ y $F_2 = (4,0)$.
- Vértices $V_1 = (-6,0)$ y $V_2 = (6,0)$.
- Extremos del eje menor $A_1 = (0, \sqrt{20})$ y $A_2 = (0, -\sqrt{20})$.

  A continuación, en la figura Figurajimenez13, se muestra la gráfica de la elipse.

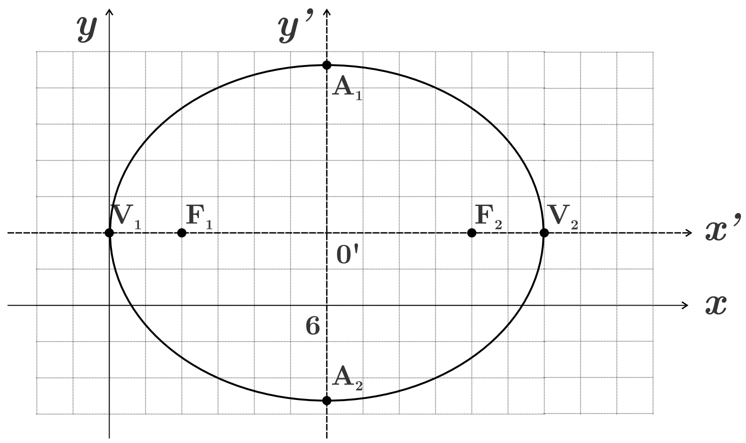


Figura 78.2

Ejercicios

1. Encuentre los principales elementos de la elipse del ejemplo en el sistema de coordenadas xy.
   Sugerencia: Utilize las ecuaciones (78.1).
2. Encuentre la ecuación de la elipse con centro en $(3,2)$, un foco en $(3,4)$ y un vértice en $(3,5)$.
3. Trace la gráfica de la elipse cuya ecuación está dada por
$$\frac{(x-2)^2}{9} + y^2 = 9.$$
4. Complete los cuadrados para demostrar que la ecuación
$$x^2 + 2x + 4y^2 - 16y - 47 = 0,$$
   representa a una elipse, encuentre los principales elementos en el sistema de coordenadas xy y trace la gráfica.
5. Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(4,-2)$ y $(4,10)$ y que tiene uno de los extremos de su eje normal en $(12,4)$.
6. Trace la gráfica de la elipse $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{(y+3)^2}{49} = 1$. Encuentre sus principales elementos en el sistema de coordenadas $x'y'$.

Lección 79

Hipérbolas I

Definición

Llamamos **hipérbola** al conjunto de puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos dados, llamados focos, tomada en valor absoluto, es una constante positiva.

Ecuación de la hipérbola

Consideremos una hipérbola cuyos focos sean los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, donde c es un número real positivo, y supongamos que el punto $P = (x, y)$ es un punto de la hipérbola (ver figura 79.1).

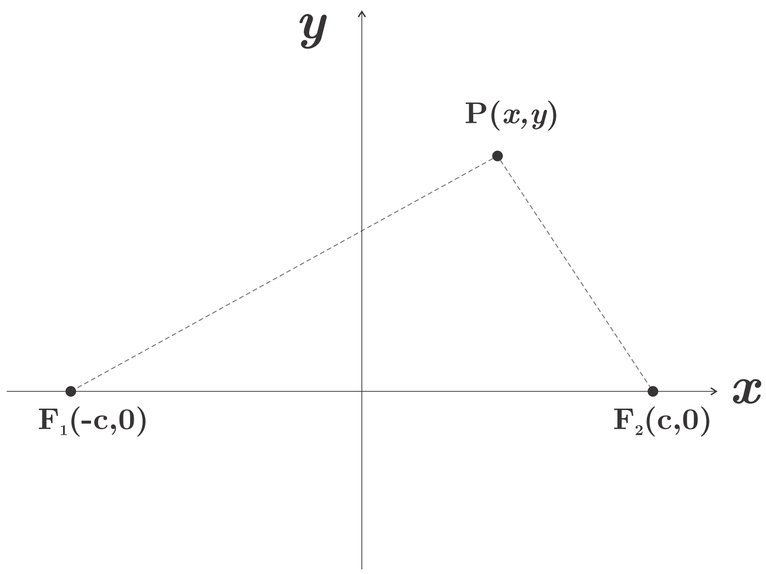


Figura 79.1

Llamemos $2a$, con $a > 0$, al valor absoluto de la diferencia entre la distancia de P a F_1 y la distancia de P a F_2. Esta diferencia puede ser positiva o negativa, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
d(P,F_1) - d(P,F_2) &= \pm 2a,\\
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= \pm 2a,\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a,\\
\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2 &= \left[\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a\right]^2,\\
(x+c)^2+y^2 &= (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2,\\
x^2+2xc+c^2 &= x^2-2xc+c^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2,\\
4xc-4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
xc-a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
(xc-a^2)^2 &= \left[\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2,\\
x^2c^2-2xca^2+a^4 &= a^2[(x-c)^2+y^2],\\
x^2c^2-2xca^2+a^4 &= a^2(x^2-2xc+c^2+y^2),\\
x^2c^2-2xca^2+a^4 &= a^2x^2-2xca^2+a^2c^2+a^2y^2,\\
x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2).
\end{aligned}
$$

Ahora, como la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado, entonces

$$
\begin{aligned}
d(P,F_1) + d(F_1,F_2) &> d(P,F_2),\\
d(F_1,F_2) &> d(P,F_2) - d(P,F_1).
\end{aligned}
$$

Igualmente,

$$
d(F_1,F_2) > d(P,F_1) - d(P,F_2),
$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
d(F_1,F_2) &> |d(P,F_1) - d(P,F_2)|,\\
2c &> 2a.
\end{aligned}
$$

Y si elevamos al cuadrado obtenemos $c^2 > a^2$, lo cual es equivalente a $c^2 - a^2 > 0$. De esta forma, definiendo $b^2 = c^2 - a^2$, con $b > 0$, y reemplazando en la expresión obtenida anteriormente, se sigue que

$$
x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.
$$

Luego, si dividimos esta última expresión por a^2b^2, obtenemos

$$
\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}
$$

que es la ecuación de la hipérbola con focos $F_1 = (-c,0)$ y $F_2 = (c,0)$.

Ejemplo 79.1

Halle la ecuación de la hipérbola con focos en los puntos $(-8,0)$ y $(8,0)$ y que pasa por el punto $(2,0)$.

Solución

Como los focos de la hipérbola se encuentran en los puntos $(-8,0)$ y $(8,0)$ entonces identificamos $c=8$. Ahora, como el punto $(2,0)$ pertenece a la gráfica de la hipérbola y la ecuación de este tipo de hipérbolas es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

entonces se debe cumplir que

$$\frac{2^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1.$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{4}{a^2}&=1,\\ a^2&=4.\end{aligned}$$

Y, como $a>0$, entonces $a=2$.

Finalmente,

$$b^2=c^2-a^2=8^2-2^2=60.$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{60}=1.$$

Ejercicios

1. Halle los focos de la hipérbola cuya ecuación es:

   (a) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1.$

   (b) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1.$

   (c) $11x^2-5y^2=55.$

   (d) $3x^2-7y^2-21=0.$

2. Halle la ecuación de la hipérbola que cumple las condiciones dadas.

   (a) Focos: $(-5,0)$ y $(5,0)$. Pasa por el punto $(3,0)$.

   (b) Focos: $(-10,0)$ y $(10,0)$. Pasa por el punto $(-4,0)$.

   (c) Focos: $(-\sqrt{7},0)$ y $(\sqrt{7},0)$. Pasa por el punto $(4,\sqrt{52/3})$.

Lección 80

Hipérbolas II

Gráfica de la hipérbola con Focos (-c,0) y (c,0)

Simetría

Observemos que si en la ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
reemplazamos x por $-x$ o y por $-y$, la ecuación no cambia. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al eje y y con respecto al eje x y entonces al punto $(0, 0)$ se le denomina centro de la hipérbola.

Intersección con los ejes

Si $x = 0$, obtenemos en la ecuación de la hipérbola
$$y^2 = -b^2.$$
Como $b \neq 0$, entonces no existe un valor real de y que satisfaga la anterior igualdad. Esto significa que la gráfica de la hipérbola con ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
no intercepta el eje y.

Si $y = 0$, obtenemos en la ecuación de la hipérbola
$$x^2 = a^2.$$
Esta ecuación tiene dos soluciones: $x = -a$ y $x = a$, lo cual quiere decir que la gráfica de la hipérbola con ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
intercepta el eje x en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. A este par de puntos se les conoce como vértices de la hipérbola (ver figura 80.1).

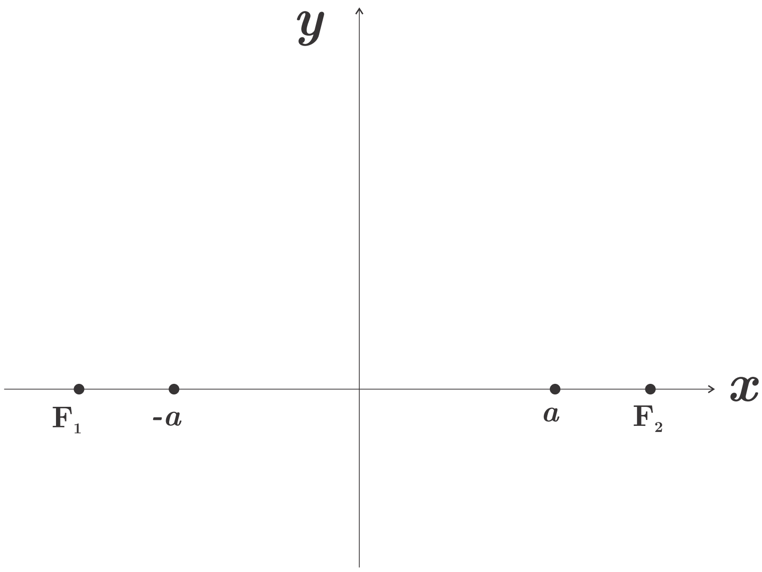


Figura 80.1

Asíntotas

Despejemos y de la ecuación de la hipérbola:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2} - 1 &= \frac{y^2}{b^2}, \\ b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) &= y^2, \end{aligned}$$

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Ahora analicemos el comportamiento de la gráfica muy a la derecha o muy a la izquierda en el eje x, esto es, cuando x^2 es muy grande. En este caso, el valor de $\frac{a^2}{x^2}$ se vuelve muy pequeño, el valor de la raíz cuadrada en la expresión anterior se aproxima mucho a 1 (decimos que tiende a 1) y la gráfica de la hipérbola se aproxima mucho a la gráfica de las rectas con ecuaciones

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x,}$$

que son las ecuaciones de dos rectas que pasan por el origen y tienen pendientes $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$, respectivamente. A este par de rectas se les conoce como **asíntotas de la hipérbola** y, tal como se dedujo, son dos rectas a las cuales se aproxima mucho la gráfica de la hipérbola muy a la izquierda y muy a la derecha en el eje x. La situación se ilustra en la figura 80.2.

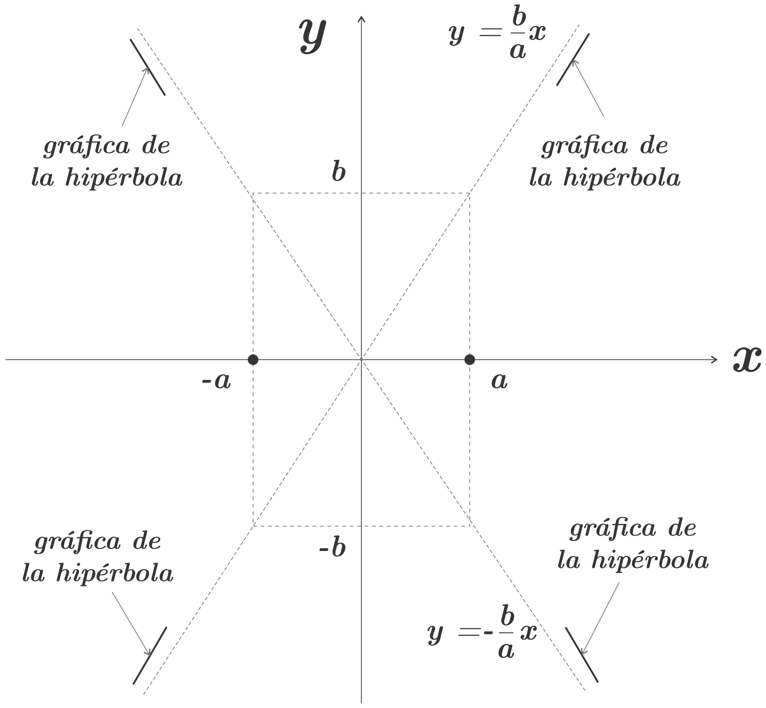


Figura 80.2

Ramas de la hipérbola

Si despejamos x^2 de la ecuación de la hipérbola obtenemos

$$x^2 = a^2\left[1 + \frac{y^2}{b^2}\right],$$

y como $\dfrac{y^2}{b^2} \geq 0$ entonces $1 + \dfrac{y^2}{b^2} \geq 1$, con lo cual

$$\begin{aligned} x^2 &\geq a^2, \\ x^2 - a^2 &\geq 0, \\ (x-a)(x+a) &\geq 0, \end{aligned}$$

que equivale a $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. Esto nos indica que no hay puntos (x, y) en la gráfica de la hipérbola para los cuales $x \in (-a, a)$. En otras palabras, la gráfica de la hipérbola está dividida en dos partes: aquella que corresponde a los puntos (x, y) con $x \leq -a$ y aquella que corresponde a los puntos (x, y) con $x \geq a$. A cada una de estas partes se le llama rama de la hipérbola.

Empleando toda la información analizada procedemos, en la figura 80.3, a realizar la gráfica de la hipérbola con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$.

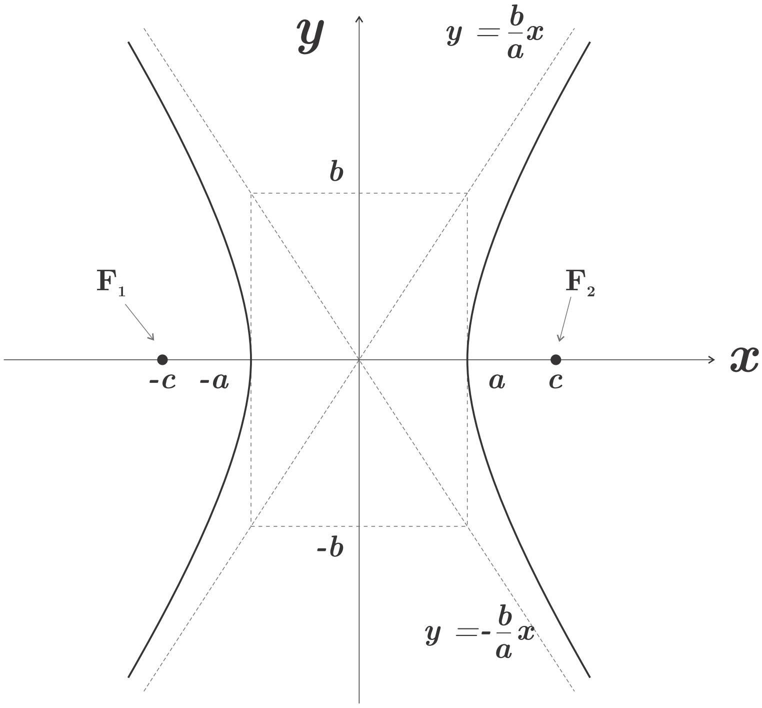


Figura 80.3

Por la forma de la gráfica, al eje x se le denomina eje transversal de la hipérbola y decimos que la hipérbola es horizontal.

Lección 81

Hipérbolas III

Ejemplo 81.1

Halle los vértices, focos, asíntotas y trace la gráfica de la hipérbola horizontal cuya ecuación viene dada por

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Solución

Vértices: Observamos que $a = 2$, por lo tanto los vértices son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Focos: Como $b = 3$ entonces $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3.6$. Así que los focos son $(-\sqrt{13}, 0)$ y $(\sqrt{13}, 0)$.

Asíntotas: Las asíntotas son $y = \pm\dfrac{3}{2}x$.

Gráfica: Con toda la información procedemos, en la figura figura 81.1, a realizar la gráfica de la hipérbola.

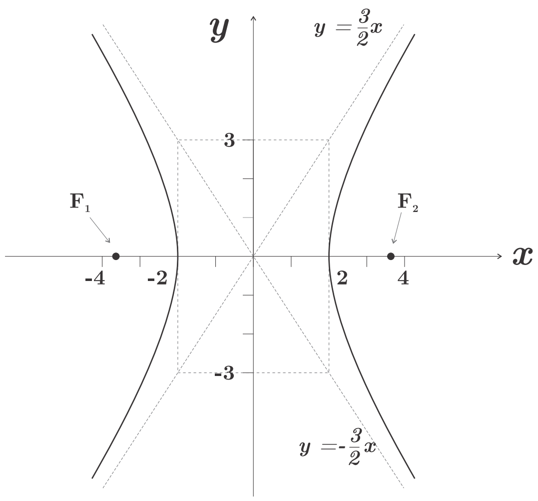


Figura 81.1

Gráfica de la hipérbola con focos (0,-c) y (0,c)

Mediante un análisis similar al realizado en las dos clases anteriores podemos ver que los elementos de la hipérbola con focos $(0,-c)$ y $(0,c)$ son:

Ecuación: $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$, con $c^2=a^2+b^2$.

Simetría: Con respecto al eje x y con respecto al eje y.

Interceptos con el eje x: No tiene.

Interceptos con el eje y: Vértices: $(0,-a)$ y $(0,a)$.

Asíntotas: $y=\pm\dfrac{a}{b}x$.

Ramas: $y\leq -a$ y $y\geq a$.

Eje transversal: Eje y.

Gráfica: Según la información, la gráfica se muestra en la figura 81.2.

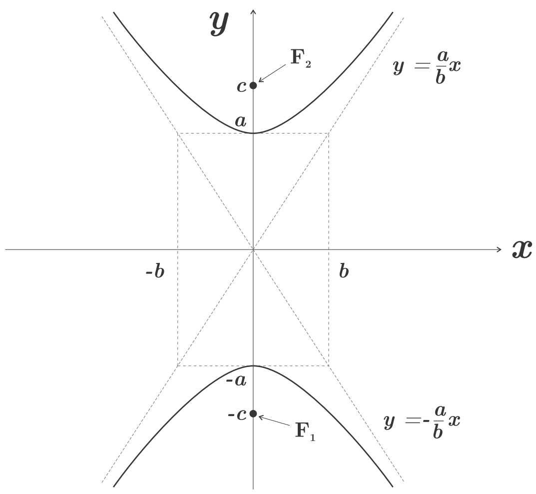


Figura 81.2

Por la forma de la gráfica, decimos que la hipérbola es vertical.

