Red Matemática Antioquia

Antioquia la más educada

Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las matemáticas en Antioquia

2012 - 2015

facebook.com/RedMatematicaAntioquia
@redmatematicant
redmatematica@antioquia.gov.co

Gobernación de Antioquia
Sergio Fajardo Valderrama
Gobernador de Antioquia
Felipe Andrés Gil Barrera
Secretario de Educación de Antioquia
Horacio Arango Marín
Director Red Matemática Antioquia
Asesor Secretaria de Educación de Antioquia
Duqueiro Antonio Espinal Chavarría
Subsecretario para el Mejoramiento de la Calidad Educativa.
Adriana Toro
Subsecretaria Administrativa
María Isabel Castro Roldán
Asesora Red Matemáticas Antioquia
Sociedad Colombiana de Matemáticas
Coordinación Plan de Mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en Antioquia.
Carlos Hernando Montenegro Escobar
Presidente
Jaime A Amaya G
Representante Sociedad Colombiana de Matemáticas en Medellín
Andrés García Pérez
Director Ejecutivo

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
Escuela de Matemáticas
Coordinación Académica
Ignacio Mantilla Prada
Rector
Carlos Alfredo Salazar Molina
Vicerrector Sede Medellín
Luis Alfonso Vélez Moreno
Decano Facultad de Ciencias Sede Medellín
John Bayron Baena Giraldo
Director Escuela de Matemáticas
Equipo Editorial
Jorge Cossio Betancur
Jorge Enrique Mejía Laverde
Diego Mejía Duque
Débora María Tejada Jiménez
Revisión de Texto
Débora María Tejada
Diagramación
John Bayron Baena Giraldo
Bibiana López Rodríguez
Mauricio Andrés Osorio Lema
Pre Cálculo

Diseño de carátula: Alejandro Arango Lince
ISBN:
Primera edición: marzo de 2015
Impreso y hecho en Medellín, Colombia

Hecho el depósito legal.

PRECÁLCULO

Guías de clase para 90 lecciones

Autores

Hugo Javier Arbeláez P.

John Bayron Baena G.

Eddye Alejandro Bustamante M.

Beatriz Elena Correa R.

Bibiana López R.

Luz Elena Muñoz S.

Mauricio Andrés Osorio L.

Carlos Augusto Vélez L.

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

Tabla de Contenido

Lección **Página**

Página

Prólogo

Uno de los objetivos de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (SCM) es el mejoramiento de la enseñanza y la difusión de las Matemáticas en nuestro medio. Teniendo presente este objetivo, la Gobernación de Antioquia invitó a la SCM a diseñar un plan de trabajo para mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el departamento de Antioquia. Las razones de esta invitación se ven reflejadas en los resultados en el área de Matemáticas de las pruebas SABER (mayo de 2012) y de los exámenes de admisión de la Universidad de Antioquia (mayo de 2012), y en los resultados de la Prueba de Matemáticas de Antioquia (Olimpiadas del Conocimiento, julio de 2012): la nota promedio en Matemáticas, considerando estos tres exámenes, fue de 1.9 sobre 5.

Con el fin de enfrentar el problema del bajo nivel matemático de los estudiantes de los últimos grados de la educación secundaria en el departamento de Antioquia, la SCM diseñó el "Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en las instituciones educativas de Antioquia". Este texto, que llega hoy a sus manos, es uno de los muchos productos que el Plan quiere entregarle a Antioquia y hace parte de una colección de cinco textos, dedicados a las guías de clase para 90 lecciones, en las áreas de Precálculo, Álgebra, Trigonometría-Geometría Analítica, Geometría Euclidiana y Aritmética. Los textos de la colección fueron escritos para ayudarles a los maestros en la preparación de sus clases.

Las Matemáticas son como un edificio. Para que el edificio se sostenga firmemente es necesario que tenga buenas bases. Los conceptos elementales que se recogen en los textos de esta colección son las bases que debe haber construido, con ayuda de sus maestros, un alumno de secundaria que aspire a entrar a la Universidad. Se observará que en ellos se ha tratado de describir en detalle los pasos a seguir en cada tema, ejercicio o problema propuesto. Pensamos, basados en nuestra propia experiencia, que ésta es una buena manera de dictar una clase de Matemáticas. Volviendo a la analogía inicial, así como un muro del edificio se construye poco a poco colocando cada uno de los ladrillos que lo componen, la solución de un ejercicio o problema matemático es una sucesión ordenada de pasos lógicos y coherentes. Si en la construcción del muro faltan ladrillos o hay ladrillos mal colocados es muy posible que el muro se derrumbe. Si en la solución de un problema matemático los pasos están mal concatenados o faltan pasos, probablemente la solución sea incorrecta.

Así como un deportista debe dedicar muchas horas diarias a su entrenamiento, para poder soñar con triunfar, si queremos mejorar nuestra comprensión de las Matemáticas es necesario repasar lo mismo muchas veces, aunque parezca monótono y repetitivo, de esta forma podremos enfrentar con mayor lucidez la construcción del edificio de las Matemáticas.

Finalmente es importante señalar que estos textos no pretenden ser un tratado de Pedagogía. Más bien constituyen un conjunto articulado de conocimientos matemáticos que un docente de secundaria puede enseñar de manera efectiva con el uso de los saberes pedagógicos adquiridos en su formación académica. Responden entonces estos textos a nuestra convicción de que si se quiere enseñar bien algo no son suficientes ni las estrategias pedagógicas utilizadas ni el uso de las nuevas tecnologías informáticas, es indispensable tener previamente un conocimiento sólido de la materia que queremos enseñar.

Carlos Montenegro
Presidente, Sociedad Colombiana de Matemáticas

Prefacio

Mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre es un reto. Los conceptos matemáticos básicos tienen cierto grado de complejidad y en consecuencia es crucial que los textos matemáticos que se escriban para apoyar el proceso de su enseñanza y aprendizaje usen un lenguaje claro que concentre su atención en los aspectos realmente importantes de estos conceptos y facilite su comprensión.

El presente texto es un conjunto de guías de clase en Precálculo para los maestros de la educación secundaria del Departamento de Antioquia, dentro del programa "Antioquia la más Educada", liderado por el Gobernador Sergio Fajardo Valderrama. Consideramos que estas guías constituyen una síntesis del material que es indispensable presentar en el aula de clase por parte del maestro. De allí que la exposición hecha en ellas de las nociones matemáticas básicas, que deben ser del conocimiento de todo bachiller antes de su ingreso a la universidad, sea lo más clara posible. Para alcanzar este objetivo hemos reducido la terminología matemática a la estrictamente necesaria y hemos prescindido de temas accesorios, que consideramos no son esenciales para la formación matemática de los estudiantes y que por el contrario pueden despertar en ellos un rechazo al estudio de las Matemáticas. Insistimos en que la función principal de este material es, de una parte, ayudarle al docente en su tarea cotidiana de preparación de clases, y de otra, brindarle al estudiante un resumen de los conocimientos mínimos que debe tener sobre la materia. Es por ello que en lugar de hablar de libro o de texto hemos preferido usar la palabra "guías" para referirnos a este material. En la bibliografía los lectores encontrarán libros y textos que les permitirán complementar el conocimiento básico que les brindan estas guías. Finalmente tenemos la esperanza de que las guías de clase, que hoy ponemos a consideración de los lectores, mejoren su percepción de la importancia de las Matemáticas y de su inmenso poder en la solución de problemas concretos, tanto de las ciencias naturales como de la vida cotidiana.

Comité Editorial

Introducción

En nuestra experiencia como profesores universitarios, hemos observado que los temas de matemáticas necesarios para el estudio de Cálculo no son comprendidos por nuestros estudiantes. Motivados por la anterior consideración quisimos dedicar estas guías de Precálculo al estudio de estos temas.