Ejemplo 81.2

Halle los vértices, focos, asíntotas y trace la gráfica de la hipérbola

$$16y^2-9x^2-144=0.$$

Solución

Reescribimos la ecuación de la hipérbola de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 16y^2 - 9x^2 &= 144, \\ \frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} &= 1, \\ \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Por la forma de la ecuación se trata de una hipérbola vertical.

Vértices: Observamos que $a = 3$, por lo tanto los vértices son $(0, -3)$ y $(0, 3)$.

Focos: Como $b = 4$ entonces $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Así que los focos son $(0, -5)$ y $(0, 5)$.

Asíntotas: Las asíntotas son $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Gráfica: Con la información obtenida la gráfica se presenta en la figura 81.3.

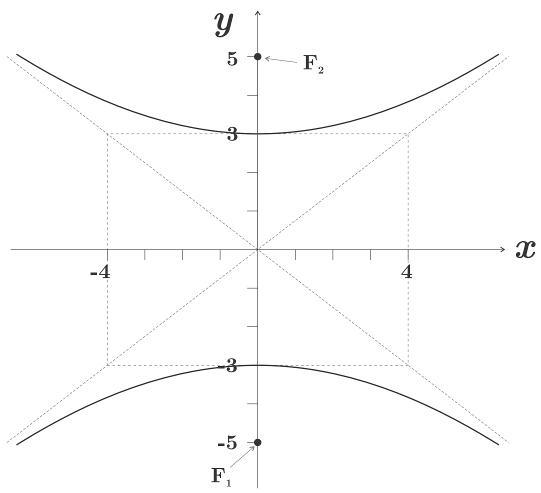


Figura 81.3

Ejercicios

1. Con los datos dados determine la ecuación de la hipérbola, la ecuación de las asíntotas y trace su gráfica.

   (a) Focos: $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Vértices: $(-4, 0)$ y $(4, 0)$.

   (b) Focos: $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. Vértices: $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

   (c) Focos $(0, -10)$ y $(0, 10)$. Vértices: $(0, -8)$ y $(0, 8)$.

2. Halle los vértices, focos, asíntotas y trace la gráfica de la hipérbola cuya ecuación viene dada por

   (a) $5x^2 - 8y^2 = 40$.

   (b) $7y^2 - 9x^2 = 63$.

3. Halle la ecuación de la hipérbola horizontal que tiene uno de los vértices en el punto $(2, 0)$ sabiendo que una de sus asíntotas tiene ecuación $3x - 4y = 0$. Además halle los elementos restantes y trace su gráfica.

4. Halle la ecuación de la hipérbola vertical que tiene uno de los focos en el punto $(0, -5)$ sabiendo que una de sus asíntotas tiene ecuación $2x - 3y = 0$. Además halle los elementos restantes y trace su gráfica.

Lección 82

Hipérbolas IV

Hipérbola con centro en el punto (h,k)

Supongamos que una hipérbola horizontal tiene centro en un punto (h, k) diferente al $(0, 0)$. Si en ese punto ubicamos un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$ entonces la hipérbola tiene por ecuación, en el sistema $x'y'$,

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Ahora, como los sistemas de coordenadas $x'y'$ y xy están relacionados mediante las ecuaciones

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k,$$

entonces la ecuación de la hipérbola en el sistema de coordenadas xy tiene la forma

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.}$$

En forma similar, si la hipérbola es vertical y tiene centro en el punto (h, k) entonces su ecuación tiene la forma

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.}$$

Ejemplo 82.1

Una hipérbola tiene focos en los puntos $(0, 1)$ y $(10, 1)$. Si uno de sus vértices es el punto $(2, 1)$ halle la ecuación de la hipérbola, el otro vértice, la ecuación de las asíntotas y trace su gráfica.

Solución

Como los focos están ubicados en $(0, 1)$ y $(10, 1)$ entonces el eje transversal de la hipérbola es la recta $y = 1$ y se trata de una hipérbola horizontal.

Observamos además que la distancia entre los focos es 10 unidades, así que el centro de la hipérbola se encuentra a 5 unidades de cada foco, en el punto $(5,1)$, es decir $(h,k)=(5,1)$. En este punto ubicamos el origen de coordenadas $x'y'$ y entonces la relación entre los dos sistemas está dada por las ecuaciones

$$x' = x - 5 \quad \text{y} \quad y' = y - 1.$$

Con este par de ecuaciones podemos obtener los focos y el vértice dado, en el sistema de coordenadas $x'y'$:

Focos: $(0-5, 1-1) = (-5,0)$ y $(10-5, 1-1) = (5,0)$.
Vértice: $(2-5, 1-1) = (-3,0)$.

Luego el otro vértice se encuentra en el punto $(3,0)$ en el sistema de coordenadas $x'y'$, y en el sistema de coordenadas xy en el punto $(3+5, 0+1) = (8,1)$.

En la figura 82.1 se muestra la ubicación del sistema de coordenadas $x'y'$, los focos y los vértices.

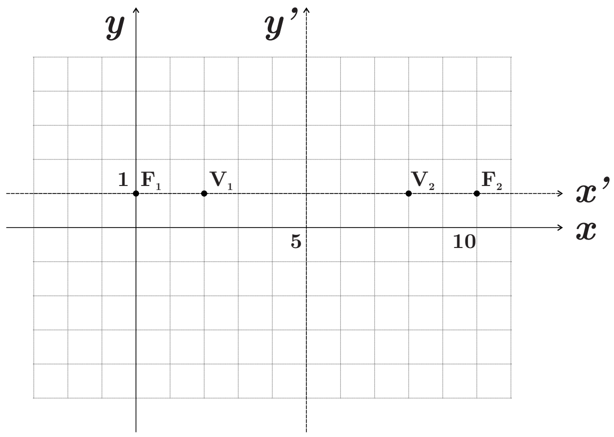


Figura 82.1

Según las coordenadas de los focos y los vértices en el sistema $x'y'$ podemos concluir que $c=5$ y $a=3$. Por lo tanto

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

y entonces la ecuación de la hipérbola, en el sistema de coordenadas $x'y'$, es

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{16} = 1,$$

y en el sistema de coordenadas xy, es

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

Además, las ecuaciones de las asíntotas, en el sistema de coordenadas $x'y'$, son

$$y' = \pm\frac{b}{a}x',$$
$$y' = \pm\frac{4}{3}x',$$

y en el sistema de coordenadas xy, son

$$y - 1 = \frac{4}{3}(x-5), \qquad \text{y} \qquad y - 1 = -\frac{4}{3}(x-5),$$
$$y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} + 1, \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + 1,$$
$$y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}, \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3}.$$

A continuación, en la figura 82.2, se muestra la gráfica de la hipérbola.

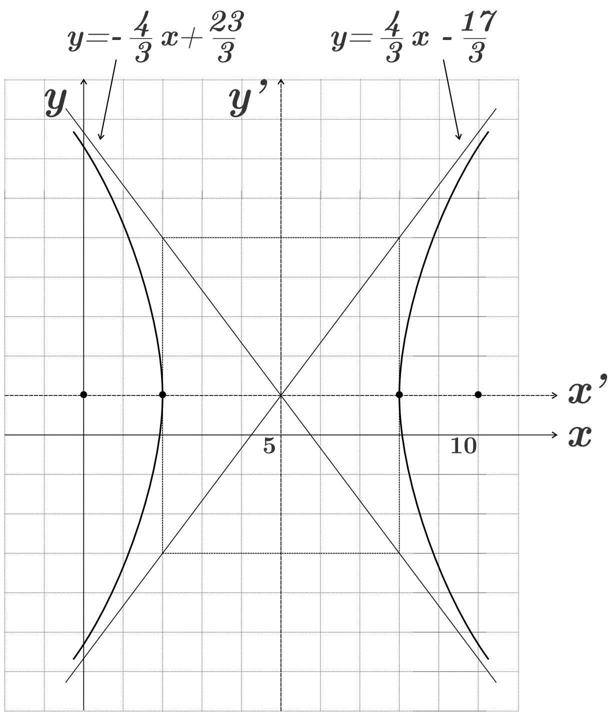


Figura 82.2

Ejercicios

1. Con los datos dados determine la ecuación de la hipérbola, la ecuación de las asíntotas y trace su gráfica.

   (a) Focos: $(-1,-6)$ y $(9,-6)$. Vértices: $(1,-6)$ y $(7,-6)$.

   (b) Focos: $(-3,-12)$ y $(-3,-6)$. Vértices: $(-3,-11)$ y $(-3,-7)$.

2. Halle los vértices, focos, asíntotas y trace la gráfica de la hipérbola cuya ecuación viene dada por

   (a) $25x^2 - 36y^2 - 150x - 144y - 819 = 0$.

   (b) $144x^2 - 196y^2 + 1152x + 392y + 2549 = 0$.

3. Halle la ecuación de la hipérbola con focos en los puntos $(-13, -7)$ y $(1, -7)$ y que pasa por el punto $(2, -2)$.

Lección 83

Ecuación general de segundo grado y discriminante.

En las lecciones anteriores hemos estudiado las secciones cónicas con sus ejes paralelos a alguno de los ejes coordenados x y y.

En esta lección estudiaremos las secciones cónicas desde el punto de vista de la **ecuación general de segundo grado**, que es una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde $A \neq 0$, o $B \neq 0$ o $C \neq 0$.

Notemos que las ecuaciones de las cónicas estudiadas hasta el momento se pueden escribir en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde $A \neq 0$, o $C \neq 0$, la cual carece del término en xy. Además se puede probar que esta última ecuación representa una cónica con eje focal paralelo a (conicidente con) alguno de los ejes coordenados x, y, o una cónica degenerada (una recta, o un par de rectas, o un punto, o ningún lugar geométrico (conjunto vacío))

Así, por ejemplo, la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, se obtiene de la ecuación anterior haciendo $A = C = 1$, $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

Análogamente, la parábola de ecuación $(y-k) = \frac{1}{4p}(x-h)^2$, se obtiene de la ecuación anterior haciendo $A = 1$, $BC = 0$, $D = -2h$, $E = -4p$ y $F = h^2 + 4pk$.

Notemos que la línea recta aparece como un caso especial de la ecuación anterior haciendo $A = C = 0$.

El siguiente teorema nos permite decidir sobre la naturaleza de la curva determinada por la ecuación anterior, analizando únicamente sus coeficientes.

Teorema.

La ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde A, C, D, E, F son constantes reales y $A \neq 0$, o $C \neq 0$, representa:

1. **Circunferencia,** si $A = C \neq 0$. (En casos especiales puede reducirse a un punto, en el caso de circunferencias degeneradas o carecer de puntos reales).

2. **Parábola,** si $A \neq 0$ y $C = 0$ o $A = 0$ y $C \neq 0$, es decir, si $A \times C = 0$ (En casos espaciales puede reducirse a un par de rectas paralelas o a una recta, en el caso de parábolas degeneradas.)

3. **Elipse,** si A y C tienen el mismo signo, es decir $A \times C > 0$. (En casos especiales puede reducirse a un punto, en el caso de elipses degeneradas o carecer de puntos reales).

4. **Hipérbola,** si A y C tienen signos opuestos, es decir $A \times C < 0$. (En casos especiales puede reducirse a un par de rectas secantes, en el caso de hipérbolas degeneradas.)

Observación.

Si la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una cónica no degenerada, entonces D y E indican que el centro de la cónica (cuando lo hay) está fuera del origen de coordenadas, si $D = 0$ el centro está sobre el eje y y si $E = 0$ el centro está sobre el eje x. Si $F \neq 0$, entonces la cónica no pasa por el origen y si $F = 0$ si pasa.

Ejemplo 83.1

Determinemos que tipo de cónica podria representar cada ecuación.

1. $4x^2 + 25y^2 - 14x + 16y - 255 = 0$

2. $4x^2 + 4y^2 - 14x + 16y - 255 = 0$

3. $4x^2 - 4y^2 - 14x + 16y - 255 = 0$

4. $8y^2 - 14x + 16y - 255 = 0$

Solución.

1. Como $A = 4$ y $C = 9$ tiene el mismo signo la cónica es una elipse, con sus ejes paralelos a los ejes coordenados x, y y con su centro distinto del origen de coordenadas xy (pues $D = -14$ y $E = 16$) y no pasa por el origen (pues $F = -255 \neq 0$.)

2. Como $A = 4$ y $C = 4$ la cónica es una circunferencia, con sus ejes paralelos a los ejes coordenados x, y y con su centro distinto del origen de coordenadas xy (pues $D = -14$ y $E = 16$) y no pasa por el origen (pues $F = -255 \neq 0$.)

3. Como $A = 4$ y $C = -4$ tiene signos opuestos la cónica es una hipérbola, con sus ejes paralelos a los ejes coordenados x, y y con su centro distinto del origen de coordenadas xy (pues $D = -14$ y $E = 16$) y no pasa por el origen (pues $F = -255 \neq 0$.)

4. Como $A = 0$ y $C = 8$ la cónica es una parábola, con eje focal paralelo al eje x y con vértice distinto del origen de coordenadas x, y (pues $D = -14$ y $E = 16$) y no pasa por el origen (pues $F = -255 \neq 0$.)

Notemos que del teorema anterior la naturaleza de la sección cónica queda determinada por las constante A y C. En general el tipo de curva depende de una cantidad que definimos a continuación.

Llamamos **discriminante** de la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, al número $B^2 - 4AC$. En el caso $B = 0$, éste se reduce a $-4AC$. Así, el teorema anterior lo podemos reescribir como:

Teorema.

La ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde A, C, D, E, F son constantes reales y $A \neq 0$, o $C \neq 0$, representa:

1. **Circunferencia,** si $A = C$ y $-4AC < 0$.
2. **Parábola,** si $-4AC = 0$.
3. **Elipse,** si $-4AC < 0$.
4. **Hipérbola,** si $-4AC > 0$.

o sus respectivas deformaciones de acuerdo con lo analizado anteriormente.

Ejemplo 83.2

Determinemos que tipo de cónica representa cada ecuación.

1. $y^2 - 12x - 4y - 56 = 0$
2. $16x^2 + 9y^2 - 64x + 18y - 71 = 0$

Solución.

1. La gráfica de $y^2 - 12x - 4y - 56 = 0$ debe ser una parábola, pues en este caso $A = 0$ y $C = 1$, entonces $-4AC = -(0)(1) = 0$. Notemos que completando cuadrado en y, reordenando y factorizando tendremos:

$$x + 5 = \frac{1}{12}(y - 2)^2.$$

2. La gráfica de $16x^2 + 9y^2 - 64x + 18y - 71 = 0$ debe ser una elipse, pues en este caso $A = 16$ y $C = 9$, entonces $-4AC = -(16)(9) = -144 < 0$. Notemos que completando cuadrado en y, reordenando y factorizando tendremos:

$$\frac{(y + 1)^2}{4^2} + \frac{(x - 2)^2}{3^2} = 1.$$

Observación.

El caso $B \neq 0$ en la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, aunque no lo vamos a tratar en esta lección, representa una cónica o su degeneración con ejes focales rotados, es decir, son rectas oblicuas con respecto a los ejes x, y.

Ejercicios.

1. En cada caso determinar el tipo de cónica que representa cada ecuación.
   (a) $4x^2 + 16y^2 - 25 = 0$
   (b) $y^2 - 9x = 0$
   (c) $16x^2 - 9y^2 + 96x - 72y - 144 = 0$
   (d) $4x^2 + y^2 - 36 = 0$
   (e) $3x^2 + 4y^2 + 66x - 24y + 36 = 0$
2. Considere la ecuación general de segundo grado,
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
   (a) Encuentre unos valores de A, C, D, E y F para los cuales la gráfica sea un par de rectas.
   (b) Encuentre unos valores de A, C, D, E y F para los cuales la gráfica sea una sola de recta.
   (c) Encuentre unos valores de A, C, D, E y F para los cuales la gráfica sea un punto.
   (d) Encuentre unos valores de A, C, D, E y F para los cuales la gráfica sea vacía.

Lección 84

Aplicaciones de las cónicas I

Desde la época en que Apolonio demostraba las propiedades de las curvas cónicas, descubrió que se destacaba la creación de espejos en forma de sección cónica aplicando las propiedades de reflexión, obteniendo así los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos.

Cuenta incluso una leyenda, que Arquímedes (287-212 A.C.) logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando las propiedades de los espejos parabólicos.

Aplicaciones de la elipse

El astrónomo alemán Johannes Kepler (1570-1630) descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses que tienen al sol como unos de sus focos; en el caso de la tierra la excentricidad es 0.017 y los demás planetas varían desde 0.004 de Neptuno a 0.250 de Plutón.

Más tarde el célebre matemático y físico inglés Isaac Newton (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica.

Aparte de lo anterior, la elipse tiene importantes aplicaciones en la medicina. Por ejemplo, en la desintegración de cálculos renales se utiliza un aparato denominado "litotriptor", el cual usa un reflector elíptico para que concentre las ondas de choque producidas por un generador de ondas, en el cálculo y lo destruya.

Finalmente, vale la pena mencionar que en arquitectura, se construyen techos elipsoidales (llamados comúnmente capilla de los secretos) donde se puede oír a una persona ubicada en un foco desde el otro foco, mientras que las personas ubicadas en el medio no podrán escuchar nada.

Ejemplo 84.1

El arco de un puente es semielíptico con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 metros de longitud y su parte más alta con respecto a la tierra está a 10 metros. Determine la altura del arco a 6 metros del centro de la base.

Solución

De acuerdo con la información suministrada podemos describir el puente por medio de la elipse ilustrada en la figura 84.1.

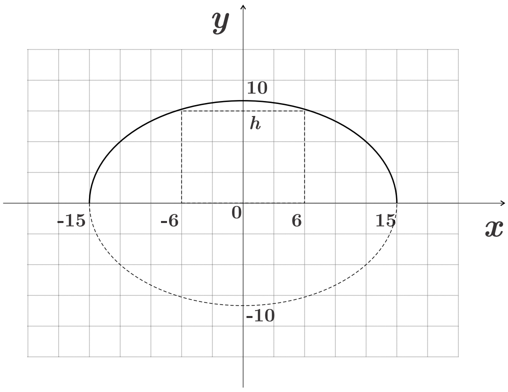


Figura 84.1

Basados en la figura 84.1 concluimos que la ecuación de la elipse que describe el puente es

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1.$$

Así que la altura (h) del arco del puente a 6 metros del centro de la base, puede ser encontrada por medio de la expresión

$$\frac{6^2}{15^2} + \frac{h^2}{10^2} = 1,$$

de donde

$$h^2 = 10^2 \left(1 - \frac{6^2}{15^2}\right) = 84,$$

es decir $h = 2\sqrt{21}m$.

Ejemplo 84.2

Un puente construido por encima de una autopista tiene forma semielíptica, como se muestra en la figura 84.2. La menor altura sobre la autopista es de 4 metros y la altura máxima es de 9 metros. El ancho del puente es de 50 metros. El conductor de un camión que debe pasar por un carril de la autopista situado a 10 metros de un extremo de ésta desea saber que altura total de la carga (altura de la carga más altura del camión) puede transportar, si desea dejar una luz de 0.5 metros entre la carga y el puente.

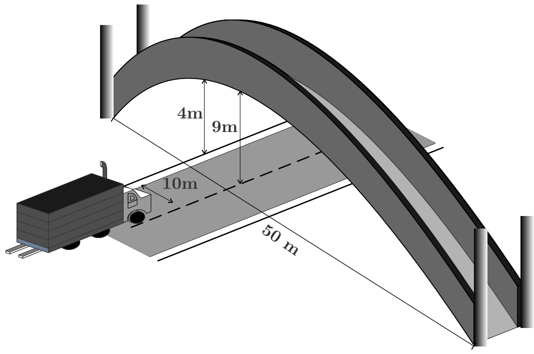


Figura 84.2

Solución

Podemos usar un plano cartesiano para ubicar la elipse que forma el puente. Por simplicidad podemos suponer que el centro de la elipse está en el origen y que el semieje mayor está sobre el eje X. Teniedo en cuenta la información suministrada, podemos obtener la gráfica de la figura 84.3.

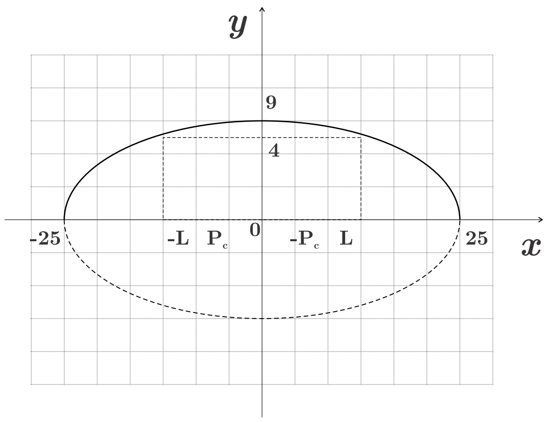


Figura 84.3

De la gráfica es posible deducir que la ecuación que describe la elipse es:

$$\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1.$$

Para poder responder la pregunta del problema, debemos hallar primero el ancho de la autopista para poder determinar en que punto sobre el eje X se encuentra el camión. Para esto tenemos en cuenta que los extremos de la autopista se encuentran ubicados en los puntos sobre el eje X donde la altura de la elipse es $4m$ (puntos L y $-L$ en la figura 84.3). Es decir

$$\frac{L^2}{25^2} + \frac{4^2}{9^2} = 1,$$

de donde

$$L^2 = 25^2 \left(1 - \frac{4^2}{9^2}\right) = 501.543m^2$$

ó $L = 22.40m$.

Como el camión está pasando a $10m$ de un extremo de la autopista podemos entonces suponer que está pasando por el punto sobre el eje X donde $Pc = 22.40 - 10 = 12.40m$ (note que debido a la simetría de la elipse, el resultado será igual si ubicamos el camión sobre el punto $(-Pc, 0)$). A partir de este resultado podemos hallar la altura (h) del puente (elipse) cuando $x = 12.40$ y obtenemos

$$\frac{12.40^2}{25^2} + \frac{h^2}{9^2} = 1,$$

es decir

$$h^2 = 9^2\left(1 - \frac{12.40^2}{25^2}\right) = 61.073m^2,$$

ó $h = 7.815m$.

Finalmente, como deseamos dejar una luz de $0.5m$ entre la carga y el puente, podemos concluir que la máxima altura del camión mas su carga debe ser $7.81m - 0.5m = 7.31m$.

Ejemplo 84.3

La órbita de la Tierra alrededor del Sol tiene la forma de una elipse con el Sol en un foco (ver figura 84.4). Si la mitad de la magnitud del eje mayor de dicha órbita mide 14957000 km y la excentricidad de la elipse es 0.0167, hallar la distancia máxima y la distancia mínima de la Tiera al Sol.

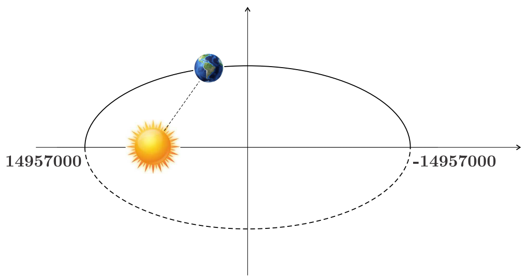


Figura 84.4

Solución

Podemos suponer que la órbita de la Tierra alrededor del Sol está descrita por medio de una ecuación de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde en este caso $a = 14957000$. Ahora, teniendo en cuenta que la excentricidad se define como $e = c/a$, donde c es la posición de uno de los focos, podemos concluir que la ubicación del Sol sobre el eje X estará en el punto

$$c = ea = 0.0167(14957000) = 249780km.$$

Además de la relación $c^2 = a^2 - b^2$, podemos deducir $b^2 = a^2 - c^2$, así que $b = 149500000$, de donde la ecuación de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es

$$\frac{x^2}{14957000^2} + \frac{y^2}{149500000^2} = 1.$$

Note que el valor de la excentricidad o los valores relativos de a y b, muestran que la forma de la elipse es casi circular.

Finalmente, a partir de la gráfica podemos deducir que la distancia máxima de la Tierra al Sol se alcanza cuando la tierra se encuentre sobre el semieje mayor de la elipse al lado opuesto del foco en el que se ubique el Sol; y la distancia mínima se obtiene cuando la Tierra se encuentre exactamente sobre el semieje mayor de la elipse pero al mismo lado del foco donde se encuentre el Sol. Es decir,

Distancia máxima $= a + c = 15206780$ km.

Distancia mínima $= a - c = 14702220$ km.

Ejemplo 84.4

Un satélite viaja alrededor de la Tierra en una órbita elíptica, donde la Tierra es un foco y la excentricidad es $\frac{1}{3}$. La distancia más corta a la que se acerca el satélite a la tierra es 300 millas. Calcular la distancia más grande a la que se aleja el satélite de la tierra. ¿Cuál es la ecuación de la órbita elíptica?

Solución

Primero que todo debemos recordar que si e es la excentricidad de la elipse, a es la mitad de la medida del semieje mayor y c es la distancia de un foco al centro de la elipse, entonces $e = c/a$. Así que en el caso del problema tenemos que

$$\frac{1}{3} = \frac{c}{a} \quad \text{de donde,} \quad a = 3c. \tag{84.1}$$

Por otro lado, sabemos que la distancia mínima entre el satélite y la Tierra está dada por $a - c$, así que

$$a - c = 300, \tag{84.2}$$

por lo que obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnias, que se puede resolver reemplazando la ecuación (84.1) en la (84.2), así:

$$300 = 3c - c = 2c, \quad \text{de donde,} \quad c = 150,$$

ó $a = 450$ (según la ecuación (84.1)).

Con esta información ya estamos listos para calcular la distancia mas grande a la cual se aleja el satélite de la tierra, dicha distancia está dada por $a + c = 450 + 150 = 600$ millas.

Finalmente para calcular la ecuación de la órbira elíptica debemos hallar el valor de b (la mitad de la magnitud del semieje menor); este valor puede ser encontrado recordando que $b^2 = a^2 - c^2 = (450)^2 - (150)^2 = 180000$, de donde $b = 100\sqrt{18}$ y por lo tanto

$$\frac{x^2}{(450)^2} + \frac{y^2}{180000} = 1.$$

Ejercicios

1. El arco de un puente es semielíptico con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 50 metros de longitud y su parte más alta con respecto a la tierra está a 20 metros. Determine la altura del arco a 30 metros del centro de la base.

2. El arco de un puente es semielíptico con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 metros de longitud si la altura del puente a 6 metros del centro de la base es de 10 metros, determine la mayor altura del puente con respecto a la tierra.

3. Un puente construido por encima de una autopista tiene forma semielíptica. La menor altura sobre la autopista es de 3 metros y la altura máxima es de 12 metros. El ancho del puente es de 40 metros. El conductor de un camión que debe pasar por un carril de la autopista situado a 12 metros del centro de ésta desea saber que altura total de la carga (altura de la carga más altura del camión) puede transportar, si desea dejar una luz de 1 metro entre la carga y el puente.

4. Un satélite viaja alrededor de la Tierra en una órbita elíptica, donde la Tierra es un foco y la excentricidad es $\frac{1}{5}$. La distancia más grande a la que se encuentra el satélite a la tierra es 800 millas. Calcular la distancia más corta a la que se acerca el satélite de la tierra. ¿Cuál es la ecuación de la órbita elíptica?

Lección 85

Aplicaciones de las cónicas II

Aplicaciones de la parábola

Su interés radica en la propiedad de converger o diverger haces de luz o de sonido, como por ejemplo en el diseño de antenas parabólicas, donde un satélite envía información dirigida a la tierra en forma de rayos que al reflejarse en el plato de la antena, convergen en el foco de la parábola en donde son decodificados por un receptor. Esta es la misma propiedad que nos permite encender un papel ubicado en el foco de un espejo parabólico, con el eje apuntando hacie el sol.

Por otro lado, cuando lanzamos un cuerpo con una velocidad que forma un ángulo con la horizontal, éste determina una trayectoria parabólica. En su obra "Diálogo sobre los Sistemas del Mundo" (1633), Galileo Galilei expone que el movimiento de un proyectil puede considerarse el resultado de componer dos movimientos simultáneos e independientes entre sí: uno, horizontal y uniforme; otro, vertical y uniformemente acelerado.

Consideremos una cañón que dispara una bala desde el suelo ($y_0 = 0$), con cierto ángulo $\theta < \pi/2$ con respecto a la horizontal, y es sometido a la acción de la gravedad (g), como muestra la figura 85.1.

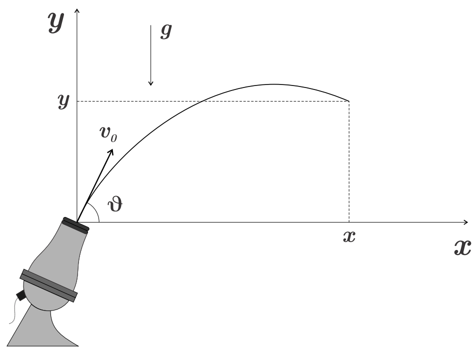


Figura 85.1

Si hallamos la descomposición canónica del vector velocidad y planteamos la ecuación de movimiento, es posible obtener:

$$x = v_0 \cos(\theta)t$$
$$y = h + v_0 \operatorname{sen}(\theta)t - \frac{gt^2}{2},$$

donde h es la altura inicial. Estas ecuaciones combinadas producen

$$\boxed{y - h = x\tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\theta)},}$$

que corresponde a una parábola.

A partir de esta ecuación es posible obtener otras cantidades importantes como

1. Alcance horizontal: Es la mayor distancia horizontal que se alcanza. Se obtiene al hacer $y = 0$, es decir
$$x_{max} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}(2\theta)}{g}.$$

2. Altura máxima: Ésta se obtiene cuando la velocidad vertical es cero; es decir, el proyectil ya no subirá mas (se alcanza el vértice de la parábola). El resultado es
$$y_{max} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2(\theta)}{2g}.$$

Aplicaciones de la hipérbola

Comparte propiedades similares a las del elipse, si se dirige un haz de luz hacía un foco f se reflejará antes de llegar a él en la hipérbola en dirección del otro foco (f'). Este principio es utilizado en los telescopios de tipo Cassegrain.

Además un cuerpo celeste que provenga del exterior del sistema solar y sea atraído por el sol, describirá una órbita hiperbólica, teniendo como un foco al sol, y saldrá nuevamente del sistema solar. Esto sucede con algunos cometas.

Por otro lado, el sistema de navegación Loran (long range navigation, su acrónimo en inglés) utiliza la propiedad de reflexión de la hipérbola (basándose en unas estaciones de radio maestra y otra secundaria que son percibidas por un barco en altamar). Loran, fue desarrollado durante la II Guerra Mundial y es uno de los muchos sistemas que permiten a los navegantes determinar la posición de su barco o avión, a partir de la diferencia de recepción de las señales de radio procedentes de dos emisores sincronizados distantes entre sí y ubicados en los focos de una hipérbola. El sistema emisor Loran se compone de una estación maestra y otra esclava. La maestra emite cada 0,05 segundos una pequeña señal, que es repetida por la esclava, controlada por radio desde la maestra, 0,001 segundos más tarde. Ambas señales se reciben en el barco o avión, se amplifican y se registran como pequeñas ondas.

Ejemplo 85.1

El cable de suspensión de un puente colgante tiene forma de parábola cuando el peso está uniformemente distribuido horizontalmente (ver figura 85.2). La distancia entre las dos torres es de 150 metros, los puntos de soporte del cable en las dos torres están a 22 metros sobre la carretera y el punto más bajo del cable está a 7 metros por encima de la carretera. Calcule la distancia vertical del cable y un punto sobre la carretera, situado a 15 metros del pie de una torre.

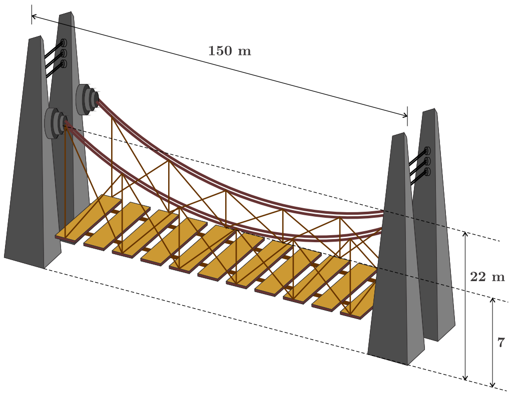


Figura 85.2

Solución
Teniedo en cuenta la información suministrada podemos suponer que la parábola que describe el puente tiene su vértice sobre el eje Y de un plano cartesiano, como muestra la figura 85.3.

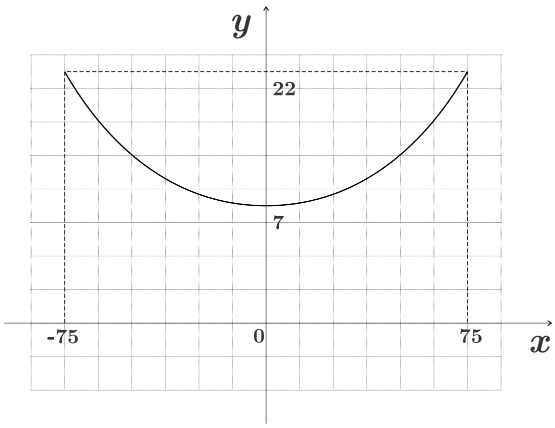


Figura 85.3

De acuerdo con la figura 85.3, la parábola que describe el puente corresponde a una parábola con vértice en el punto $(0, 7)$ que se abre hacia arriba. Por lo tanto tiene ecuación:

$$y - 7 = kx^2,$$

donde k es una constante que se puede determinar conociendo que cuando $x = 75$ ó $x = -75$ se tiene que $y = 22$. Es decir, $22 - 7 = k(75)^2$, de donde $k = \dfrac{15}{75^2} = \dfrac{1}{375}$. Así que la ecuación de la parábola es

$$y = 7 + \frac{1}{375}x^2.$$

Ahora, si un punto se encuentra situado a $15m$ de alguna de las torres entonces estará ubicado sobre el eje X en un punto con coordenadas $(-75+15, 0)$ ó $(75-15, 0)$, es decir $(-60, 0)$ ó $(60, 0)$. En cualquier caso, la altura de la parábola corresponderá a

$$h = 7 + \frac{1}{375}60^2 = 7 + \frac{48}{5} = \frac{83}{5}m.$$

Ejemplo 85.2

Suponga que el agua que sale por el extremo de una tubería horizontal que está a 25 metros de altura con respecto al suelo, describe una curva parabólica, siendo el vértice de la parábola el extremo del tubo (ver figura 85.4). Si en un punto situado a 8 metros por debajo del nivel del tubo, el flujo del agua se ha curvado hacia afuera 10 metros más allá de una vertical que pasa por el extremo del tubo, ¿a qué distancia de esta línea vertical entrará el agua en contacto con el suelo?

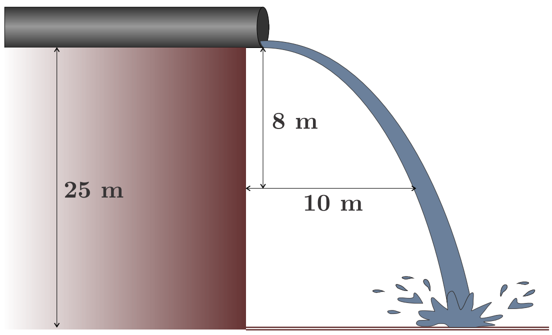


Figura 85.4

Solución

Podemos modelar la trayectoria que sigue el agua al salir de la tubería como una parábola con vértice en el punto $(25, 0)$ y que se abre hacia abajo, tal como se observa en la figura 85.5.

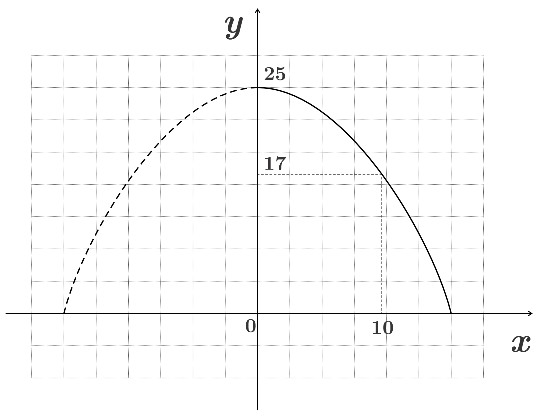


Figura 85.5

Esta parábola está descrita por una ecuación del tipo $y - 25 = kx^2$, donde la constante k se puede determinar conociendo que cuando $y = 17$ (ubicación del punto a $8m$ por debajo del nivel del tubo), $x = 10$. Es decir

$$17 - 25 = k(10)^2 \quad \text{de donde} \quad k = -\frac{8}{100} = -\frac{2}{25},$$

así que la parábola tiene ecuación $y = 25 - \frac{2}{25}x^2$ (note que el signo negativo en el valor de k indica que la parábola se abre hacia abajo).