Comenzamos el contenido de las guías repasando conceptos básicos y resultados básicos de Geometría Euclidiana: ángulos, triángulos, semejanza de triángulos, figuras planas, el Teorema de Pitágoras, y volúmenes y áreas de cuerpos geométricos . A continuación recordamos las nociones básicas de conjuntos y sistemas numéricos, los números reales, intervalos, valor absoluto y algunas de sus propiedades. Posteriormente se estudian diferentes temas de Álgebra: potenciación, radicación, expresiones algebraicas, ceros de polinomios, factorización, el Teorema del binomio, expresiones fraccionarias, ecuaciones lineales y cuadráticas, y desigualdades. A continuación, se introduce el concepto de función y se presenta un estudio detallado que incluye gráficas, funciones definidas por tramos, transformaciones de funciones, funciones inversas, exponenciales y logarítmicas. Finalmente se repasan los conceptos y técnicas elementales de Trigonometría: funciones trigonometricas, gráficas, identidades, Ley del Seno, Ley del Coseno, y ecuaciones trigonométricas. A lo largo de las guías se presentan ejemplos de aplicaciones a problemas concretos.

Estas guías fueron preparadas, en su primera versión, por los profesores Hugo Arbeláez, Eddye Bustamante, Beatriz Correa y Luz Elena Muñoz. Posteriormente, el profesor John Bayron Baena introdujo cambios en el formato de los archivos que facilitaron la preparación del presente material.

Finalmente queremos expresar que la presente guía hace parte del *Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en los colegios de Antioquia* y puede ser usado como material didáctico para cursos de matemáticas en los colegios del departamento.

Los autores

Lección 1

Ángulos I

Conceptos básicos

Nuestro estudio de la Geometría parte de las nociones de **punto**, **línea recta** y **plano**, conceptos que serán aceptados como ideas intuitivas y no serán definidos, a pesar de que serán usados para definir otros términos. Utilizaremos su representación gráfica y los denotaremos usando letras mayúsculas. Una recta y un plano son conjuntos especiales de puntos.

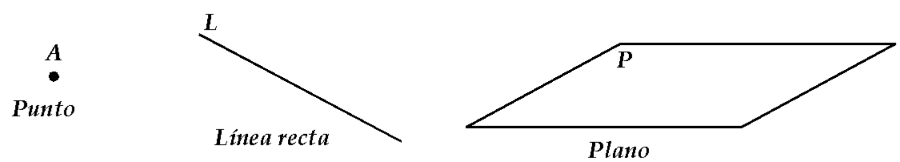


Figura 1.1

- Por dos puntos distintos pasa una y sólo una línea recta.
- Se dice que tres puntos distintos son **colineales** si están sobre una misma línea recta.

Otros conceptos básicos

Si L es una línea recta y A y B son dos puntos distintos sobre ella, podemos hablar también de la recta AB.

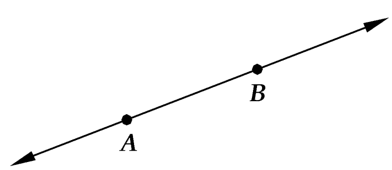


Figura 1.2

Llamamos **segmento** $\overline{AB}$ y **rayo** $\overrightarrow{AB}$ (o semirrecta $\overrightarrow{AB}$, o rayo R) a los siguientes conjuntos:

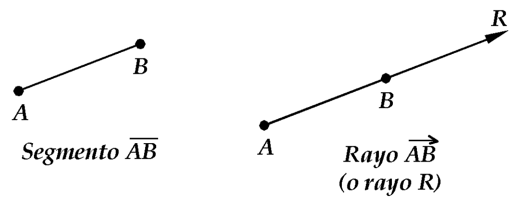


Figura 1.3

Los segmentos se miden en unidades de longitud. Decimos que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si tienen la misma longitud y en este caso escribimos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Ángulos

Un **ángulo** es la abertura formada por dos rayos (o semirrectas) que tienen un extremo común. En realidad, dos rayos R_1 y R_2 que tienen un extremo común O dan lugar a dos ángulos (α y β), como se puede ver en la figura. Sin embargo, cuando hablemos del ángulo formado por dos rayos nos referiremos, en general, al ángulo de menor abertura (α). Cada uno de los rayos R_1 y R_2 se denomina **lado del ángulo** y el extremo común O se conoce como **vértice del ángulo**.

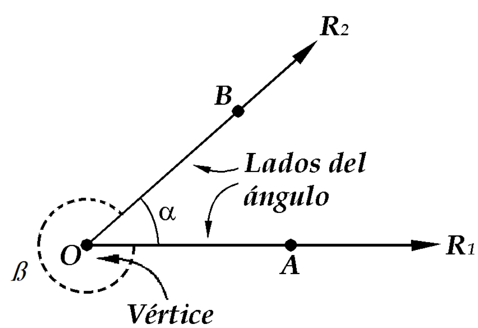


Figura 1.4

Denotamos el ángulo de la figura 1.4 por $\measuredangle AOB$, ó por $\measuredangle BOA$, ó por una letra griega $\alpha, \beta, \gamma, ...$, por un número $1, 2, 3, ...$ ó por una letra minúscula $a, b, c, ...$

Cuando los rayos R_1 y R_2 coinciden tenemos un ángulo nulo y un ángulo que corresponde a una rotación completa alrededor del vértice O.

Medida de ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad. Consideremos una circunferencia de centro O dividida en 360 partes iguales. Un ángulo mide un grado sexagesimal, y escribimos $1°$, si al situar su vértice en O, sus lados cortan dos divisiones consecutivas de la circunferencia. De acuerdo con esta definición de medida de ángulo, el ángulo que corresponde a una rotación completa alrededor del vértice O mide 360°. Para medir ángulos usamos el transportador (véase la figura 1.5).

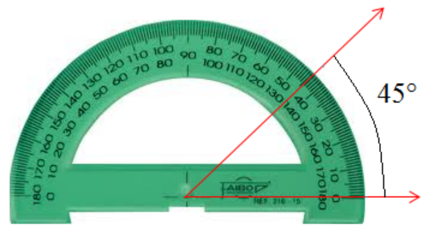


Figura 1.5

Un ángulo se puede clasificar según su medida así:

- **Ángulo agudo**: es el que mide menos de 90°.
- **Ángulo recto**: es el que mide exactamente 90°.
- **Ángulo obtuso**: es el que mide más de 90° y menos de 180°.
- **Ángulo llano**: es el que mide 180°.

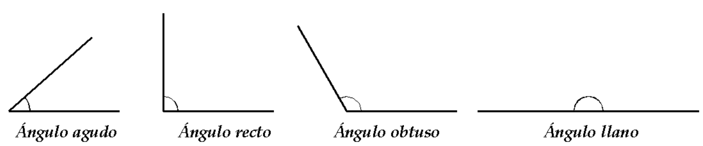


Figura 1.6

Relaciones entre ángulos

- **Ángulos congruentes**: decimos que dos ángulos son **congruentes** si tienen la misma medida. Si α y β son congruentes, escribimos $\alpha \cong \beta$.

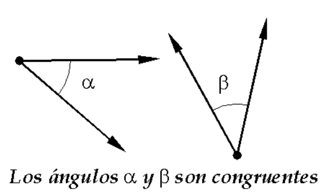


Figura 1.7

- **Ángulos complementarios**: decimos que dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es 90°.
- **Ángulos suplementarios**: decimos que dos ángulos son **suplementarios** si la su suma de sus medidas es 180°.