Finalmente, para saber a que distancia el agua entrará en contacto con el piso, sólo debemos hallar el valor de x para el cual $y = 0$, es decir:

$$0 = 25 - \frac{2}{25}x^2 \quad \text{de donde} \quad x^2 = \frac{25^2}{2},$$

ó $|x| = \frac{25}{2}\sqrt{2}$. Así que el agua entrará en contacto con el piso a una distancia de $\frac{25}{2}\sqrt{2}m$, con respecto a la línea vertical que pasa por el extremo del tubo.

Ejercicios

1. Suponga que el agua que sale por el extremo de una tubería horizontal que está a 10 metros de altura con respecto al suelo, describe una curva parabólica, siendo el vértice de la parábola el extremo del tubo. Si el agua golpea el piso a una distancia de 3 metros con respecto a una línea vertical que pasa por el extremos del tubo, ¿qué tanto se ha curvado el chorro de agua a en un punto situado a 6 metros con respecto al piso?

2. Encuentre la trayectoria descrita por una bala de cañón disparada a 2 metros del suelo con un ángulo de 30° y con una velocidad inicial de 3 metros por segunto. ¿Cuál será su alcance horizontal y la máxima altura alcanzada?

Lección 86

Vectores algebraicos

Tanto en la física, como en la vida cotidiana, hay cantidades tales como la longitud, la masa, la densidad, el tiempo, el número de ladrillos necesarios para levantar una pared, etc, que quedan completamente determinadas por un número real, acompanadas de una unidad correspondiente. Nos referimos a estas cantidades, como cantidades escalares. Por ejemplo la estatura de una persona queda determinada si indicamos el número de unidades de longitud (centímetros, metros, pies, etc) que mide la persona, o al decir que la temperatura de un objeto son 5 grados centígrados, lo hemos descrito completamente.

Sin embargo, si queremos mover un objeto muy pesado de un lugar a otro, debemos aplicar una fuerza sobre el mismo para desplazarlo. Notemos que no es suficiente con decir, que aplicando una fuerza de 3 Newton sobre el objeto para desplazarlo, dicha fuerza queda determinada. Necesitamos la dirección en la que la fuerza se aplica sobre el objeto para lograr desplazarlo. Así que hay cantidades como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc, que se caracterizan por tener magnitud y dirección. A estas las denominamos cantidades vectoriales y el concepto matemático para describirlas es el de vector.

El objetivo de esta lección, es presentar el concepto de vector algebraico o coordenado, que también esta asociado con la necesidad de introducir nuevos sistemas coordenados que mejor se adapten a una situación.

Recordemos que a punto P del plano le corresponde una pareja ordenada de números reales (x, y), y recíprocamente, todo par ordenado (x, y) se representa mediante un punto P del plano, es decir, los elementos de

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

están en correspondencia biunívoca con los puntos del plano cartesiano, y por ello escribimos $P = (x, y)$, en vez de "P es el punto cuyo par de coordenadas es (x, y)".

Vamos a decir que dos puntos $X = (x_1, y_1)$ y $Y = (x_2, y_2)$, del plano $\mathbb{R}^2$, son iguales si sus respectivas componentes son iguales, es decir $X = Y$, si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

Ejemplo 86.1

Hallar x y y si $(1, x - y) = (x, 4)$.

Solución

Puesto que dos puntos del plano son iguales si sus correspondientes componentes son iguales, tenemos que $1 = x$ y $x - y = 4$ y por tanto $x = 1$ y $y = -3$.

Ahora vamos a dotar al conjunto $\mathbb{R}^2$ de dos operaciones, una suma en $\mathbb{R}^2$ y la otra un producto por un escalar (un número real por un elemento de $\mathbb{R}^2$) que definimos a continuación.

Suma y producto por un escalar

Dados dos puntos $X = (x_1, y_1)$ e $Y = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y un escalar λ, definimos **la suma de X y Y**, y **el producto del escalar** λ por X, que denotamos respectivamente por $X + Y$ y λX, como:

$$\begin{aligned} X+Y &= (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \\ \lambda X &= \lambda\,(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1) \end{aligned}$$

Ejemplo 86.2

Sean $X = (2, -3)$ y $Y = (-4, 1)$. Encuentre $X + Y$, $3X$, $-X$ y $3X + Y$

Solución

De la definición de suma y producto por un escalar tenemos:

$$\begin{aligned} X+Y &= (2,-3)+(-4,1)=(2+(-4)\,,-3+1)=(-2,-2) \\ 3X &= 3\,(2,-3)=(3\cdot 2,3\cdot(-3))=(6,-9) \\ -X &= -\,(2,-3)=((-1)\cdot 2,(-1)\cdot(-3))=(-2,3) \\ 3X+Y &= 3\,(2,-3)+(-4,1)=(6,-9)+(-4,1)=(6+(-4)\,,-9+1)=(2,-8)\,. \end{aligned}$$

Notemos que si $X = (x, y)$ y $O = (0, 0)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} X+O &= (x,y)+(0,0)=(x,y) \\ X+(-X) &= (x,y)+(-\,(x,y))=(x,y)+(-x,-y)=(0,0) \end{aligned}$$

Al par ordenado $O = (0, 0)$ lo llamamos el modulo aditivo de $\mathbb{R}^2$ y al par $-X = (-x, -y)$ lo llamamos inverso aditivo de $X = (x, y)$.

Propiedades

Dados puntos del plano X, Y e Z de $\mathbb{R}^2$ y escalares α y β se cumple que:

1. $X + Y \in \mathbb{R}^2$
2. $X + Y = Y + X$
3. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
4. $X + O = X$
5. $X + (-X) = O$
6. $1.X = X$

7. $\alpha(\beta X) = \alpha\beta X$

8. $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y$

9. $(\alpha+\beta) X = \alpha X + \beta X$

Dados $X = (x_1, y_1)$ e $Y = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ definimos **la diferencia de X e Y** que denotaremos como $X - Y$ como

$$X - Y = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Ejemplo 86.3

Dados $X = (2, -3)$ y $Y = (-4, 1)$, tenemos que $X - Y = (2, -3) - (-4, 1) = (2 - (-4), -3 - 1) = (6, -4)$.

Ejemplo 86.4

Hallar x y y si $(1, -2) = x(1, 2) + y(-1, 4)$.

Solución

Se sigue de la multiplicación por un escalar, la suma y la igualdad en $\mathbb{R}^2$, que:

$(1, -2) = (x, 2x) + (-y, 4y) = (x - y, 2x + 4y)$ y por tanto $1 = x - y$ y $-2 = 2x + 4y$ Resolviendo para x y y tenemos $x = \frac{1}{3}$ y $y = \frac{-2}{3}$.

Ejemplo 86.5

Considere los puntos $A = (-1, 1)$, $B = (0, -1)$ y $C = (3, 2)$. Hallar un punto D en $\mathbb{R}^2$, tal que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo.

Solución

El cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo si y sólo si los vectores geométricos $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Ahora $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Longleftrightarrow D - C = A - B \Longleftrightarrow D = A - B + C$.

Luego, tenemos $D = (-1, 1) - (0, -1) + (3, 2) = (2, 4)$.

Definición

Un conjunto no vacío $\mathbf{V}$ en el cual hay definidas dos operaciones, una suma entre elementos de $\mathbf{V}$ y un producto por un escalar (un número real por un elemento de $\mathbf{V}$) que cumpla las nueve propiedades enuncidas anteriormente, se llama **espacio vectorial** y los elementos de $\mathbf{V}$ se llaman **vectores.**

Notemos que $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de suma y producto por un escalar antes definidas, es un espacio vectorial y un vector en el plano es un par ordenado de números reales (x, y), y nos referimos a los números x y y como las componentes del vector. Tenemos así una correspondencia biunívoca entre los vectores del plano y puntos del plano y en adelante nos referiremos indistintamente a los elementos $\mathbb{R}^2$ como vectoes algebraicos o puntos del plano.

Denotaremos los vectores algebraicos por letras mayúsculas como A, B, C o letras minúsculas con una flecha encima como $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

Ejercicios

1. Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ para que se cumplan las siguientes igualdades:
   (a) $(a^2 - 4, b^3 - 9b) = (0, 0)$.
   (b) $(a + 2b, b^2) = (10, 5b - 6)$
2. Dados los vectores $A = (1, 5), B = (-3, 4)$ y $C = (5, -3)$, calcule las siguientes expresiones vectoriales:
   (a) $A + B$.
   (b) $A - B$.
   (c) $3A - 5B + 2C$.
   (d) $2A - ((-3B - C) + 2C)$.
3. Con los vectores del ejercicio anterior, hallar escalares α y β tales que se cumpla:
   (a) $\alpha B - \beta C = A$.
   (b) $2\alpha A = 5\beta(2B - C)$.
4. Sean $P = (1, 5), Q = (2, 0), R = (0, -1)$ y $S = (-6, 1)$.
   (a) Ubicar en el plano cartesiano los puntos dados.
   (b) Hallar los puntos medios de los lados del cuadrilátero $PQRS$.
   (c) Verificar que los puntos medios de los lados del cuadrilátero $PQRS$ son los vértices de un paralelogramo.
5. Sean X, Y y Z vectores algebraicos y sean α y β escalares reales. Probar que:
   (a) $X + Y = Y + X$.
   (b) $X + O = O + X$.
   (c) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.
   (d) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta Y$.
   (e) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$.

Lección 87

Magnitud y dirección

En la lección anterior, definimos el concepto de vector y dijimos que un vector queda completamente determinado por su magnitud y dirección. En esta lección vamos a definir estos conceptos para vectores en el plano.

Dado un vector $X = (x, y)$ definimos su **magnitud**, que denotamos por $\|X\|$, como la longitud del segmento $\overline{OX}$, es decir,

$$\|X\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

luego, $\|X\|$ es la distancia del punto X al origen O.

Ejemplo 87.1

Si $X = (2, -3)$, entonces $\|X\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

La distancia entre los vectores U de coordenadas (x_1, y_1) y V de coordenadas (x_2, y_2), es la magnitud del vector de coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, es decir, la distancia entre los puntos U y V. Por tanto

$$\left\|\overline{UV}\right\| = \|V - U\| = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

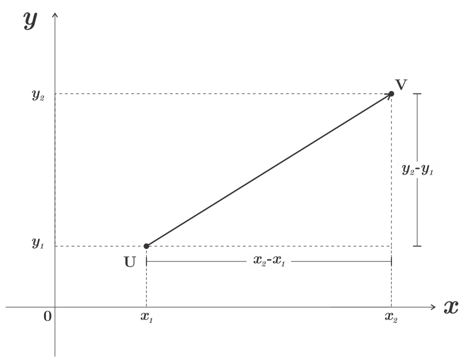


Figura 87.1

Ejemplo 87.2

Si $U = (-2, 5)$ y $V = (1, -3)$, entonces la distancia entre los vectores U y V es la magnitud del segmento $\overline{UV}$, es decir,

$$\left\|\overline{UV}\right\| = \|V - U\| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{73}$$

Propiedades

Para vectores X y U en $\mathbb{R}^2$ y un escalar real λ se verifica que:

1. $\|X\| \geq 0$
2. $\|X\| = 0$ si y sólo si $X = (0,0)$
3. $\|\lambda X\| = |\lambda| \, \|X\|$
4. $\|X + U\| \leq \|X\| + \|U\|$ (Desigualdad triangular)

Ahora consideremos un vector algebraico no nulo P en $\mathbb{R}^2$. La **dirección** de P que denotamos por dir(P) es el ángulo θ que se indica en la figura, es decir, el ángulo θ que forma el segmento $\overline{OP}$ con el eje x positivo medido en sentido antihorario y se expresa en grados, con $0° \leq \theta \leq 360°$ o radianes $0 \leq \theta \leq 2\pi$

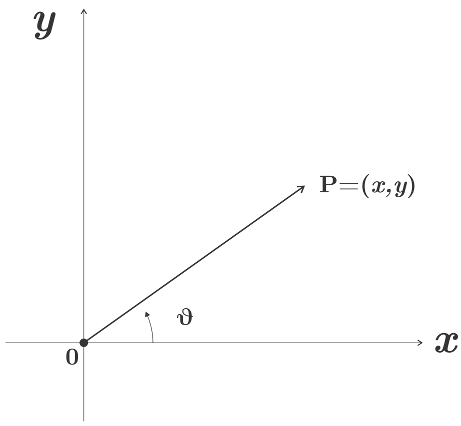


Figura 87.2

Por ejemplo, si $P = (x, y)$ y $x = 0$, entonces dir(P)= 90° si $y > 0$ y dir(P)= 270° cuando $y < 0$

Recordemos que si $P = (x, y)$ y $x \neq 0$ para el triángulo OVP de la figura 87.3, la tangente del ángulo θ se define como $\tan\theta = \frac{y}{x}$, (es decir, longitud del lado opuesto /longitud del lado adyacente.)

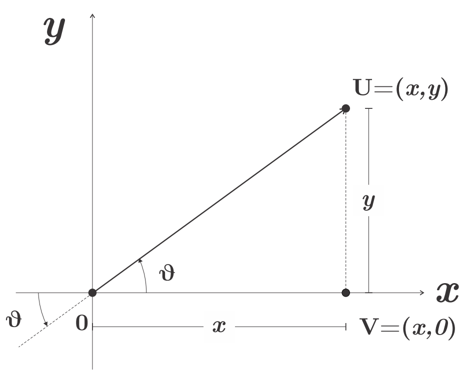


Figura 87.3

Debemos tener cuidado para encontrar la dirección de un vector (x, y). Por ejemplo si $x \neq 0$, entonces $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ y si θ es agudo entonces $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$. Ahora si θ no es agudo, entonces $\theta \neq \arctan(\frac{y}{x})$, en este caso debemos analizar en que cuadrante está el vector.

Ejemplo 87.3

Hallar la dirección del vector $X = (1, -1)$

Solución

Si θ es la dirección del vector X, entonces $\tan(\theta) = \frac{1}{-1} = -1$. Pero notemos que hay dos ángulos cuya tangente es -1, a saber 135° y 315°. En general dos ángulos que difieren en 180° tienen la misma tangente. Para decidir cuál ángulo es el que debemos tomar, analizamos las componentes del vector. Como la primera componente es positiva y la segunda negativa el vector esta en el cuarto cuadrante y por tanto $\theta = 315°$.

Un vector de $\mathbb{R}^2$ es llamado un **vector unitario** si tiene magnitud 1. Por tanto si $U \in \mathbb{R}^2$ es un vector no nulo entonces el vector $\frac{U}{\|U\|}$ es un vector unitario. Notemos que un vector unitario de $\mathbb{R}^2$ con dirección θ es $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y por lo tanto si U es un vector no nulo con dirección θ, entonces un vector unitario en la dirección de U es $\frac{U}{\|U\|} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y es llamado la normalización del vector U. Por tanto tenemos que todo vector U de $\mathbb{R}^2$ lo podemos escribir como $U = \|U\| (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Ejemplo 87.4

Hallar los valores de k tal que $\|X\| = 5$, si $X = (3, k)$

Solución

En este caso tenemos que $\|X\| = \sqrt{3^2 + k^2} = 5 \Leftrightarrow 3^2 + k^2 = 25$ y despejando k tenemos que $k = \pm 4$

Ejemplo 87.5

Halle la magnitud y dirección de los vectores $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $Z = (-2, -2)$.

Solución

Sabemos por definición que la magnitud de un vector $X = (x, y)$ esta dada por

$$\|X\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Luego para nuestro caso la magnitud del vector $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es

$$\|X\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Ahora hallemos su dirección. Como el vextor X se encuentra en el primer cuadrante su dirección es $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = 60°$.

Análogamente tenemos que la magnitud del vector $Z = (-2, -2)$ es

$$\|Z\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Notemos que el vector Z se encuentra en el tercer cuadrante y por tanto la dirección de este vector es $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) + 180° = \arctan(\frac{-2}{-2}) + 180° = \arctan(1) + 180° = 45° + 180° = 225°$.

Ejemplo 87.6

Sean $X = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $Y = \left(-\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

1. Muestre que X es un vector unitario y halle su dirección.
2. Halle el vector $X + Y$ y normalícelo.
3. Halle un vector W con la misma dirección y sentido opuesto al vector $X + Y$ y tal que su magnitud es 7.

Solución

1. La magnitud del vector X es

$$\|X\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

   Notemos que el vector X se encuentra en el segundo cuadrante, por tanto su dirección es $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180° = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\right) + 180° = \arctan(-1) + 180° = -45° + 180° = 135°$.

2. $X + Y = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right)$.

   Ahora como el vector $X + Y$ se encuentra en el segundo cuadrante, su dirección es $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) + 180° = \arctan(\frac{2\sqrt{2}}{\frac{-3}{\sqrt{2}}}) + 180° = \arctan(\frac{-4}{3}) + 180°$.

   La normalización del vector $X + Y$ es $\dfrac{X+Y}{\|X+Y\|}$ y como

$$\|X+Y\| = \sqrt{\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + 8} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

   entonces $\frac{X+Y}{\|X+Y\|} = \frac{\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right)}{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

3. Recordemos de la última parte de la lección 2 que todo vector W lo podemos escribir en la forma $W = \|W\|\, U$, donde U es un vector unitario en la direccón de W. Notemos entonces que $\frac{X+Y}{\|X+Y\|}$ es un vector unitario en la dirección de $X + Y$, luego $-\frac{X+Y}{\|X+Y\|}$ es un vector unitario en la dirrección de W y por tanto el vector W pedido es

$$W = \|W\| \left(-\frac{X+Y}{\|X+Y\|}\right) = -7\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{21}{5}, \frac{-28}{5}\right).$$

Ejercicios

1. Considere un vector algebraico X y un escalar real α. Responda lo siguiente:
   (a) Si $\alpha > 1$, ¿ cuál es la dirección y magnitud de αX ?
   (b) Si $0 < \alpha < 1$, ¿ cuál es la dirección y magnitud de αX?
   (c) Si $-1 < \alpha < 0$, ¿ cuál es la dirección y magnitud de αX?
   (d) Si $\alpha < -1$, ¿ cuál es la dirección y magnitud de αX?
2. Dados los vectores $U = (-3, 5)$, $V = (2, -2)$ y $W = (2, 3)$ de $\mathbb{R}^2$ encontrar:
   (a) La magnitud y dirección del vector $Z = U - V + 3W$.
   (b) Todos los escalares λ tales que $\|\lambda W\| = 9$.
   (c) La distancia entre los vectores U y V.

Lección 88

Ecuación vectorial de la recta

Entender los puntos del plano como vectores nos permite representar rectas en el plano de maneras alternativas. Recordemos que una línea recta es el conjunto de puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0,$$

donde a, b, y c son números, con a y b no simultáneamente nulos. En ésta y la siguiente lección introduciremos dos formas alternativas para representar una línea recta. Esto se hace posible gracias a la expresividad que logramos al dotar el plano con las operaciones suma, producto por un escalar y producto punto.

Consideremos la recta que pasa por el origen con pendiente 3. Esta recta tiene como ecuación general $y = 3x$, y sabemos que los puntos $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 6)$, etc. pertenecen a la recta. Otra manera de describir esta recta es como el conjunto de todos los vectores $\vec{x} = (x, y)$ paralelos al vector $\vec{d} = (1, 3)$. Como vimos en la lección pasada, los vectores paralelos a $\vec{d}$ son todos aquellos de la forma $t\vec{d}$ donde t puede tomar cualquier valor. Entonces la recta $y = 3x$ se puede escribir como

$$\vec{x} = t\vec{d}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ahora consideremos el caso de una recta que no pasa por el origen, por ejemplo la recta $y = 2x - 1$. Esta recta tiene pendiente 2 e intercepta al eje y en -1. Algunos puntos en dicha recta son: $(0, -1)$, $(1, 1)$, y $(2, 3)$. Si fijamos uno de estos puntos, por ejemplo $\vec{p} = (0, -1)$, podemos ver que los puntos de la recta se pueden obtener como la suma de $\vec{p}$ con un vector paralelo a $\vec{d} = (1, 2)$. Por ejemplo, $(2, 3) = \vec{p} + 2\vec{d} = (0, -1) + 2(1, 2)$, como se ilustra en la figura 88.1. Entonces la recta $y = 2x - 1$ se puede escribir como

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{d}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

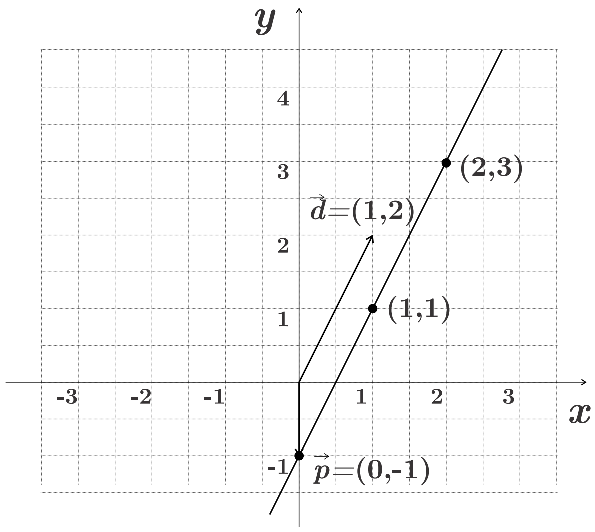


Figura 88.1

En general, cualquier recta se puede representar como el conjunto de los vectores $\vec{x} = (x, y)$ de la forma $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{d}$, donde t toma valores en $\mathbb{R}$. Esta es la recta que pasa por $\vec{p}$ y es paralela a $\vec{d}$. Al vector $\vec{d}$ se le llama **vector director**, y a la ecuación se le llama la **ecuación vectorial de la recta**.

Ejemplo 88.1

Considere la recta que pasa por $\vec{p} = (2, 3)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (3, 1)$.

a) Halle una ecuación vectorial de la recta.

b) Halle un punto de la recta a la derecha de $\vec{p}$ y otro a la izquierda de $\vec{p}$.

c) Halle otra ecuación vectorial distinta de la misma recta.

Solución

a) Una posible ecuación vectorial de ésta recta es $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{d}$, es decir,

$$(x, y) = (2, 3) + t(3, 1).$$

b) Para encontrar un punto de la recta a la derecha de $\vec{p}$ podemos utilizar la ecuación vectorial y hacer $t = 1$ para encontrar

$$\vec{p_1} = \vec{p} + 1\,\vec{d} = (2, 3) + (3, 1) = (5, 4).$$

Similarmente haciendo $t = -1$ podemos encontrar un punto en la recta a la izquierda de p, $\vec{p_2} = \vec{p} - 1\,\vec{d} = (-1, 2)$.

c) Para encontrar otra ecuación vectorial distinta de la misma recta, basta con usar un punto diferente a $\vec{p}$ y/o un vector director diferente. En el numeral a) encontramos que $\vec{p_1} = (5, 4)$ es también un punto de la recta, y como vector director podemos usar cualquier vector paralelo a $\vec{d}$, por ejemplo $\vec{d_1} = 2\,\vec{d} = (6, 2)$. Con estos tenemos que otra ecuación de la recta es $\vec{x} = \vec{p_1} + t\vec{d_1}$, es decir

$$(x, y) = (5, 4) + t(6, 2).$$

Ejemplo 88.2

Encontrar la ecuación general de la recta cuya ecuación vectorial es

$$\vec{x} = (1, -1) + t(5, 2).$$

Solución La ecuación vectorial nos dice que $(1, -1)$ es un punto de la recta y que la recta es paralela al vector $(5, 2)$. De manera que la pendiente de la recta se puede hallar directamente a partir del vector $(5, 2)$, como $m = 2/5$. Con esto y utilizando la fórmula punto-pendiente de la recta obtenemos la ecuación $y + 1 = \frac{2}{5}(x - 1)$, simplificando, $y = \frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$.

En el ejemplo anterior encontramos la ecuación vectorial de la recta

$$\vec{x} = (x, y) = (2, 3) + t(3, 1).$$

Vimos que a cada valor de t en $\mathbb{R}$ corresponde un punto de la recta. Por ello, a la variable t se le llama **parámetro**. Si separamos las componentes x y y de la ecuación obtenemos un par de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t. \end{cases}$$

las cuales son llamadas **ecuaciones escalares paramétricas** de la recta.

Las ecuaciones paramétricas se pueden utilizar para determinar si un punto pertenece o no a la recta. Un punto (a, b) pertenece a la recta si existe un valor de t que satisface ambas ecuaciones. Por ejemplo, para que $(3, 5)$ pertenezca a la recta anterior, debe existir t tal que

$$\begin{cases} 3 = 2 + 3t \\ 5 = 3 + t, \end{cases}$$

pero al despejar t de la primera ecuación obtenemos $t = 1/3$ y de la segunda obtenemos $t = 2$. Como estos valores no coinciden, concluimos que $(3, 5)$ no pertenece a dicha recta.

Cuando introdujimos la línea recta, vimos que la recta que pasa por dos puntos $\vec{p} = (x_1, y_1)$ y $\vec{q} = (x_2, y_2)$ tiene como ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Existe también una manera muy natural de obtener una ecuación vectorial de la recta a partir de dos puntos. Basta con notar que el vector $\vec{d} = \vec{q} - \vec{p}$ es paralelo a la recta como se ilustra en la figura 88.2. Así, la recta que pasa por dos puntos $\vec{p}$ y $\vec{q}$ tiene ecuación vectorial

$$\vec{x} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En la figura 88.2 vemos que la recta que pasa por los puntos $\vec{p} = (-1, 3)$ y $\vec{q} = (2, -1)$, tiene como ecuación vectorial

$$\vec{x} = (-1, 3) + t\left((2, -1) - (-1, 3)\right),$$

es decir,
$$\vec{x} = (-1, 3) + t(3, -4).$$

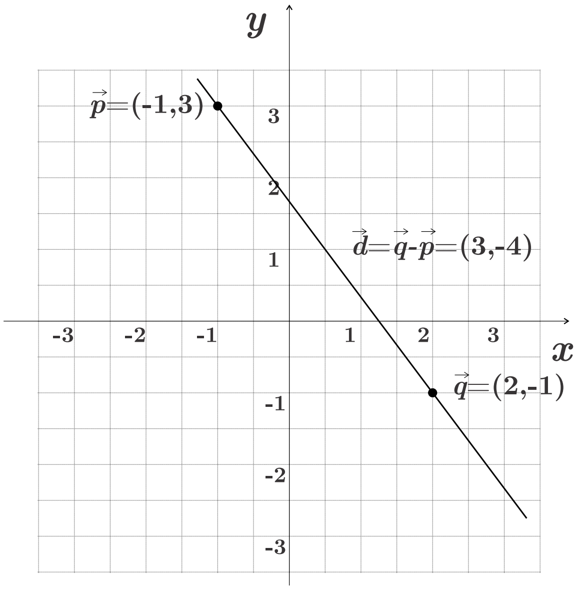


Figura 88.2

Ejemplo 88.3

Encontrar la ecuación vectorial de la recta cuya ecuación general es $y = -4x + 1$.

Solución De la ecuación general $y = -4x + 1$, podemos ver que la recta intercepta el eje y en $\vec{p} = (0, 1)$. Una manera de encontrar la ecuación vectorial de dicha recta es buscar otro punto en la recta. Por ejemplo, haciendo $x = 1$, tenemos $y = -4 + 1 = -3$ y obtenemos el punto $\vec{q} = (1, -3)$. Luego, la recta que pasa por los puntos $\vec{p} = (0, 1)$ y $\vec{q} = (1, -3)$, tiene como ecuación vectorial
$$\vec{x} = (0, 1) + t\left((1, -3) - (0, 1)\right),$$
es decir,
$$\vec{x} = (0, 1) + t(1, -4).$$

Ejercicios

1. Encuentre la ecuación vectorial de cada una de las recta descritas a continuación.
   (a) La recta que pasa por $\vec{p} = (0, 0)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (-1, 1)$.
   (b) La recta que pasa por $\vec{p} = (2, -1)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (0, 1)$.
   (c) La recta cuya ecuación general es $y = \frac{1}{3}x + 3$.
   (d) La recta que pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(4, 1)$.
   (e) La recta que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(1/2, 2)$.

(f) La recta que pasa por $\vec{p} = (1, 2)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (3, 1)$.

(g) La recta que pasa por $\vec{p} = (1/2, 1/2)$ y es paralela a otra recta con ecuación general $y + x - 1 = 0$.

(h) La recta que pasa por $\vec{p} = (-1, -2)$ y es paralela a otra recta con ecuación vectorial $(x, y) = (2, 3) + t(1/2, 1)$.

(i) La recta cuya ecuación general es $y = 2x - \frac{5}{3}$.

2. Considere la recta con ecuación vectorial $(x, y) = (-2, -1) + t(5, 5/2)$.

(a) Halle tres puntos diferentes sobre la recta.

(b) Halle otra ecuación vectorial distinta de la misma recta.

(c) Encuentre un punto en la recta cuya coordenada x es -4.

(d) Halle la ecuación general de la recta.

3. Considere la recta con ecuación vectorial $(x, y) = t(51, 102)$.

(a) Halle otra ecuación vectorial distinta de la misma recta.

(b) Encuentre un punto en la recta cuya coordenada y es 1.

(c) Halle la ecuación general de la recta.

(d) Escriba las ecuaciones escalares paramétricas de la recta.

(e) Utilice las ecuaciones escalares paramétricas para determinar si los puntos $(1, 2)$, $(5, 15)$, y $(-2, -4)$ pertenecen a la recta.

Lección 89

Ecuación en forma normal de la recta

Producto escalar

Consideremos los vectores algebraicos $X = (x_1, y_1)$ y $Y = (x_2, y_2)$, definimos el **producto escalar o producto punto** de X y Y que denotamos por $X \cdot Y$ como el escalar que se obtiene multiplicando las componentes correspondientes de los vectores y luego sumando los productos resultantes, es decir,

$$X \cdot Y = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Si X y Y son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, el **ángulo entre** X **y** U se define como el ángulo θ entre los segmentos $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$.

Si X y Y son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ y θ es el ángulo entre X y Y entonces

$$\cos\theta = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|}$$

Notemos que como $\cos\theta = 0$ si $\theta = 90°$, entonces de la fórmula anterior tenemos que dos vectores no nulos X y Y son ortogonales, que denotamos por $X \perp Y$, si y sólo si su producto escalar $X \cdot Y = 0$.

Ecuación de la recta

En la lección anterior vimos que la recta que pasa por $\vec{p}$ y es paralela a $\vec{d}$ se puede describir de manera compacta como ecuación vectorial $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{d}$, donde t toma valores en $\mathbb{R}$. En esta lección veremos que el producto punto nos permite describir la recta que pasa por $\vec{p}$ y es perpendicular a un vector $\vec{n}$, también de manera compacta.

Recordemos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares si su producto punto $\vec{u} \cdot \vec{n}$ es igual a cero. Consideremos la recta que pasa por $\vec{p} = (1, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (-1, 1)$, que se ilustra en la figura 89.1. Consideremos ahora un punto arbitrario $\vec{x}$ en la recta. En la figura se puede apreciar que el vector $\vec{x} - \vec{p}$ es perpendicular a $\vec{n}$. De hecho, un punto $\vec{x}$ del plano está en la recta si y solo si el vector $\vec{x} - \vec{p}$ es perpendicular a $\vec{n}$. Utilizando el producto punto, esto lo podemos escribir como $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$. Por la propiedad distributiva del producto punto, ésta ecuación también se puede escribir como $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$.

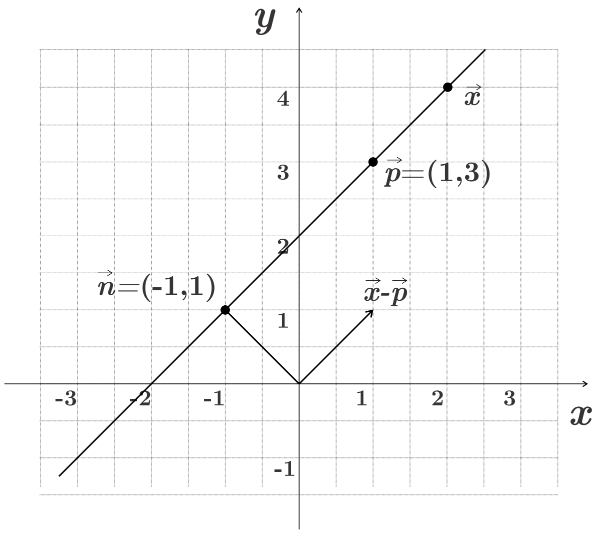


Figura 89.1

En general, cualquier recta se puede representar como el conjunto de los vectores $\vec{x} = (x, y)$ tales que $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ o lo que es lo mismo $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$. Esta es la recta que pasa por $\vec{p}$ y es perpendicular al vector $\vec{n}$. Al vector $\vec{n}$ se le llama **vector normal**, y a la ecuación se le llama la **ecuación en forma normal de la recta**.

De modo que la recta que pasa por $\vec{p} = (1, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (-1, 1)$, tiene como ecuación en forma normal

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n},$$

es decir, si $\vec{x} = (x, y)$

$$(x, y) \cdot (-1, 1) = (1, 3) \cdot (-1, 1).$$

Si desarrollamos el producto punto a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$-x + y = 2,$$

la cual es la forma general de la recta, como la aprendimos antes.

En general, si hacemos $\vec{x} = (x, y)$ y $\vec{n} = (a, b)$, la ecuación en forma normal de la recta $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$, se simplifica como

$$ax + by = c$$

donde $c = \vec{p} \cdot \vec{n}$.

Ejemplo 89.1

Encuentre la ecuación general y vectorial de la recta cuya ecuación en forma normal es

$$(x, y) \cdot (1/2, 2) = (5, -2) \cdot (1/2, 2).$$

Solución La ecuación general se obtiene simplemente al desarrollar el producto punto a ambos lados de la igualdad para obtener

$$\frac{1}{2}x + 2y = \frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2},$$

es decir, $\frac{1}{2}x + 2y + \frac{3}{2} = 0$.

Para encontrar una forma vectorial necesitamos un punto en la recta y un vector director. El punto puede ser $\vec{p} = (5, -2)$ que se evidencia en la forma normal. Como sabemos que $\vec{n} = (1/2, 2)$ es normal a la recta, podemos encontrar un vector director fácilmente, construyendo un vector perpendicular a $\vec{n}$. Por ejemplo, el vector $\vec{d} = (-2, 1/2)$ es evidentemente perpendicular a $\vec{n}$, ya que $(1/2, 2) \cdot (-2, 1/2) = 0$. Por tanto una posible ecuación vectorial de esta recta es $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{d}$, es decir,

$$\vec{x} = (5, -2) + t(-2, 1/2).$$

El procedimiento del ejemplo anterior se puede generalizar así:

> Una recta con ecuación $ax + by = c$ es normal al vector $\vec{n} = (a, b)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (-b, a)$.

Ejemplo 89.2

Considere la recta que pasa por $\vec{p} = (1, 1)$ y que es paralela a $\vec{d} = (-2, 3)$. Halle la ecuación vectorial, luego la ecuación en forma normal y a partir de ésta, su ecuación general.

Solución La ecuación vectorial es simplemente

$$(x, y) = (1, 1) + t(-2, 3).$$

Un vector perpendicular a $\vec{d} = (-2, 3)$ (y por tanto a la recta) es $\vec{n} = (3, 2)$, y como sabemos que la recta pasa por $\vec{p} = (1, 1)$ la ecuación en forma normal sería

$$(x, y) \cdot (3, 2) = (1, 1) \cdot (3, 2)$$

Finalmente, desarrollando los productos escalares obtenemos

$$3x + 2y = 5$$

la cual es una ecuación de la recta en forma general.

Ejercicios

1. Encuentre la ecuación en forma normal de cada una de las rectas descritas a continuación.

   (a) La recta que pasa por $\vec{p} = (0, 0)$ y es perpendicular al vector $\vec{d} = (-2, 2)$.

(b) La recta que pasa por $\vec{p} = (2, -1)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (0, 1)$.

(c) La recta cuya ecuación general es $y = \frac{1}{3}x + 3$.

(d) La recta que pasa por $\vec{p} = (1, 2)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (3, 1)$.

(e) La recta que pasa por $\vec{p} = (1/2, 1/2)$ y es perpendicular a otra recta con ecuación general $y + x - 1 = 0$.

(f) La recta que pasa por $\vec{p} = (-1, -2)$ y es paralela a otra recta con ecuación vectorial $(x, y) = (2, 3) + t(1/2, 1)$.

(g) La recta cuya ecuación general es $y = 2x - \frac{5}{3}$.

(h) La recta que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 8)$.

2. Encuentre la ecuación general y vectorial de la recta cuya ecuación en forma normal es

$$(x, y) \cdot (-1, 2) = (2, -2) \cdot (-1, 2).$$

3. Encuentre la ecuación general de las rectas descritas en el numeral 1 (a, c, y e).

Lección 90

Aplicaciones a la física

Para concluir este capítulo presentaremos dos ejemplos que ilustran la aplicaciones de los vectores geométricos a la física. El primer ejemplo es un ejemplo de física dinámica donde se relacionan la velocidad y el desplazamiento. En este ejemplo se utiliza la suma de vectores para encontrar la velocidad resultante de la aplicación de dos velocidades. El segundo ejemplo es un ejemplo de física estática donde se ilustra la relación entre fuerza y aceleración. En este ejemplo utilizamos la descomposición de vectores para encontrar el efecto que tiene la aplicación de una fuerza en las diferentes direcciones.