- **Ángulos consecutivos**: decimos que dos ángulos son **consecutivos** si tienen el mismo vértice y un lado común, pero no se superponen.
- **Ángulos adyacentes**: decimos que dos ángulos son **adyacentes** si tienen un lado común y los otros dos lados pertenecen a la misma recta.

Ejemplo 1.1

1. En la figura 1.8 los ángulos $\measuredangle AOC$ y $\measuredangle BOC$ son consecutivos.

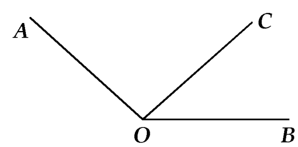


Figura 1.8

2. En la figura 1.9 los ángulos $\measuredangle AOC$ y $\measuredangle BOC$ son adyacentes.

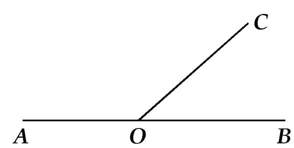
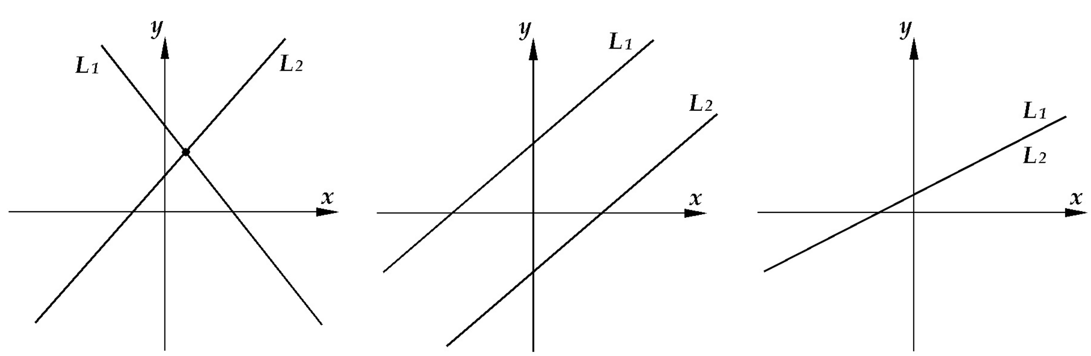


Figura 1.9

Se dice que dos rectas L_1 y L_2 en el plano que tienen un **único punto en común**, se interceptan (o intersecan) en dicho punto. Si no tienen algún punto en común se dice que L_1 y L_2 son **paralelas**, y escribimos $L_1 \parallel L_2$. Si L_1 y L_2 tienen todos los puntos comunes se llaman **coincidentes**.



(a) Rectas que se interceptan (b) Rectas paralelas (c) Rectas coincidentes

Figura 1.10

Si dos rectas L_1 y L_2 se interceptan formando 4 **ángulos rectos** se dice que son **perpendiculares**, y en dicho caso escribimos $L_1 \perp L_2$.

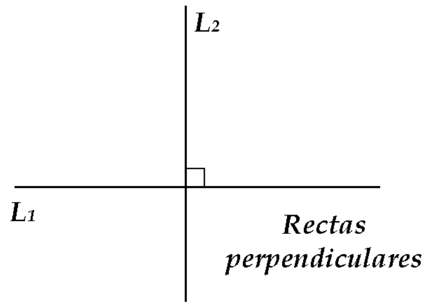


Figura 1.11

Se acostumbra usar el símbolo $\square$ en las gráficas para indicar que se tiene un ángulo recto ($90°$).

Ejercicios

1. Dibuje los siguientes ángulos cuyas medidas son $36°$, $100°$, $210°$ y $300°$.
2. Considere los ángulos $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$, con $\measuredangle AOB = 35°$. Dibuje ambos ángulos y halle la medida del ángulo $\measuredangle BOC$ si ellos son
   (a) complementarios,
   (b) suplementarios,
   (c) congruentes.
3. Si las rectas L_1 y L_2 de la siguiente figura son perpendiculares, halle la medida del ángulo x.

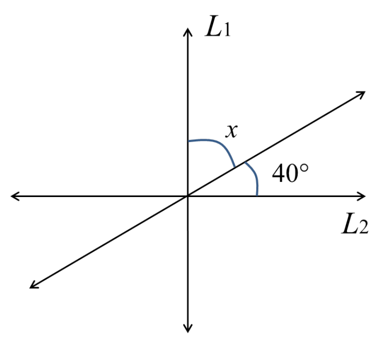


Figura 1.12

Lección 2

Ángulos II y Triángulos I

Ángulos entre rectas

Cuando dos rectas son intersecadas por una línea transversal, que llamaremos **secante**, se forman 8 ángulos así:

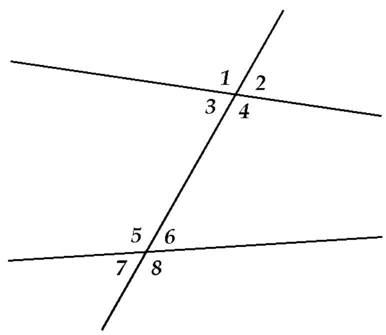


Figura 2.1

Utilizamos las siguientes denominaciones para los ángulos de la figura 2.1:

- **Ángulos alternos externos**: "1 y 8" y "2 y 7".
- **Ángulos alternos internos**: "3 y 6" y "4 y 5".
- **Ángulos correspondientes**: "1 y 5", "2 y 6", "3 y 7" y "4 y 8".
- **Ángulos opuestos por el vértice**: "1 y 4", "2 y 3", "5 y 8" y "6 y 7".

Teorema de las paralelas

Si dos rectas interceptadas por una secante son paralelas, entonces los pares de ángulos mencionados arriba son congruentes.

Ejemplo 2.1

Si en la figura 2.2 L_1 y L_2 son rectas paralelas y $b = 30°$, ¿cuál es la medida de los ángulos restantes?

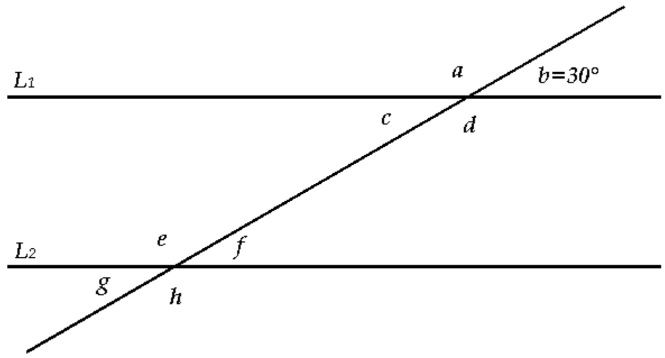


Figura 2.2

Solución

$a = 150°$ (porque a es suplemento de $b = 30°$).

$c = 30°$ (porque c es opuesto por el vértice con $b = 30°$).

$d = 150°$ (porque d es el suplemento de $b = 30°$).

$e = 150°$ (porque e es correspondiente con $a = 150°$).

$f = 30°$ (porque f es correspondiente con $b = 30°$).

$g = 30°$ (porque g es alterno externo con $b = 30°$).

$h = 150°$ (porque h es alterno externo con $a = 150°$).

Ejemplo 2.2

Si en la figura 2.3 L_1 y L_2 son rectas paralelas y $c = 45°$ y $m = 60°$, encuentre la medida de los ángulos restantes.