Ejemplo 90.1

Consideremos un bote que intenta cruzar un río de 100 m de ancho como se ilustra en la figura 90.1. El bote parte del punto A en la orilla Sur a una velocidad con respecto al agua de 5 km/h directamente hacia el Norte. El río lleva una velocidad de 1 km/h en dirección Este. Calcular el tiempo que le toma al bote para cruzar el río y y la distancia $\overline{BC}$ del desplazamiento río abajo causado por el río.

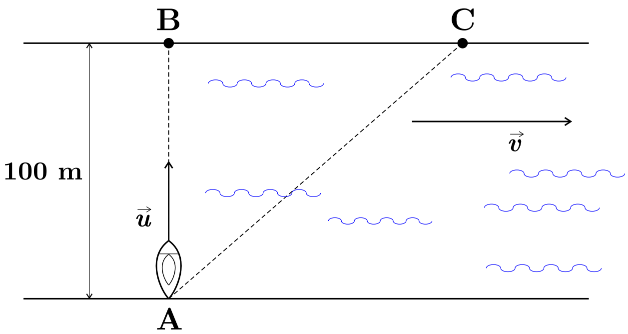


Figura 90.1

Solución

Llamemos $\vec{u}$ el vector que representa la velocidad del bote y $\vec{v}$ el vector que representa la velocidad del río. Sabemos que la magnitud de $\vec{u}$ es $\|\vec{u}\| = 5$ y la de $\vec{v}$ es $\|\vec{v}\| = 1$. También sabemos que la dirección de $\vec{u}$ es hacia el Norte y la de $\vec{v}$ es hacia el Este. De modo que las coordenadas de estos vectores velocidad son $\vec{u} = (0, 5)$ y $\vec{v} = (1, 0)$. Debemos encontrar la velocidad del bote con respecto a tierra firme, la cual corresponde al vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (1, 5)$. La figura 90.2 ilustra la situación.

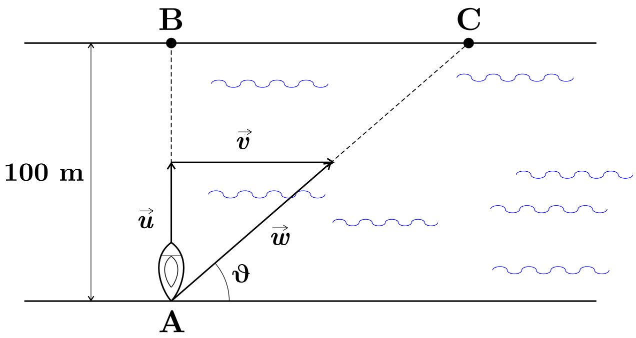


Figura 90.2

La magnitud de $\vec{w}$ está dada por

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}} = \sqrt{26} = 5,10.$$

La dirección de $\vec{w}$ es el ángulo θ como se observa en la figura 90.2 que se puede encontrar utilizando la definición del coseno que nos dice en este caso que

$$\cos(\theta) = \frac{1}{5,10}$$

y por tanto $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{5,10} \approx 78,69°$.

A continuación observamos que la dirección del desplazamiento del barco es precisamente la dirección del vector $\vec{w}$, es decir $78,69°$. El barco se desplaza por tanto a lo largo de la hipotenusa $\overline{AC}$ del triángulo ABC a una rapidez de $5,10\,\text{km/h}$, como se ve en la figura 90.2. Para encontrar el tiempo que se demora el barco en cruzar el río debemos encontrar la distancia total que debe recorrer, es decir la longitud del segmento $\overline{AC}$. Por la definición del seno y sabiendo que $\theta = 78,69°$ y que $\overline{AB}$ mide $100\,\text{m}$ concluimos que

$$\text{sen}(78,69) = \frac{100}{\overline{AC}}$$

y por tanto $\overline{AC}$ mide $\frac{100}{\sin(78,69)} \approx 101,98\,\text{m}$.

Ahora, sabiendo que el barco recorrió una distancia de $101,98\,\text{m} = 0,10198\,\text{km}$ a una rapidez de $5,10\,\text{km/h}$ podemos calcular el tiempo que le tomó cruzar el río que es igual a

$$t = \text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}} = \frac{0,10198\,\text{km}}{5,10\,\text{km/h}} = 0,02\,\text{h} = 1.20\,\text{min}.$$

Finalmente el mismo triángulo ABC se puede usar para encontrar la distancia $\overline{BC}$ del desplazamiento río abajo causado por el río. Por ejemplo utilizando el coseno de θ tenemos que

$$\cos(78,69) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

y por tanto $\overline{BC}$ mide $101,98\cos(78,69) \approx 20,00\,\text{m}$.

Ejemplo 90.2

Una caja de 200 kg de masa es empujada por una fuerza constante de 20 N a un ángulo de 30° como se muestra en la figura 90.3. La caja se encuentra sobre una superficie horizontal. (a) Encontrar las componentes horizontal y vertical de la fuerza. (b) Calcular la aceleración horizontal de la caja. (c) Calcular la fuerza normal que ejerce la superficie sobre la caja.

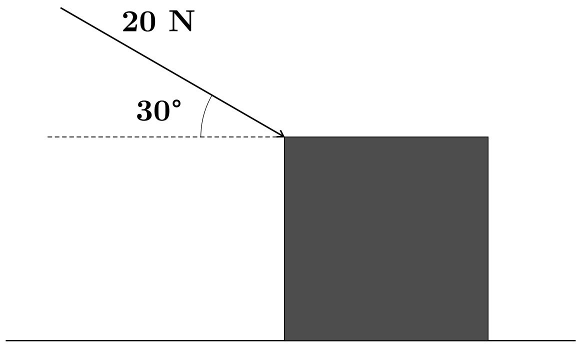


Figura 90.3

Solución

(a) Comenzamos por observar que el vector que representa la fuerza aplicada a la caja es un vector $\vec{u}$ de magnitud 20 y dirección 330° como se ilustra en la figura 90.4. Para encontrar las componentes horizontal y vertical de la fuerza, debemos encontrar las componentes horizontal y vertical de $\vec{u}$ en sus componentes canónicas, es decir encontrar a, b tales que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Estas son simplemente las componentes x y y del vector $\vec{u}$ que podemos encontrar como $a = \|\vec{u}\| \cos(330°) \approx 17,32$ y $b = \|\vec{u}\| \sin(330°) \approx 10$.

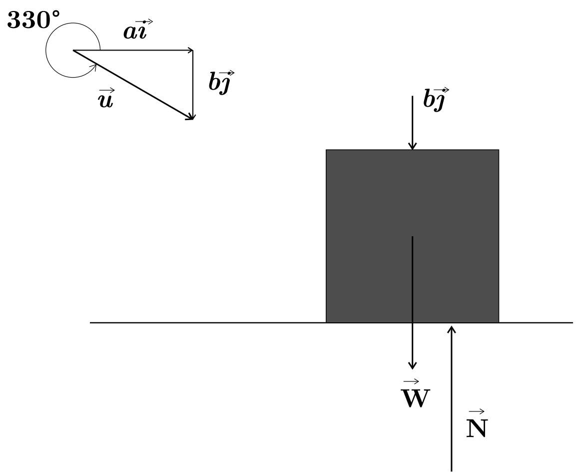


Figura 90.4

(b) Para calcular la aceleración horizontal de la caja, tenemos en cuenta que la componente horizontal de la fuerza es de 17,32 N. Tambien recordamos que

$$\text{fuerza} = \text{masa} * \text{aceleración}.$$

y por tanto la aceleración horizontal está dada por $17,32\,\mathrm{N}/200\,\mathrm{kg} \approx 0,09\,\mathrm{m/s}^2$.

(c) Para responder la última pregunta debemos hacer un balance de fuerzas como el que se observa en la figura 90.4. Verticalmente, tres fuerzas actúan sobre la caja. Por encima, $b\vec{j}$ la componente vertical de $\vec{u}$, empuja a la caja hacia abajo. La fuerza de la gravedad también empuja a la caja hacia abajo con una fueza proporcional a la masa de la caja, que representamos con el vector $\vec{w}$. Estas dos fuerzas deben ser balanceadas por una tercera fuerza $\vec{n}$ que ejerce la superficie donde descanza la caja sobre la caja y que llamamos fuerza normal. Es decir, se debe satisfacer que

$$b\vec{j} + \vec{w} + \vec{n} = \vec{0}.$$

Como se observa en la figura, $\vec{n}$ debe ser hacia arriba y su magnitud debe ser la suma de las magnitudes de $b\vec{j}$ y $\vec{w}$. La magnitud de $b\vec{j}$ es de $10\,\mathrm{N}$ como se calculó en el numeral (a). La magnitud de $\vec{w}$ está dada por la masa de la caja multiplicada por la aceleración de la gravedad $9,81\,\mathrm{m/s}^2$, es decir $200 * 9,81 \approx 1962\,\mathrm{N}$. Por tanto, la magnitud de $\vec{n}$ es de $10 + 1962 = 1972\,\mathrm{N}$.

Ejercicios

1. Un bote que intenta cruzar un río de $50\,\mathrm{m}$ de ancho parte en la orilla Sur a una velocidad con respecto al agua de $10\,\mathrm{km/h}$ directamente hacia el Norte. El río lleva una velocidad de $8\,\mathrm{km/h}$ en dirección Este.
   (a) Ilustre la situación en un dibujo.
   (b) Calcule el tiempo que le toma al bote para cruzar el río
   (c) Calcule la distancia del desplazamiento río abajo causado por el río.
2. Un bote que intenta cruzar un río de $50\,\mathrm{m}$ de ancho parte en la orilla Sur a una velocidad con respecto al agua de $20\,\mathrm{km/h}$ en dirección $20°$ Noreste. El río lleva una velocidad de $5\,\mathrm{km/h}$ en dirección Este.
   (a) Ilustre la situación en un dibujo.
   (b) Calcule el tiempo que le toma al bote para cruzar el río
   (c) Calcule la distancia del desplazamiento río abajo causado por el río.
3. Un nadador quiere cruzar un río que lleva una velocidad de $2\,\mathrm{km/h}$. El nadador sabe que él puede nadar a una velocidad de $3\,\mathrm{km/h}$.
   (a) ¿En que dirección debe nadar para que su desplazamiento sea exactamente perpendicular a la orilla?
   (b) En tal caso, ¿a que velocidad con respecto a la orilla se desplazaría?
   (c) Si el ancho del río es de $0.1\,\mathrm{km}$, ¿cuanto tardaría en cruzarlo si se desplaza perpendicular a la orilla?
4. Una caja de $20\,\mathrm{kg}$ de masa, que se encuentra sobre una superficie horizontal, es empujada por una fuerza constante de $5\,\mathrm{N}$ a un ángulo de $60°$ con respecto al eje horizontal.

(a) Ilustre la situación con un dibujo.

(b) Encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

(c) Calcule la aceleración horizontal de la caja.

(d) Calcule la fuerza normal que ejerce la superficie sobre la caja.

5. Un carro de $1000\,\mathrm{kg}$ de masa, es jalado por una grúa que ejerce una fuerza constante de $50\,\mathrm{N}$ a un ángulo de 45° con respecto al eje horizontal.

   (a) Ilustre la situación con un dibujo.

   (b) Encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

   (c) Calcule la aceleración horizontal del carro.

   (d) Calcule la fuerza normal que ejerce la superficie sobre el carro.

6. Se coloca un objeto que pesa $50\,\mathrm{N}$ sobre una rampa con una inclinación de 30°.

   (a) Halle las componentes del peso paralela y perpendicular a la rampa.

   (b) Halle la magnitud de la fuerza que se requiere para evitar que el objeto baje por la rampa.

Lección 91

Respuestas a ejercicios seleccionados

Lección 1

1. (c) $d = 3$ km, $C = 3\ \pi$ km, $A = 2.25\ \pi$ km^2.
2. (b) $r = 2.5$ m, $C = 5\pi$ m, $A = 6.25\ \pi$ m^2.
3. (b) Se duplica.
4. (c) Se reduce a la cuarta parte.

Lección 2

1. (a) agudo.
   (e) Ninguno de los anteriores.
2. (c) $35°$.
3. (c) $105°$.

Lección 3

2. (a) $h \cong d$.
   (b) $b = 102°40', b \cong g$ por ser ángulos alternos externos.
3. $a = d = e = h = 82°$; $g = f = c = b = 98°$.

Lección 4

1. (a) $b' = 6$
3. (b) $x = 6$, $y = \sqrt{63}$.

Lección 5

1. (d) $a = b = c = 2\sqrt{3}$.

Lección 6

1. (b) $s = 2$, $t = 0$, $u = -3$.
3. (a) $z = \frac{7}{3} = 2.3333\cdots = 2.\overline{3}$, $b = 2$, $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 3$, el período es 3.
6. $100°\ 27'\ 36''$.

Lección 7

1. (b) $a > b$.
3. (d) $(-\infty, 9)$ es el conjunto de los números reales tales que $x < 9$.

6. (a) 1.25.

   (d) 2.00.
7. (b) -12.5.
11. (a) $21°$.
12. 3.1416.

Lección 8

1. $36°$.
2. (a) $\frac{\pi}{6}$ rad.
3. (a) $\frac{3\pi}{10}$ rad.

   (b) $\frac{\pi}{6}$ rad.
4. (b) $\frac{3\pi}{4}$ rad.

   (c) $\frac{5\pi}{6}$ rad.
10. La medida del arco se divide por 3.
12. 5π cm.
14. (a) 200 revoluciones.

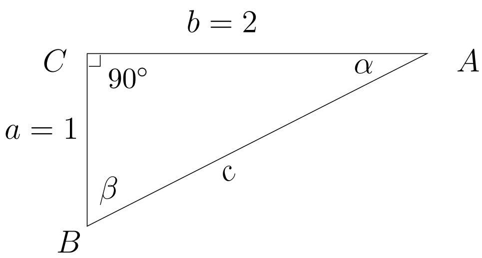
    (b) 10 radianes.

Lección 9

1. $\operatorname{sen} B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan B = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan C = 2$.
6. No es posible porque la longitud de la hipotenusa no puede ser mayor que la longitud de un cateto.

Lección 10

3.



$c = \sqrt{5}$,
$\operatorname{sen} \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

Lección 11

2. $3\sqrt{2}$ m.

3. $x = -1$.

4. $2.5\sqrt{3}$ m.

Lección 12

1. (a) $\alpha \approx 25°$.

   (b) $\beta \approx 51°$.

   (c) $\gamma \approx 41°$.

   (d) $\theta \approx 66°$.

4. $C = 54°$, b$\approx$ 1192 m y a$\approx$ 700 m.

Lección 13

1. 150 m.

3. $B = 65°$, $\quad a \approx 1.6$ m, $c \approx 3.8$ m.

4. La altura mide aproximadamente 136 cm.

7. $\overline{AB}$ mide aproximadamente 19 cm.

Lección 14

1. ≈ 2.3 m.

2. ≈ 219 m.

4. ≈ 9 m.

6. $30(\sqrt{3} - 1)$ m.

Lección 15

1. ≈ 144.3 m.

5. ≈ 309 m.

Lección 16

2. Los puntos con ordenada igual a 2 están sobre una recta horizontal paralela al eje x arriba del eje x y a una distancia de dos unidades con respecto a éste.

4. La ordenada y es el cuadrado de la abscisa x de cada punto P; entonces $y = x^2$.

Lección 17

1. (c) $D_j = \mathbb{R}$, $R_j = (-\infty, 0]$. La gráfica de j aparece en la parte izquierda de la figura 91.1.

   (d) $D_h = \mathbb{R}$, el rango de h es un conjunto cuyo único elemento es el númro real 2: $R_j = \{2\}$. La gráfica de h aparece en la parte derecha de la figura 91.1.

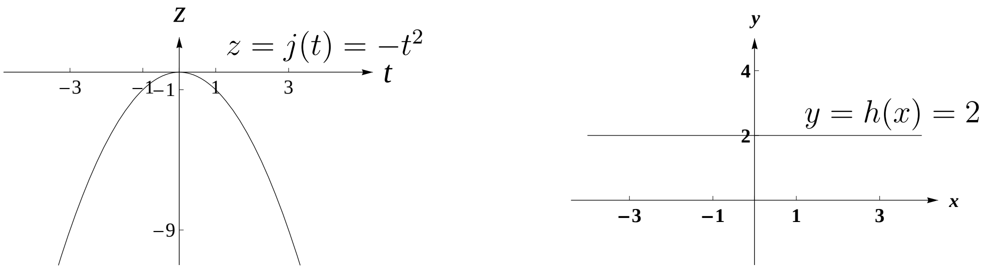


Figura 91.1

3. (b) $y = f(x) = 5x$.

Lección 18

1. (b) $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\}$, $R_{f_2} = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \neq 1\}$. Gráfica parte izquierda de la figura 91.2.

   (c) $D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\}$, $R_{f_3} = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \neq 0\}$. Gráfica parte derecha de la figura 91.2.

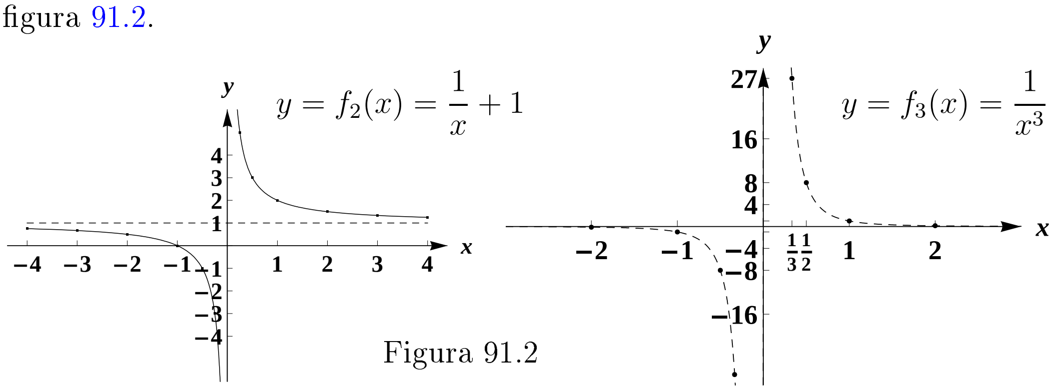


Figura 91.2

2. (b) Falsa.

   (e) Correcta.

Lección 19

1. (d) $D_{g_4} = \mathbb{R}$, $R_{g_4} = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \geq -3\}$. La gráfica de la función g_4 se representa en la parte izquierda de la figura 91.3 con trazo continuo y también la gráfica de $g(x)$ con líneas punteadas.

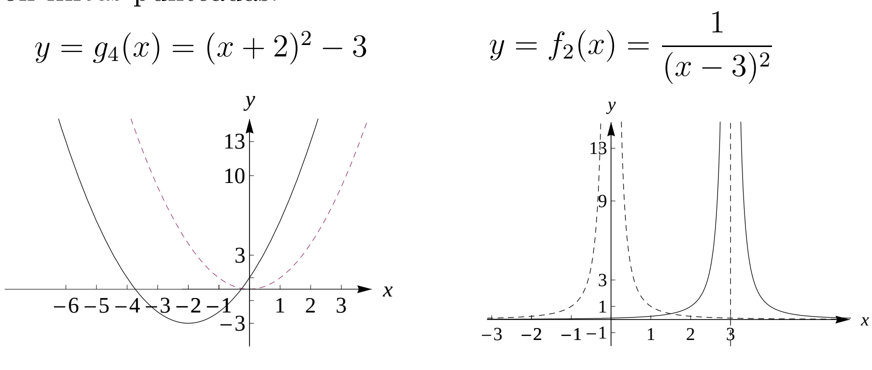


Figura 91.3

2. La función g_4 es una traslación de la función g, 2 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia abajo.

4. (b) $D_{f_2} = \mathbb{R}$, $R_{f_2} = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \geq 0\}$. La gráfica de la función f_2 se presenta en la parte derecha de la figura 91.3 con trazo continuo y la de la función $f(x)$ con líneas punteadas.

Lección 20

1. $\alpha = -\frac{25\pi}{6}$, $\quad \beta = -920°$.

5. El ángulo $\theta = -10\pi$ es un ángulo de 5 vueltas.

7. El ángulo $\theta = 25$ es un ángulo de 3 vueltas.

Lección 21

2. Todas las abscisas son positivas y las ordenadas son negativas.

5. (a) $\frac{\pi}{4}$.

   (c) $\frac{7\pi}{6}$.

6. (a) δ y η son coterminales y están en el cuarto cuadrante.

Lección 22

1. (a) $\operatorname{sen}\alpha_1 = -\frac{4}{5}$; $\cos\alpha_1 = -\frac{3}{5}$, $\tan\alpha_1 = \frac{4}{3}$. Véase el ángulo α_1 en el lado izquierdo de la figura 91.4.

   (e) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$, $\quad \cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\quad \tan\alpha = \frac{12}{5}$, $\quad \cot\alpha = \frac{5}{12}$, $\quad \sec\alpha = -\frac{13}{5}$, $\quad \csc\alpha = -\frac{13}{12}$.

3. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{-12}{13}$; $\tan\alpha = -\frac{5}{12}$; $\sec\alpha = -\frac{13}{12}$; $\cot\alpha = -\frac{12}{5}$.

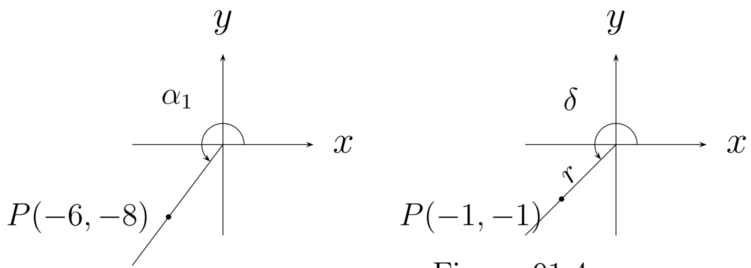


Figura 91.4

Lección 23

1. Véase la representación del ángulo δ en la parte derecha de la figura 91.4. $\operatorname{sen}\delta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\delta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\delta = 1$; $\cot\delta = 1$. $\sec\delta = -\sqrt{2}$; $\csc\delta = -\sqrt{2}$.

2. (e) φ es un ángulo en el tercer cuadrante. Entonces $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$, $\sec\varphi$ y $\csc\varphi$ son negativos. En cambio $\tan\varphi$ y $\cot\varphi$ son positivas.

3. (b) $\operatorname{sen}\beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan\beta = -3$, $\sec\beta = \sqrt{10}$ y $\csc\beta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$.

5. No necesariamente son coterminales. Considere los ángulos $\alpha = 45°$ y $\beta = -45°$.

6. (a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

   (b) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Lección 24

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$ y $\csc\theta = \frac{5}{4}$.
2. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\tan\alpha = \frac{12}{5}$, $\cot\alpha = \frac{5}{12}$, $\sec\alpha = \frac{13}{5}$ y $\csc\alpha = \frac{13}{12}$.
3. $\operatorname{sen}\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\tan\beta = -3$, $\sec\beta = \sqrt{10}$ y $\csc\beta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$.
4. $\operatorname{sen}\gamma = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\tan\gamma = \sqrt{3}$, $\cot\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec\gamma = -2$ y $\csc\gamma = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.
5. $\operatorname{sen}\varphi = \frac{24}{25}$, $\cos\varphi = -\frac{7}{25}$, $\tan\varphi = -\frac{24}{7}$, $\cot\varphi = -\frac{7}{24}$ y $\csc\varphi = \frac{25}{24}$.

Lección 25

1. (b) $\beta = 225°$ y $\beta_R = 45°$. Los ángulos β y β_R se representan en la parte izquierda de la figura 91.5.

   (e) $\phi = \frac{9\pi}{4}$ y $\phi_R = \frac{\pi}{4}$. Los ángulos ϕ y ϕ_R se representan en la parte derecha de la figura 91.5.

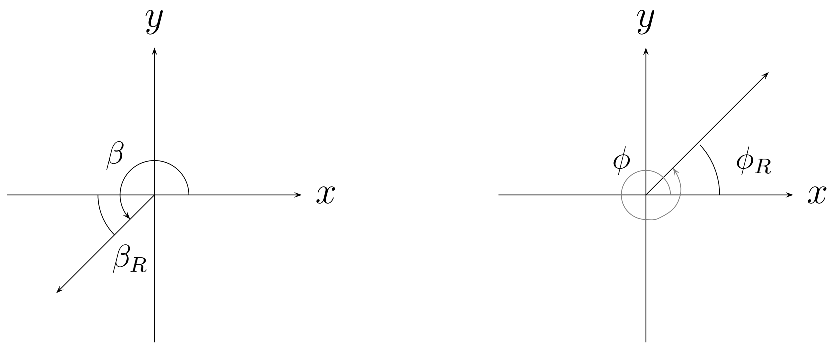


Figura 91.5

2. (c) $u = -750°$ está en el cuarto cuadrante y $u_R = 30°$.

   (e) $w = -\frac{13\pi}{6}$ está en el cuarto cuadrante y $w_R = \frac{\pi}{6}$.

Lección 26

2. (a) $\operatorname{sen}(-750°) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-750°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan(-750°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot(-750°) = -\sqrt{3}$, $\sec(-750°) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\csc(-750°) = -2$.

Lección 27

3. $\sec 450°$ no está definida porque el lado final del ángulo $450°$ está sobre el eje vertical y todas las abcisas de los puntos sobre este eje son iguales a cero.

6. $\cot 11\pi$ no está definida porque el lado final del ángulo 11π está sobre el eje horizontal y todas las ordenadas sobre este eje son iguales a cero.

7. $\operatorname{sen}(-4\pi) = 0$.

Lección 28

4. El ángulo x pertenece al cuarto cuadrante y $\cos x \approx 0.65$.

Lección 29

1. (a) 10 veces.

   (b) Seis rotaciones.

2. (c) La función $z = \operatorname{sen} t$ toma el valor $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en el intervalo $[0, 4\pi]$ en los puntos $t_1 = \frac{\pi}{3}, t_2 = \frac{2\pi}{3}, t_3 = \frac{7\pi}{3}$ y $t_4 = \frac{8\pi}{3}$.

3. (d) Hay dos valores de t: $t_1 = \frac{\pi}{4}$ y $t_2 = \frac{5\pi}{4}$.Observe los puntos de la circunferencia unitaria donde las abscisas y las ordenadas son iguales.

Lección 30

2. El ciclo fundamental de la función $z = \operatorname{sen} t$ se repite 4 veces en la gráfica de la figura 30.3.

5. $(-4\pi, -3\pi)$, $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ y $(4\pi, 5\pi)$.

6. (a) la igualdad $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ se satisface para 8 números reales t en el intervalo dado.

   (b) $t_1 = -4\pi + \frac{\pi}{6}$, $t_2 = -2\pi + \frac{\pi}{6}$, $t_3 = \frac{\pi}{6}$, $t_4 = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, $t_5 = -3\pi - \frac{\pi}{6}$, $t_6 = -\pi - \frac{\pi}{6}$, $t_7 = \pi - \frac{\pi}{6}$ y $t_8 = 3\pi - \frac{\pi}{6}$.

Lección 31

1. (b) En el intervalo dado, $\cos t$ toma su máximo valor en $t_1 = -2\pi$, $t_2 = 0$ y en $t_3 = 2\pi$ y su mínimo valor en $t_1 = -3\pi$, $t_2 = -\pi$, $t_3 = \pi$ y $t_4 = 3\pi$.

4. $(-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

6. (a) Para cuatro valores de t.

   (b) $t_1 = -\frac{5\pi}{3}$, $t_2 = -\frac{\pi}{3}$, $t_3 = \frac{\pi}{3}$ y $t_4 = \frac{5\pi}{3}$.

Lección 32

1. $t_1 = \frac{3\pi}{4}$ y $t_2 = \frac{7\pi}{4}$.

3. (b) 4 números reales.

4. (b) $t_1 = -\frac{4\pi}{3}$, $t_2 = -\frac{\pi}{3}$, $t_3 = \frac{2\pi}{3}$ y $t_4 = \frac{5\pi}{3}$.

Lección 33

2. $t_1 = -\frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{3\pi}{4}$; entre otros.

3. Dos.

5. $t_1 = -\pi$, $t_2 = -2\pi$ y $t_3 = -3\pi$.

7. $t_1 = -\frac{3\pi}{4}$, $t_2 = -\frac{7\pi}{4}$ y $t_3 = -\frac{11\pi}{4}$.

9. Si.

Lección 34

3. $\frac{1}{2}$.
4. $t_1 = -\frac{3\pi}{4}$ y $t_2 = -\frac{7\pi}{4}$.
7. $t_1 = -\frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{3\pi}{2}$ y $t_3 = \frac{7\pi}{2}$.
10. $t_1 = \frac{\pi}{3}$, $t_2 = \frac{5\pi}{3}$, $t_3 = \frac{7\pi}{3}$.

Lección 35

1. (b) Amplitud $A = \frac{1}{3}$, reflexión respecto al eje x, compresión vertical.

   (c) Amplitud $A = 5$, reflexión respecto al eje x, dilatación o alargamiento vertical.

Lección 36

1. A $=\frac{1}{3}$, el período es π y la gráfica se representa en la figura 91.6.

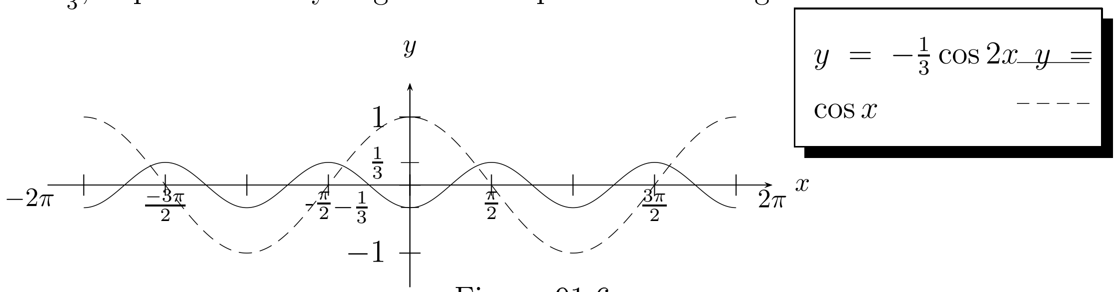


Figura 91.6

5. (a) Amplitud=2, período $\frac{\pi}{3}$, el número de ciclos fundamentales en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ es 12.
7. Máxima caída de voltaje: 156 voltios, frecuencia: 55 ciclos por segundo.

Lección 37

1. (a) $A = 2, p = 2\pi$, frecuencia $\omega = \frac{1}{2\pi}$, desplazamiento de fase $= \frac{\pi}{6}$.

   (f) $A = 1, p = 2$, la frecuencia $\omega = \frac{1}{2}$, el desplazamiento de fase es 1.
2. (e) La gráfica se representa en la figura 91.7.

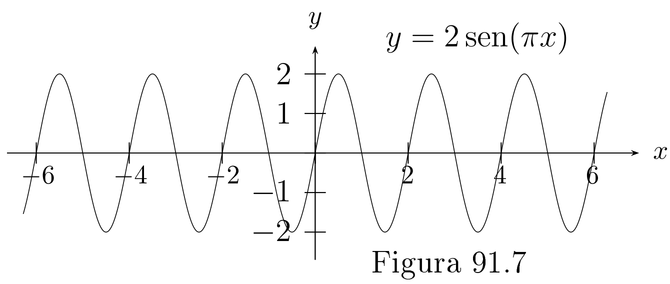


Figura 91.7

Lección 38

1. (a) Amplitud $A = 1$, período: $p = \pi$, desplazamiento de fase $= -\frac{\pi}{2}$, desplazamiento vertical: no hay. La gráfica se representa en la parte izquierda de la figura 91.8.

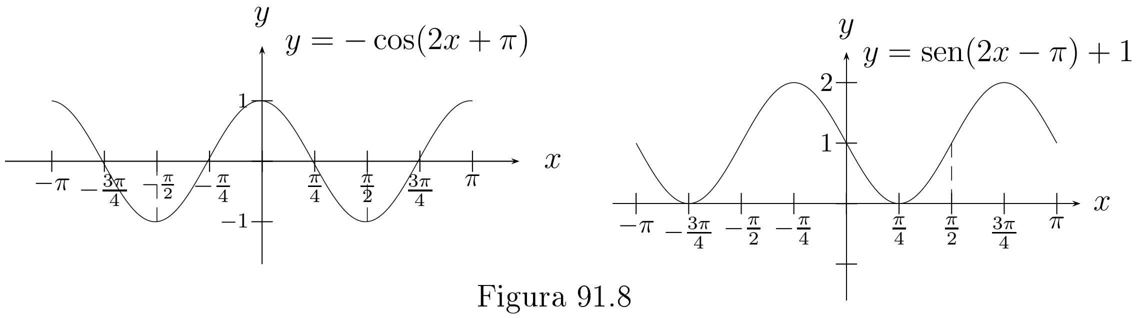


Figura 91.8

.

(b) Amplitud $A = 1$, período: $p = \pi$, desplazamiento de fase $= \frac{\pi}{2}$, desplazamiento vertical: una unidad hacia arriba. La gráfica se representa en la parte derecha de la figura 91.8.

(c) Amplitud $A = 2$, período: $p = \pi$, desplazamiento de fase $= \pi$, desplazamiento vertical: una unidad hacia abajo. La gráfica se representa en la figura 91.9.

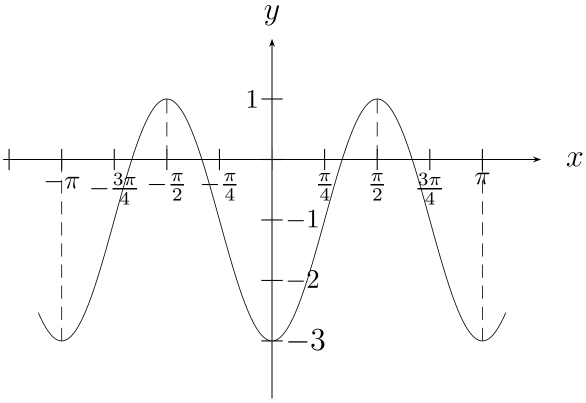


Figura 91.9

2. Período $= 365$ dias, amplitud $A = 6$, desplazamiento de fase 10, desplazamiento vertical 20, máxima temperatura $= 26$ grados centígados y ocurre el 10 de enero, mínima temperatura 14 grados centígrados, ocurre el día $t = 192.5$ del año.

4. (a) 0.78 litros.

   (b) 0.02 litros.

   (c) 4 segundos.

   (d) 15 inhalaciones por minuto.

Lección 39

2. $\operatorname{sen} t = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos t = \frac{1}{3}$, $\tan t = -2\sqrt{2}$, $\cot t = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\csc t = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

5. $\cos t = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\tan t = -\frac{\sqrt{6}}{12}$, $\cot t = -2\sqrt{6}$, $\sec = -\frac{5\sqrt{6}}{12}$, $\csc t = 5$.

Lección 40

1. 1.
2. $1 + \cos^2 x$.
3. $\operatorname{sen} x$.
4. $1 - \operatorname{sen} y$.
5. $\csc u$.

Lección 41

2. (a) No es una identidad. Reemplace por ejemplo el valor $x = 1$.
   (b) Si es una identidad.

Lección 43

2. (a) No.
   (b) Si.
   (c) Si.
3. (d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Lección 44

2. (a) $3\operatorname{sen}(x) - 4\operatorname{sen}^3(x)$.
   (b) $8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.

Lección 45

1. (a) $\sqrt{2}/2$.
   (b) $\sqrt{2}/2$.
   (c) $\sqrt{3}/2$.
2. Imitar procedimiento en la lección.
3. $\cos s - \cos t = 2\sin\left(\frac{s+t}{2}\right)\sin\left(\frac{-s+t}{2}\right)$
4. (a) 1.
   (b) $\sqrt{2}/2$.
   (c) 0.

Lección 46

Verifique las identidades.

Lección 47

2. (a) No es una identidad. Reemplace por ejemplo $x = -4$ en ambos lados de la igualdad.

   (b) No es una identidad. Reemplace por ejemplo $x = \frac{5\pi}{2}$ en ambos lados de la igualdad.

Lección 48

3. (a) $\operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\tan \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Lección 49

1. (a) $b = 52.1843$.

   (b) $a = 57.1728$.

2. $c = 2.2913$

Lección 50

1. Aproximadamente 23.0876 kilómetros.

2. 2179.3461 kilómetros.

Lección 52

1. 1676.92 m

2. Ancho del río: 604.48 m y altura del peñasco: 196.41 m.

Lección 53

1. Existen dos triángulos: $C = 53.36°$, $B = 89.64°$, $b = 49.85$ y $C' = 126.64°$, $B' = 16.36°$ y $b' = 14.04$.

3. $B = 38.76°$, $A = 86.24°$ y $a = 765$.

5. $C = 77°$, $b = 23.79$ y $a = 14.72$.

Lección 54

1. (c) $\theta = \frac{\pi}{4} + k\ \pi$ y $\theta = -\frac{\pi}{4} + k\ \pi$, para todo k en el conjunto de los números enteros.