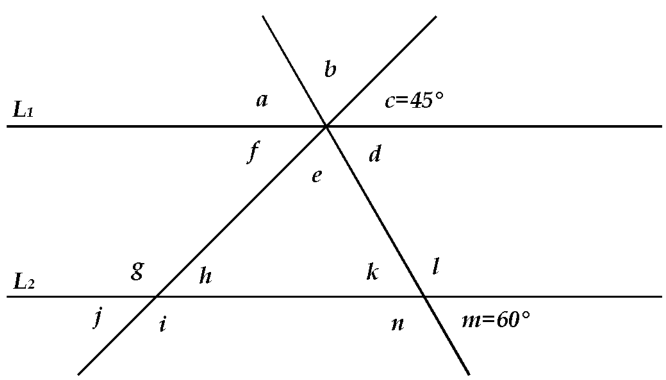


Figura 2.3

Solución

$a = 60°$ (porque a es alterno externo con $m = 60°$).

$b = 75°$ (porque $a + b + c = 180°$, $a = 60°$ y $c = 45°$).

$d = 60°$ (porque d es opuesto por el vértice con $a = 60°$).

$e = 75°$ (porque e es opuesto por el vértice con $b = 75°$).

$f = 45°$ (porque f es opuesto por el vértice con $c = 45°$).

$g = 135°$ (porque g es alterno interno con $d + e = 135°$).

$h = 45°$ (porque h es suplemento de $g = 135°$).

$i = 135°$ (porque i es opuesto por el vértice con $g = 135°$).

$j = 45°$ (porque j es opuesto por el vértice con $h = 45°$).

$k = 60°$ (porque k es opuesto por el vértice con $m = 60°$).

$l = 120°$ (porque l es suplemento de $m = 60°$).

$n = 120°$ (porque n es opuesto por el vértice con $l = 120°$).

Triángulos

Dados tres puntos no colineales A, B y C, se llama **triángulo** ABC, y se denota por ΔABC, a la región del plano limitada por los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Los puntos A, B y C se denominan **vértices** del triángulo y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman **lados** del triángulo.

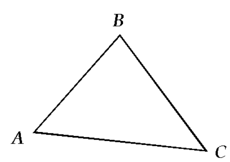


Figura 2.4

En el triángulo ΔABC de la figura 2.5, los ángulos $\measuredangle 1, \measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$ se llaman **ángulos interiores o internos** del triángulo y los ángulos $\measuredangle 4, \measuredangle 5$ y $\measuredangle 6$ se llaman **ángulos exteriores o externos** del triángulo.

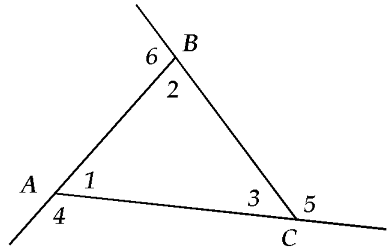


Figura 2.5

Ejercicios

1. Si las rectas L_1 y L_2 de la figura 2.6 son paralelas y $c = 140°$, halle la medida de los ángulos restantes:

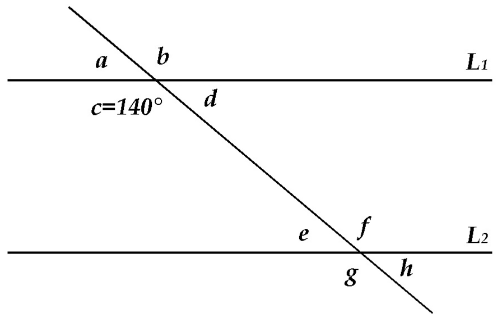


Figura 2.6

2. Si las rectas L_1 y L_2 de la figura 2.7 son paralelas, $b = 30°$ y $j = 70°$, halle la medida de los ángulos restantes:

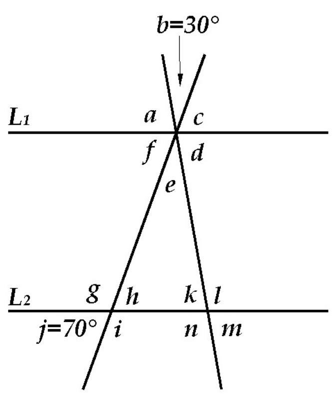


Figura 2.7

3. Si las rectas L_1 y L_2 de la figura 2.8 son paralelas, encuentre los valores de x y de y:

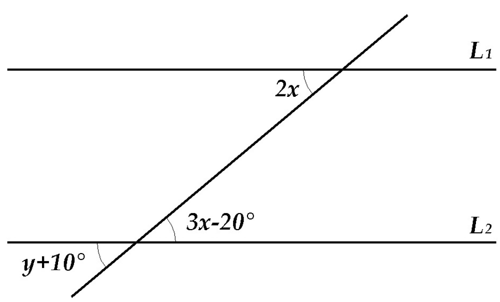


Figura 2.8

4. Si las rectas L_1 y L_2 de la figura 2.9 son paralelas, encuentre los valores de x y de y:

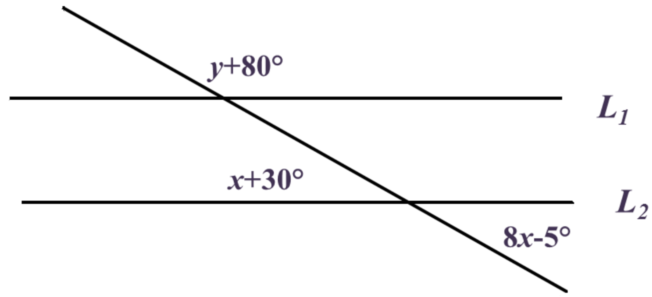


Figura 2.9

5. Si las rectas L_1 y L_2 de la figura 2.10 son paralelas, encuentre los valores de x y de y:

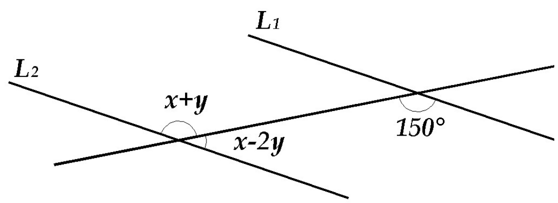


Figura 2.10

Lección 3

Triángulos II

Algunos conceptos y resultados importantes

- La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

  Prueba

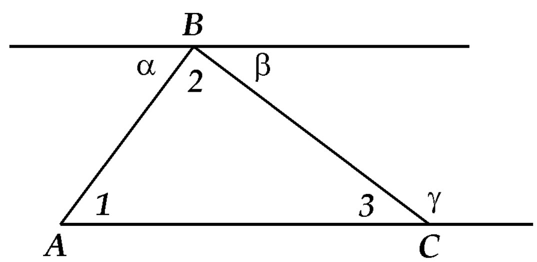
  

  Figura 3.1

  En la figura 3.1, tracemos por B una recta paralela a $\overline{AC}$. Entonces

  $$\measuredangle\alpha + \measuredangle 2 + \measuredangle\beta = 180^\circ. \tag{3.1}$$

  Por el teorema de las paralelas, como los ángulos $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle 1$ son alternos internos y los ángulos $\measuredangle\beta$ y $\measuredangle 3$ son también alternos internos, entonces $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle 1$ y $\measuredangle\beta \cong \measuredangle 3$. Por lo tanto, reemplazando en (3.1), tenemos que

  $$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 180^\circ.$$

- En un triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

  Prueba

  De acuerdo con la figura 3.1, tenemos que $\measuredangle 3 + \measuredangle\gamma = 180^\circ$, ya que $\measuredangle 3$ y $\measuredangle\gamma$ son suplementarios. Como $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 180^\circ$, entonces $\measuredangle 3 = 180^\circ - \measuredangle 1 - \measuredangle 2$. Luego, $180^\circ - \measuredangle 1 - \measuredangle 2 + \measuredangle\gamma = 180^\circ$, y así

  $$\measuredangle\gamma = \measuredangle 1 + \measuredangle 2.$$

- La **base** de un triángulo es cualquiera de sus lados.
- Se denomina **altura** de un triángulo a cada una de las rectas que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto, o a su prolongación. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**.
- Se denomina **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro**.
- Se denomina **mediatriz** de un triángulo a cada una de las rectas perpendiculares que pasa por el punto medio de cada lado. Las tres mediatrices se cortan en un punto llamado **circuncentro**.
- Se denomina **bisectriz** de un triángulo a cada una de las rectas que divide sus ángulos en dos ángulos congruentes. El punto de corte de las tres bisectrices de un triángulo se llama **incentro**.