   (d) $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, para todo k en el conjunto de los números enteros

   (e) $w = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, para todo k en el conjunto de los números enteros.

2. $z = 30° + 360°\ k$ y $z = 330° + 360°\ k$, para todo k en el conjunto de los números enteros.

Lección 55

1. $t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{5\pi}{3}$ y $t = \pi$.

2. $t = 180°$.

3. $t = 2k\pi$, $t = \pi + 2k\pi$, $\quad t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ y $\quad t = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, para todo número entero k.

4. $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{3\pi}{2}$.

Lección 56

1. $t = 0$ y $t = \frac{3\pi}{2}$.

2. (a) $t = \frac{\pi}{2}$.

   (b) $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $\quad t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ y $t = \pi + 2k\pi$, para todo entero k.

   (c) $t = \frac{\pi}{6}$, $\quad t = \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ y $\quad t = \frac{3\pi}{2}$.

Lección 57

1. $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, para todo entero k,
   $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, para todo entero k.

2. $w = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $w = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, para todo entero k.

3. $t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $t = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $t = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $t = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k.

4. $z = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $z = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, para todo entero k.

5. $x = k\pi$, para todo entero k.

6. $x = -\dfrac{\pi}{2}$, para todo entero k.

7. $t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $t = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k.

8. $y = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $y = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, para todo entero k,
   $y = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$, para todo entero k.

Lección 59

1. $\sqrt{3}x - y = 1 + 3\sqrt{3}$
2. (a) $m = \frac{3}{5}$ y $b = -2$.
   (b) $m = -\frac{4}{3}$ y $b = 6$.
   (c) $m = -3$ y $b = 7$.
   (d) $m = \frac{2}{3}$ y $b = -\frac{5}{3}$.
3. (a) $x + y - 2 = 0$.
   (b) $2x - 3y + 12 = 0$.
   (c) $3x - y - 2 = 0$.
   (d) $5x - 7y - 22 = 0$.
   (e) $x - y - 1 = 0$.
   (f) $4x - 7y = 6$.
   (g) $4x + 9y - 11 = 0$.
   (h) $x + 2y - 4 = 0$.
   (i) $7x + 2y - 14 = 0$.

Lección 60

1. (a) $\frac{6}{5}$. (b) $\frac{14}{5}$.
2. (a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$. (b) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$.

Lección 61

1. $y = \frac{4}{7}x + \frac{15}{7}$.
2. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
3. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
4. $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$.

Lección 62

1. (a) $y = -\frac{2}{3}x + 6$.
   (b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.
   (c) $y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{12}$.
   (d) $y = -2$.
   (e) $x = -3$.
   (f) $y = 3$.

(g) $x = -1$.

4. (a) No.
   (b) Si.
   (c) No.
   (d) No.
5. $a = 2$.
6. $a = -2$.

Lección 63

1. (a) $y = \frac{3}{2}x + 6$.
   (b) $y = -2x + \frac{1}{3}$.
   (c) $y = -\frac{7}{4}x - \frac{5}{2}$.
   (d) $y = -\frac{7}{5}x + \frac{34}{5}$.
   (e) $y = 2x + 5$.
   (f) $y = -3x + \frac{7}{3}$.
   (g) $x = 1$.
   (h) $y = 0$.
   (i) $x = -2$.
   (j) $y = -5$.
   (k) $y = 3$.
3. $a = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Lección 64

4. (a) $\theta = 45°$.
   (b) $\theta \approx 65.71°$.
   (c) $\theta \approx 67.62°$.
   (d) $\theta \approx 77.47°$.
   (e) $\theta = 0°$.
   (f) $\theta = 90°$.

Lección 65

2. (a) Paralelas.
   (b) Coincidentes. $\theta = 0°$.

(c) Perpendiculares. $\theta = 90°$.

(d) Paralelas.

(e) Coincidentes. $\theta = 0°$.

(f) Se cortan en un punto. $\theta \approx 84.37°$.

(g) Paralelas.

(h) Perpendiculares. $\theta = 90°$.

(i) Paralelas.

(j) Coincidentes. $\theta = 0°$.

(k) Paralelas.

(l) Se cortan en un punto. $\theta = 45°$.

Lección 66

1. Centro $(0, 0)$, radio 12, interceptos con el eje x $(12, 0)$ y $(-12, 0)$, interceptos con el eje y $(0, 12)$ y $(0, -12)$.
2. $x^2 + y^2 = \frac{625}{4}$.
3. $x^2 + y^2 = 25$.
4. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Lección 67

3. $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 65$.
4. La ecuación de la circunferencia es $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 75$, su centro es el punto $(-4, 3)$ y su radio es $\sqrt{75}$.
5. La ecuación de la circunferencia es $(x - 2)^2 + (y + 9)^2 = 9$.
7. $x^2 + (y - 3)^2 = 100$

Lección 68

1. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
2. $x^2 + y^2 = 16$.
3. $(x + 4)^2 + y^2 = 625$.
4. $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 16$.
5. $x^2 + (y - 1)^2 = 100$.

Lección 69

1. (a) $(7, 13)$.

   (b) $(15, 9)$.

(c) $(-3,-7)$.

(d) $(-19,10)$.

2. $5x' - 4y' = 86$.
3. $(x')^2 + (y')^2 - 9 = 0$.
4. El sistema de coordenadas $x'y'$ tiene centro en el punto $(-4,1)$ y la ecuación en el sistema $x'y'$ es $2(x')^2 - 3(y')^2 - 6 = 0$.

Lección 70

1. La ecuación es $y = 2x^2$.
2. La directriz es $y = 1/100$, y el foco es $(0, \frac{-1}{100})$.
3. La directriz es $y = -4$, y el foco es $(0,4)$

Lección 71

1. (a) $y = \frac{1}{12}x^2$.

   (b) $y = \frac{-1}{4}x^2$.
2. La directriz está dada por la ecuación $x = -4$.
3. El foco está ubicado en $(0,-5)$.
4. La directriz está dada por la ecuación $x = -4$.

Lección 72

1. $x = -4y^2$.
2. El foco es $(-1/12, 0)$, la directriz es $x = 1/12$, y los extremos del lado recto son $(-1/12, -2/12)$ y $(-1/12, 2/12)$.
3. Los puntos son $(0,0)$ y $(-1/2, 1/2)$.

Lección 73

1. (a) $y = x^2 + 2$.

   (b) $x + 1 = \frac{-1}{8}y^2$
2. $x = 0$.
3. $(2,-8)$.
4. $(-2-2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$ y $(-2+2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$.

Lección 75

1. $\frac{x^2}{58} + \frac{y^2}{49} = 1$.
2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$.
3. Los focos son los puntos $(\sqrt{12}, 0)$ y $(-\sqrt{12}, 0)$.

4. Los focos son los puntos $(3,0)$ y $(-3,0)$.

Lección 76

1. Los vértices de la elipse son los puntos $(\sqrt{20},0)$ y $(-\sqrt{20},0)$. Los focos de la elipse son los puntos $(2,0)$ y $(-2,0)$.

2. $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1$.

3. Los principales elementos de la elipse son los siguientes: Los vértices son los puntos $(-7,0)$ y $(7,0)$, el centro es el punto $(0,0)$, los focos son los puntos $(\sqrt{24},0)$ y $(-\sqrt{24},0)$ y los extremos del eje menor son $(0,-5)$ y $(0,5)$. La ecuación del eje focal es $y=0$. La ecuación del eje normal es $x=0$.

5. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Lección 77

2. $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{20}=1$.

3. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$.

4. $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

5. La ecuación de la elipse es $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{\frac{25}{16}}=1$. Sus focos son los puntos $(0,\frac{\sqrt{119}}{4})$, $(0,\frac{-\sqrt{119}}{4})$, los vértices son los puntos $(0,3)$, $(0,-3)$ y los extremos del eje menor son los puntos $(5/4,0)$, $(-5/4,0)$.

Lección 78

2. $\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$.

4. La ecuación de la elipse es $\frac{(x+1)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$. Los principales elementos de la elipse son los siguientes: centro $(-1,2)$, los vértices de la elipse son los puntos $(-9,2)$ y $(7,2)$, los focos son los puntos $(-\sqrt{48}-1,2)$ y $(\sqrt{48}-1,2)$, los extremos del eje menor son $(-1,6)$ y $(-1,-2)$. La ecuación del eje focal es $y=2$ y la ecuación del eje normal es $x=-1$.

5. La ecuación de la elipse es $\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(y-4)^2}{100}=1$.

6. Los principales elementos en el sistema de coordenadas $x'y'$ son los siguientes: centro $(0,0)$, los vértices son los puntos $(12,0)$ y $(-12,0)$, los focos son los puntos $(-\sqrt{95},0)$ y $(\sqrt{95},0)$, los extremos de eje menor son $(0,-7)$ y $(0,7)$. La ecuación del eje focal $y'=0$ y la ecuación del eje normal es $x'=0$.

Lección 79

1. (a) $(-\sqrt{5},0)$ y $(\sqrt{5},0)$.
   (b) $(-\sqrt{13},0)$ y $(\sqrt{13},0)$.
   (c) $(-4,0)$ y $(4,0)$.
   (d) $(-\sqrt{10},0)$ y $(\sqrt{10},0)$.

2. (a) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

   (b) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{84}=1$.

   (c) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

Lección 81

1. (a) Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\dfrac{3}{4}x$.

   (b) Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{11}=1$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\dfrac{\sqrt{11}}{5}x$.

   (c) Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{y^2}{64}-\dfrac{x^2}{36}=1$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

2. (a) Vértices: $(-\sqrt{8},0)$ y $(\sqrt{8},0)$. Focos: $(-\sqrt{13},0)$ y $(\sqrt{13},0)$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}x$.

   (b) Vértices: $(0,-3)$ y $(0,3)$. Focos: $(0,-4)$ y $(0,4)$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{7}}x$.

3. Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{(3/2)^2}=1$. Vértices: $(-2,0)$ y $(2,0)$. Focos: $(-\dfrac{5}{2},0)$ y $(\dfrac{5}{2},0)$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\dfrac{3}{4}x$.

4. Focos: $(0,-5)$ y $(0,5)$. Vértices: $(0,-\dfrac{10}{\sqrt{13}})$ y $(0,\dfrac{10}{\sqrt{13}})$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\dfrac{2}{3}x$. Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{y^2}{(100/13)}-\dfrac{x^2}{(225/13)}=1$.

Lección 82

1. (a) Ecuaciones de las asíntotas: $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{34}{3}$ y $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3}$. Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-4)^2}{9}-\dfrac{(y+6)^2}{16}=1$.

   (b) Ecuaciones de las asíntotas: $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x+\dfrac{6}{\sqrt{5}}-9$ y $y=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}x-\dfrac{6}{\sqrt{5}}-9$. Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(y+9)^2}{4}-\dfrac{(x+3)^2}{5}=1$.

2. (a) Vértices: $(-3,-2)$ y $(9,-2)$. Focos: $(3-\sqrt{61},-2)$ y $(3+\sqrt{61},-2)$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{9}{2}$ y $y=-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{2}$. Ecuación de la hipérbola:

$\dfrac{(x-3)^2}{36}-\dfrac{(y+2)^2}{25}=1.$

(b) Vértices: $(-4,-1/2)$ y $(-4,5/2)$. Focos: $(-4,1-\sqrt{85/16})$ y $(-4,1+\sqrt{85/16})$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\dfrac{6}{7}x+\dfrac{31}{7}$ y $y=-\dfrac{6}{7}x-\dfrac{17}{7}$. Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(y-1)^2}{(3/2)^2}-\dfrac{(x+4)^2}{(7/4)^2}=1.$

3. Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x+6)^2}{69-5\sqrt{65}}-\dfrac{(y+7)^2}{-20+5\sqrt{65}}=1.$

Lección 83

1. (a) Elipse.
   (b) Parábola.
   (c) Hipérbola.
   (d) Elipse.
   (e) Elipse.

2. (a) $AC<0$ y $F-\dfrac{D^2}{4A^2}-\dfrac{E^2}{4C^2}=0.$
   (b) $A=C=0.$
   (c) $A=C=D=0$ ó $A=C=E=0.$

Lección 86

1. (a) $a=\pm 2$ y $b=0$ o $b=\pm 3.$
   (b) $a=4$ y $b=3$ o $a=6$ y $b=2.$

3. (a) $\alpha=\frac{84}{33}$ y $\beta=\frac{-19}{11}.$
   (b) $\alpha=\beta=0.$

Lección 87

1. (a) $\text{dir}(\alpha X)=\text{dir}(X)$ y $\|\alpha X\|>\|X\|.$
   (b) $\text{dir}(\alpha X)=\text{dir}(X)$ y $\|\alpha X\|<\|X\|.$
   (c) $\text{dir}(\alpha X)=\text{dir}(X)+180^\circ$ y $\|\alpha X\|<\|X\|.$
   (d) $\text{dir}(\alpha X)=\text{dir}(X)+180^\circ$ y $\|\alpha X\|>\|X\|.$

2. (a) $\|Z\|=\sqrt{257}$ y $\text{dir}(Z)=\arctan 16.$
   (b) $\lambda=\pm\dfrac{9}{13}.$
   (c) La distancia entre los vectores U y V es $\sqrt{74}$ unidades.

Lección 88

1. (a) $(x, y) = t(-1, 1)$.
   (b) $(x, y) = (2, -1) + t(0, 1)$.
   (c) $(x, y) = (0, 3) + t(3, 1)$.
   (d) $(x, y) = (3, 1) + t(1, 0)$.
   (e) $(x, y) = (-1, 1) + t(3/2, 1)$.
   (f) $(x, y) = (1, 2) + t(-1, 3)$.
   (g) $(x, y) = (1/2, 1/2) + t(-1, 1)$.
   (h) $(x, y) = (-1, -2) + t(1/2, 1)$.
   (i) $(x, y) = (1/3, -4/3) + t(1/3, 1)$.
2. (a) $(-2, -1)$, $(8, 4)$, $(18, 9)$.
   (b) $(x, y) = (8, 4) + t(5, 5/2)$.
   (c) $(-4, -2)$.
   (d) $y = 1/2 \cdot x$.
3. (a) $(x, y) = t(1, 2)$.
   (b) $(1/2, 1)$.
   (c) $y = 2x$.
   (d) $\begin{cases} x = 51t \\ y = 102t \end{cases}$.
   (e) si, no, si.

Lección 89

1. (a) $(x, y) \cdot (-2, 2) = (0, 0) \cdot (-2, 2)$.
   (b) $(x, y) \cdot (1, 0) = (2, -1) \cdot (1, 0)$.
   (c) $(x, y) \cdot (1, -3) = (0, 3) \cdot (1, -3)$.
   (d) $(x, y) \cdot (-1, 3) = (1, 2) \cdot (-1, 3)$.
   (e) $(x, y) \cdot (-1, 1) = (1/2, 1/2) \cdot (-1, 1)$.
   (f) $(x, y) \cdot (-1, 1/2) = (-1, -2) \cdot (-1, 1/2)$.
   (g) $(x, y) \cdot (2, -1) = (0, -5/3) \cdot (2, -1)$.
   (h) $(x, y) \cdot (-7, 3) = (-1, 1) \cdot (-7, 3)$.
2. (a) $-x + 2y + 6 = 0$
   (b) $(x, y) = (0, -3) + t(-2, -1)$

3. (a) $-2x+2y=0$
   (b) $x-3y+9=0$
   (c) $-x+y=0$

Lección 90

1. (a) .
   (b) 18 seg.
   (c) 40 m.
2. (a) .
   (b) 9.58 seg.
   (c) 32 m.
3. (a) 41.8° con respecto a la perpenducular a la orilla.
   (b) 2.24 km/h.
   (c) 16 seg.
4. (a) .
   (b) Horizontal: 2.5 N, Vertical: 4.33 N.
   (c) $0.125\,\mathrm{m/s^2}$.
   (d) 200.33 N.
5. (a) .
   (b) Horizontal: 32.1 N, Vertical: 38.9 N.
   (c) $0.032\,\mathrm{m/s^2}$.
   (d) 9762 N.
6. (a) Paralelo: 25 N, Perpendicular: 43.3 N.
   (b) 25 N.

Bibliografía

[AO] C. Allendoerfer, C. Oakley, *Matemáticas universitarias*, cuarta edición, Editorial McGraw-Hill, 1990.

[B] A. Baldor, *Geometría plana y del espacio, con una introducción a la Trigonometría*, Ediciones y distribuciones Códice, S. A., Madrid, 1967.

[BA] R. Barnett, M. Ziegler, K. Byleen, D. Sobecki, *Analytic Trigonometry with Applications*, 10th edition, John Wiley & Sons, Inc., 2009.

[G] A. Goodman, L. Hirsch, *Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica*, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1996.

[Gue] A. B. Guerrero, *Geometría: Desarrollo Axiomático* , Ecoe Ediciones, Bogotá, 2006.

[L] L. Leithold, *Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica*, Editorial Harla, S.A., México, 1994.

[S] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson, *Precálculo, Matemáticas para el Cálculo*, quinta edición, Editorial Cengace Learning, 2007.

[SL] M. Sullivan, *Trigonometría y Geometría Analítica*, cuarta edición, Editorial Prentice Hall Hispanoaméricana, S.A., México, 1997.

[SW] E. Swokowski, J. Cole, *Álgebra y trigonometría, con Geometría analítica.*, décima edición, Editorial Thomson, 2002.

[ZD] D. Zill, J. Dewar, *Precálculo*, cuarta edición, Editorial McGraw-Hill, 2008.

Tabla de funciones Trigonométricas

Grados	**Seno**	**Coseno**	**Tangente**	**Cotangente**	**Secante**	**Cosecante**	**Grados**
0		1.000	0	− − −	1.0000	− − −	90
1	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	1.0002	57.2987	89
2	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	1.0006	28.6537	88
3	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	1.0014	19.1073	87
4	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	1.0024	14.3356	86
5	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	1.0038	11.4737	85
6	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84
7	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.0075	8.2055	83
8	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82
9	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81
10	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80
11	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79
12	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78
13	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77
14	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76
15	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75
16	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74
17	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73
18	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72
19	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71
20	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70
21	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69
22	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68
23	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67
24	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66
25	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65
26	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64
27	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63
28	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62
29	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61
30	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60
31	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59
32	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58
33	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57
34	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56
35	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55
36	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54
37	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53
38	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52
39	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51
40	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50
41	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49
42	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48
43	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47
44	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46
45	0.7071	0.7071	1.000	1.0000	1.4142	1.4142	45
Grados	**Coseno**	**Seno**	**Cotangente**	**Tangente**	**Cosecante**	**Secante**	**Grados**

Tabla 91.1

Índice