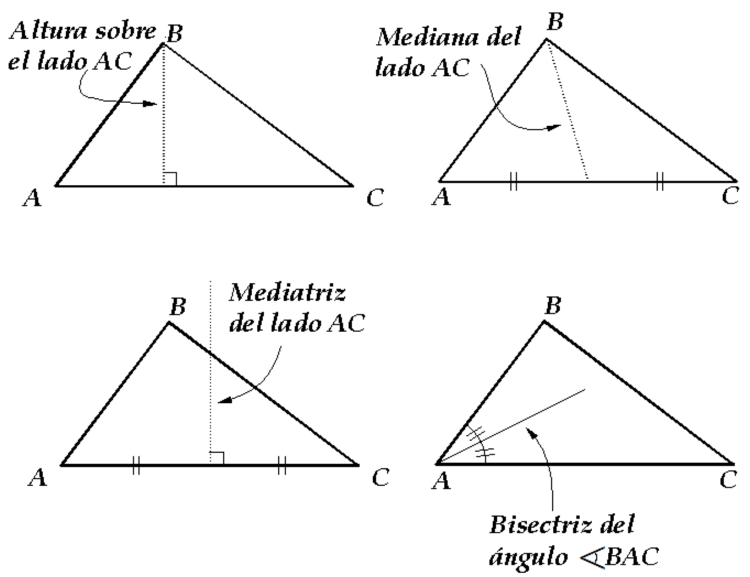


Figura 3.2

Ejemplo 3.1

Determine los valores de x y y.

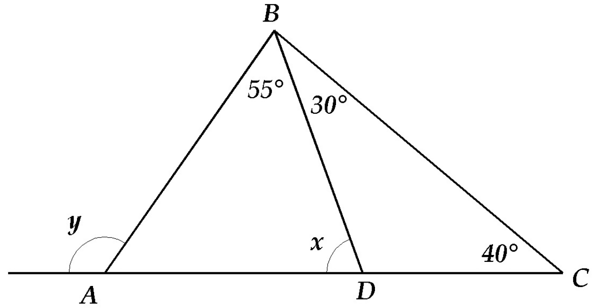
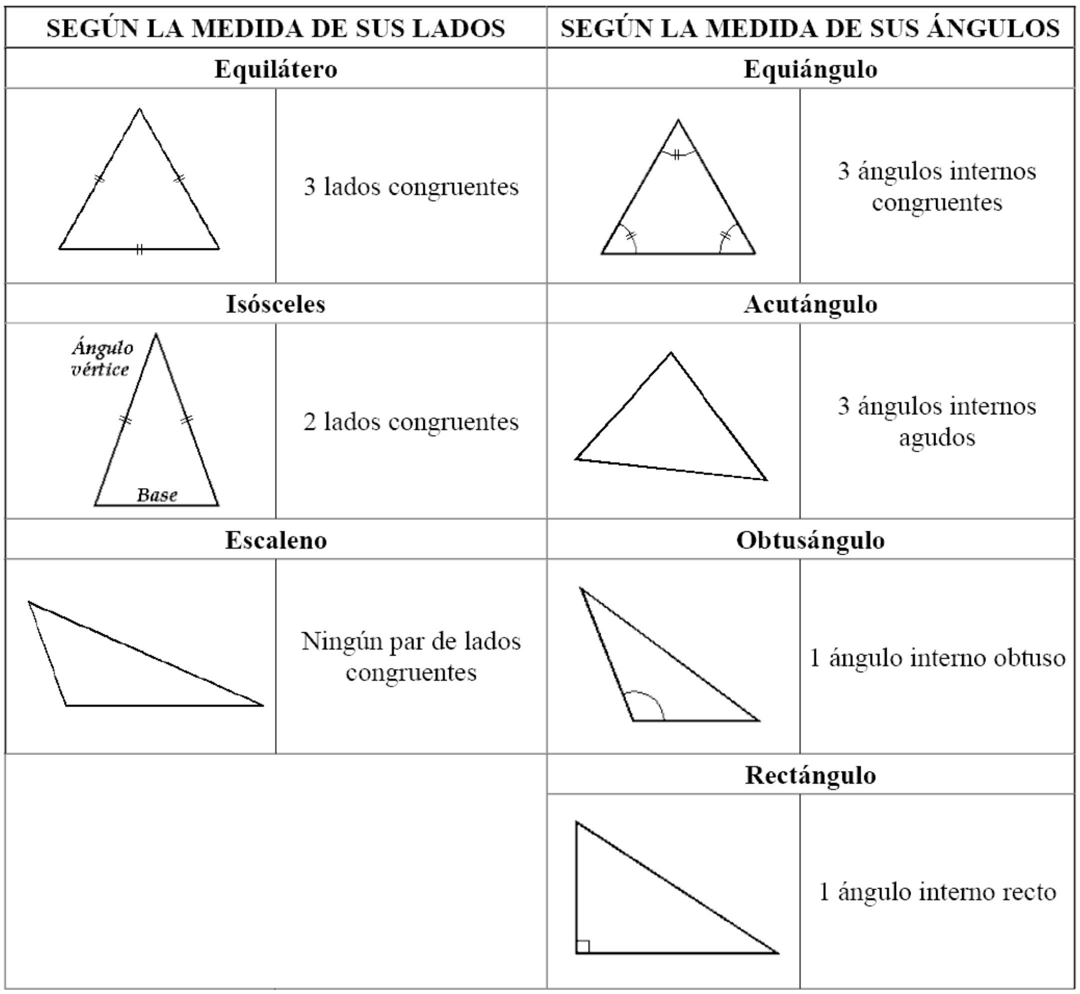


Figura 3.3

Solución

El ángulo $\measuredangle ADB$ es un ángulo exterior del triángulo ΔBDC. Luego su medida x es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él, es decir, $x = 30° + 40° = 70°$. Ahora bien, como el ángulo y es externo al triángulo ΔABD, entonces $y = x + 55° = 70° + 55° = 125°$.

Clasificación de triángulos



SEGÚN LA MEDIDA DE SUS LADOS		SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS	
Equilátero		**Equiángulo**	
	3 lados congruentes		3 ángulos internos congruentes
Isósceles		**Acutángulo**	
Ángulo vértice / *Base*	2 lados congruentes		3 ángulos internos agudos
Escaleno		**Obtusángulo**	
	Ningún par de lados congruentes		1 ángulo interno obtuso
		Rectángulo	
			1 ángulo interno recto

Figura 3.4

Conceptos importantes

- En un triángulo isósceles el ángulo comprendido entre los dos lados congruentes se llama ángulo vértice.
- En un triángulo isósceles se suele llamar base al lado opuesto al ángulo vértice.

Ejercicios

1. Si el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular al segmento $\overline{BC}$, halle el valor de y:

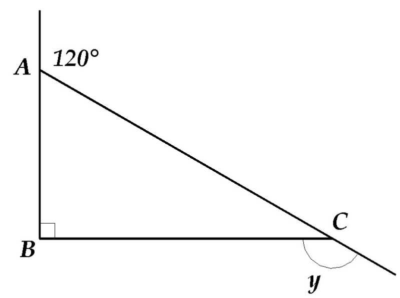


Figura 3.5

2. Halle los valores de x y y:

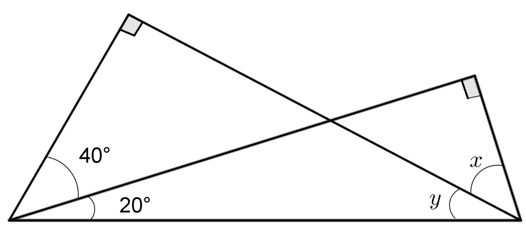


Figura 3.6

3. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y:

4. Halle los valores de x y y:

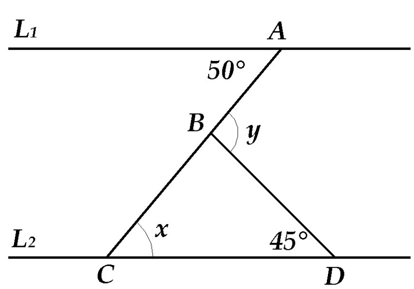


Figura 3.7

5. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y:

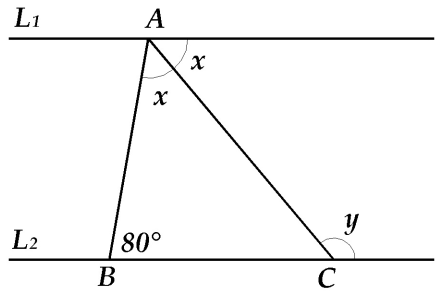


Figura 3.8

Lección 4

Congruencia de triángulos

Dos triángulos son **congruentes** si los tres lados y los tres ángulos de uno tienen las mismas medidas que los tres lados y los tres ángulos del otro. Es decir, dos triángulos son congruentes si tienen la misma forma y tamaño. Nos referiremos a las partes de los dos triángulos que tienen las mismas medidas, como partes correspondientes. Si superponemos las partes correspondientes de dos triángulos congruentes, éstos coinciden.

Los triángulos congruentes son nombrados listando sus vértices en órdenes correspondientes. Más precisamente, si $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{BC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AC} \cong \overline{EF}$ y $\measuredangle A \cong \measuredangle E$, $\measuredangle B \cong \measuredangle D$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$, entonces el $\triangle ABC$ es congruente con el $\triangle EDF$, y escribimos $\triangle ABC \cong \triangle EDF$.

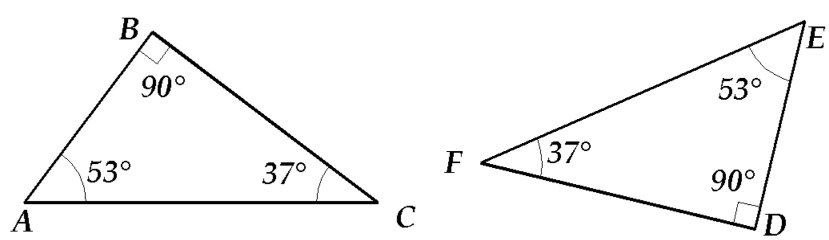


Figura 4.1

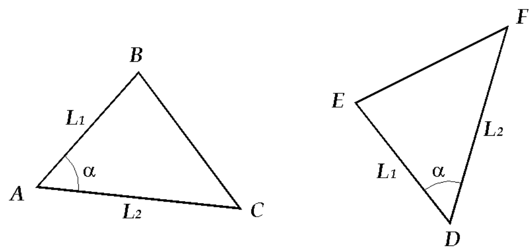
En esta figura tenemos que $\triangle ABC \cong \triangle EDF$, ya que $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{BC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AC} \cong \overline{EF}$ y $\measuredangle A \cong \measuredangle E$, $\measuredangle B \cong \measuredangle D$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.

Se puede probar que los siguientes criterios permiten determinar si dos triángulos son congruentes, sin necesidad de probar la congruencia de todos los lados y todos los ángulos.

Criterios de congruencia

Dos triángulos son congruentes si:

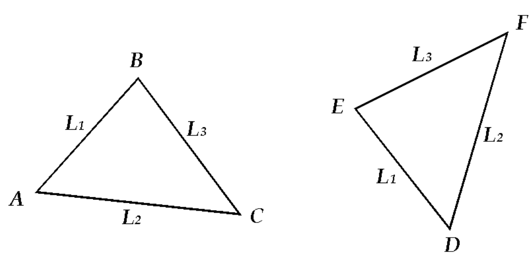
1. Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en uno de los triángulos son, respectivamente, congruentes con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, en el otro triángulo. Este criterio se conoce como L-A-L (Lado-Ángulo-Lado).



Los triángulos ΔABC y ΔDEF son congruentes

Figura 4.2

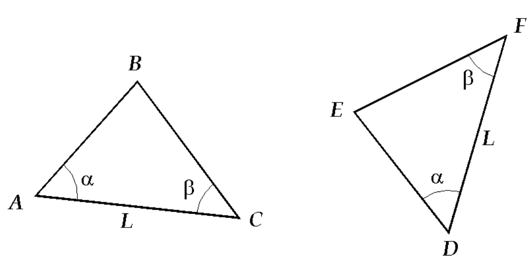
2. Los tres lados de uno de los triángulos son, respectivamente, congruentes con los tres lados del otro triángulo. Este criterio se conoce como L-L-L (Lado-Lado-Lado).



Los triángulos ΔABC y ΔDEF son congruentes

Figura 4.3

3. Un lado y los dos ángulos de los extremos de ese lado en un triángulo son, respectivamente, congruentes con un lado y los dos ángulos de los extremos de ese lado, en el otro triángulo. Este criterio se conoce como A-L-A (Ángulo-Lado-Ángulo).



Los triángulos ΔABC y ΔDEF son congruentes

Figura 4.4

Ejemplo 4.1

Sabiendo que $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ y que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelos, encuentre los valores de x y y.

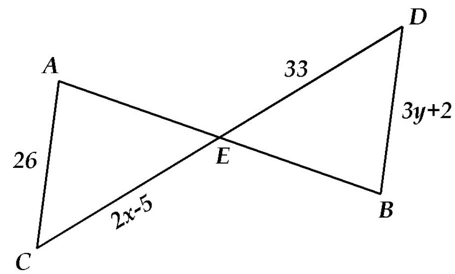


Figura 4.5

Solución

Vemos que $\measuredangle AEC \cong \measuredangle BED$, por ser opuestos por el vértice. Además, como $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelos, entonces $\measuredangle CAE \cong \measuredangle DBE$, ya que son alternos internos. Por hipótesis tenemos que $\overline{AE} \cong \overline{EB}$, entonces por el criterio A-L-A concluímos que $\triangle ACE \cong \triangle BDE$. Por lo tanto

$$2x - 5 = 33 \quad \text{y} \quad 3y + 2 = 26.$$

Luego $x = (33 + 5)/2 = 19$ y $y = (26 - 2)/3 = 8$.

Ejemplo 4.2

Sabiendo que $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ y que $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BCE$, encuentre los valores de x y y.

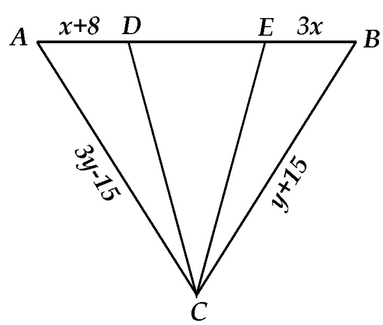


Figura 4.6

Solución

Como $\overline{CD} \cong \overline{CE}$, entonces el triángulo $\triangle DCE$ es isósceles. En particular, tenemos que $\measuredangle CDE \cong \measuredangle CED$ y así $\measuredangle CDA \cong \measuredangle CEB$. Por el criterio A-L-A, concluímos que $\triangle CDA \cong \triangle CEB$. Entonces

$$x + 8 = 3x \quad \text{y} \quad 3y - 15 = y + 15.$$

Por lo tanto, $3x - x = 8$ y de esta manera $x = 8/2 = 4$. También, $3y - y = 15 + 15$ y así $y = 30/2 = 15$.

Resultados importantes

1. La bisectriz del ángulo vértice de un triángulo isósceles es también altura, mediana y mediatriz de la base.

2. Si un triángulo $\triangle ABC$ es isósceles entonces los ángulos de la base son congruentes.

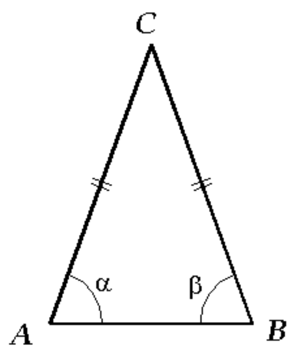


Figura 4.7

Si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ entonces $\alpha \cong \beta$.

Prueba

1. Consideremos el triángulo isósceles ΔABC de la figura 4.8, donde $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{CD}$ es la bisectriz del ángulo vértice $\measuredangle C$. Entonces $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BCD$.

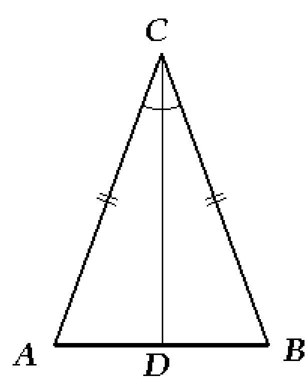


Figura 4.8

Como el segmento $\overline{CD}$ es compartido por los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$, por el criterio L-A-L tenemos que estos triángulos son congruentes. En particular, los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son congruentes, luego la bisectriz $\overline{CD}$ también es mediana.

Finalmente, $\measuredangle CDA \cong \measuredangle CDB$ y $\measuredangle CDA + \measuredangle CDB = 180°$, entonces ambos ángulos deben ser rectos. Por lo tanto, la bisectriz $\overline{CD}$ también es altura y mediatriz.

2. Se deja como ejercicio.

Ejercicios

1. Sabiendo que los triángulos ΔADE y ΔBCE son rectángulos en E, que $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ y que $\overline{CE} \cong \overline{DE}$, encuentre los valores de x y y.

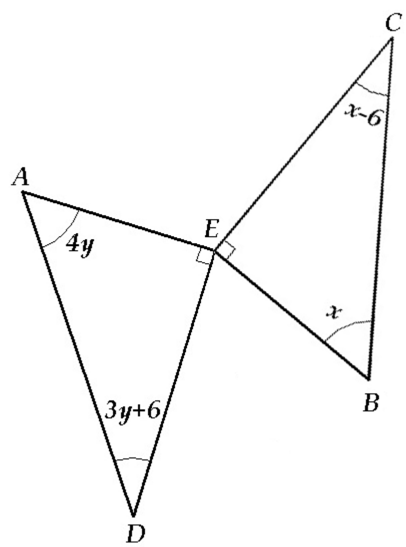


Figura 4.9

2. Pruebe que en todo triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes.

3. Si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BE}$, encuentre el valor de x.

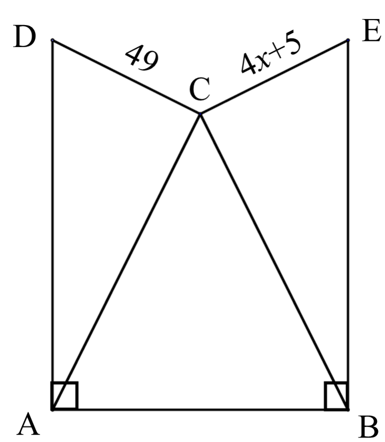


Figura 4.10

4. En la figura 4.11 $\measuredangle CBD \cong \measuredangle CDB$, $\measuredangle ACB \cong \measuredangle ECD$ y $\overline{AC} \cong \overline{EC}$. Encuentre el valor de x.

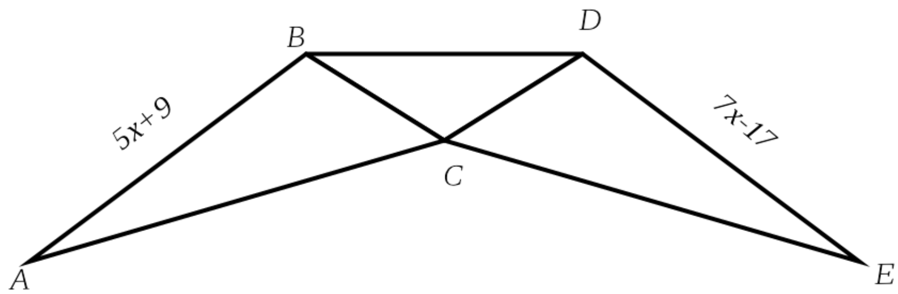


Figura 4.11

Lección 5

Semejanza de triángulos

Los triángulos ΔABC y ΔDEF

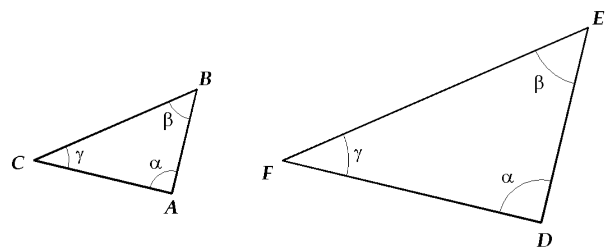


Figura 5.1

son **semejantes** y escribimos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, si $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ y

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

Es decir, dos triángulos son semejantes si sus ángulos interiores son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. Llamamos lados correspondientes en dos triángulos semejantes a aquellos que se oponen a ángulos congruentes. Dos triángulos semejantes tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.

Teorema de Tales

Toda recta paralela a un lado de un triángulo y que intercepta los otros dos lados, determina un segundo triángulo semejante al primero.

Si en el triángulo ΔABC de la figura 5.2 trazamos $\overline{DE} \| \overline{AB}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

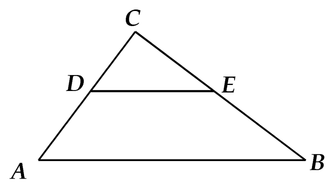


Figura 5.2

Podemos utilizar algunos criterios para probar la semejanza de triángulos sin necesidad de probar la congruencia de todos los ángulos y la proporcionalidad de todos los lados correspondientes. Además del Teorema de Tales, el criterio más útil de semejanza de triángulos es el siguiente:

Criterio A-A (Ángulo-Ángulo)

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno de los triángulos son congruentes con dos ángulos del otro triángulo.

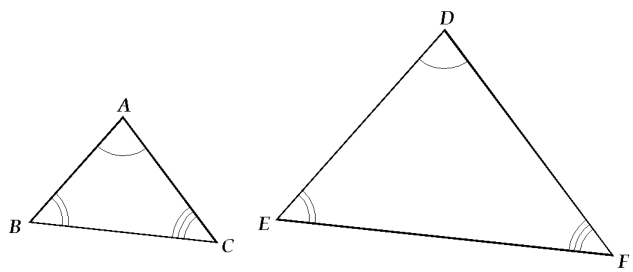


Figura 5.3

En la figura 5.3, $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$. Es claro que también $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.

Ejemplo 5.1

Se tiene un tanque en forma de cono recto invertido de 3 m de altura y 2 m de diámetro en la parte superior (véase la figura 5.4). Si el tanque está parcialmente lleno de agua, con 1.8 m desde el vértice hasta la superficie, calcule el radio de la superficie de agua.

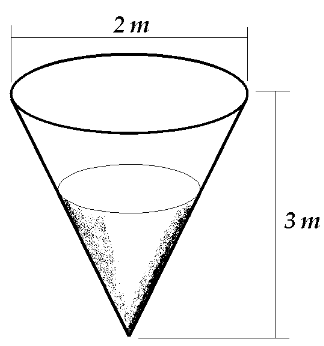


Figura 5.4

Solución

El tanque, visto de frente, tiene la forma de un triángulo isósceles, con su ángulo vértice en la parte inferior y la base en la parte superior. Tracemos la altura del triángulo isósceles y empleemos la nomenclatura que se muestra en la figura 5.5.

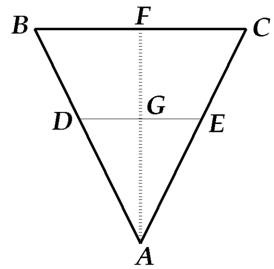


Figura 5.5

Los datos del problema, con la nomenclatura de la figura, son los siguientes: $\overline{BC} = 2$ m, $\overline{AF} = 3$ m, $\overline{AG} = 1.8$ m.

Como los segmentos $\overline{FC}$ y $\overline{GE}$ son paralelos, entonces por el Teorema de Tales tenemos que los triángulos ΔAFC y ΔAGE son semejantes. Luego, se cumple que

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{FC}},$$

o equivalentemente que

$$\overline{GE} = \frac{\overline{FC} \times \overline{AG}}{\overline{AF}}.$$

Ahora, como el triángulo ΔABC es isósceles y el segmento $\overline{AF}$ es altura, entonces $\overline{AF}$ también es mediatriz y así los segmentos $\overline{BF}$ y $\overline{FC}$ son congruentes. Por lo tanto,

$$\overline{FC} \cong \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ m}.$$

Reemplazando todos los valores tenemos que

$$\overline{GE} = \frac{\overline{FC} \times \overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{1 \times 1.8}{3} = 0.6 \text{ m}.$$

Por lo tanto, el radio de la superficie de agua es 0.6 m.

Ejemplo 5.2

En la figura 5.6, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son paralelos. Si las longitudes de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son 18, 12 y 10 respectivamente, calcule el valor de x.

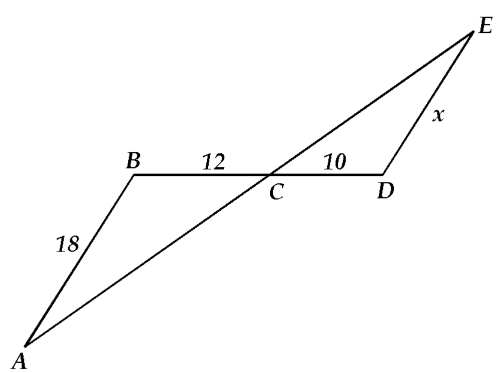


Figura 5.6

Solución

Observemos que $\measuredangle BCA \cong \measuredangle ECD$ por ser opuestos por el vértice, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle CED$ por ser alternos internos y que $\measuredangle ABC \cong \measuredangle CDE$ por ser alternos internos.

Tenemos entonces que $\Delta ABC \sim \Delta CED$, ya que los tres ángulos interiores del triángulo ΔABC son congruentes con los tres ángulos interiores del triángulo ΔCED. De esta forma se cumple que los lados correspondientes son proporcionales, esto es:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{x}$$

$$\frac{12}{10} = \frac{18}{x}.$$

Luego

$$x = \frac{180}{12} = 15.$$

Ejercicios

1. En la figura 5.7, sabiendo que $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos, demuestre que los triángulos ΔADE y ΔBCE son semejantes y escriba la proporcionalidad que se cumple.

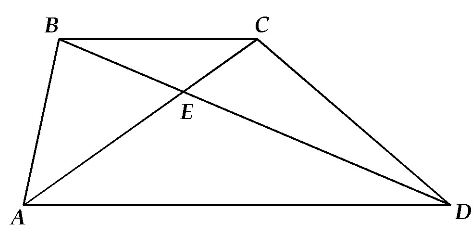


Figura 5.7

2. En la figura 5.8, sabiendo que los segmentos de recta $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$ son paralelos, determine la longitud del segmento $\overline{CD}$.

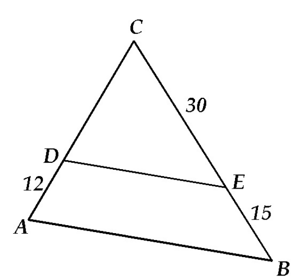


Figura 5.8

3. En la figura 5.9, sabiendo que $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos, halle el valor de x.

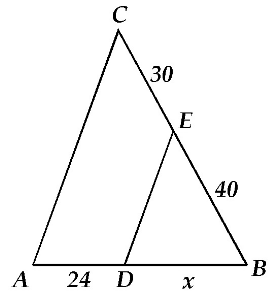


Figura 5.9

4. Un hombre se aleja caminando de un poste vertical cuya lámpara está a 6 m del suelo (véase la figura 5.10). El hombre tiene una estatura de 2 m. ¿Cuánto mide la sombra del hombre cuando está a 10 m del poste?

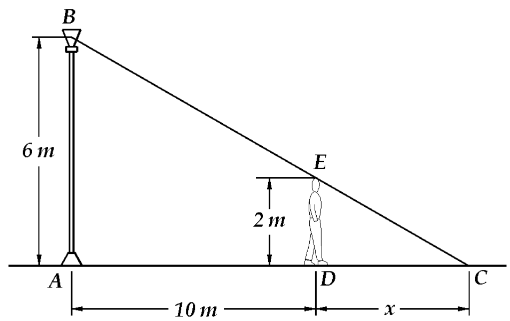


Figura 5.10

5. En cierto momento del día, una torre vertical produce una sombra que mide 150 m. En ese mismo instante y lugar, una vara vertical de 80 cm produce una sombra de 120 cm. ¿Cuál es la altura de la torre? (Suponga que el terreno es completamente horizontal y que los rayos del sol, en un mismo instante, son paralelos).

6. En la fotografía aérea de un terreno triangular se aprecia que las longitudes de los tres lados son de 4 cm, 5 cm y 7 cm, respectivamente. Si el lado más corto del terreno real tiene 400 m, halle las longitudes de los demás lados del terreno.

7. En la figura 5.11, los segmentos de recta $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos. Halle la longitud del segmento $\overline{DE}$.

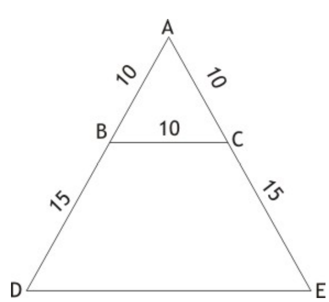


Figura 5.11

Lección 6

Figuras planas I

Conceptos básicos

Una **figura plana** es una región del plano limitada por una línea cerrada.

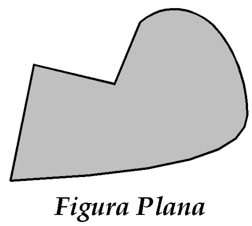


Figura 6.1

Un **polígono** es una figura plana limitada por una línea cerrada, conformada por un número finito de segmentos de recta, llamados **lados del polígono**. Si todos los lados y ángulos interiores de un polígono son congruentes, decimos que el polígono es **regular.**

Los polígonos reciben nombres especiales de acuerdo con el número de lados, así:

No.de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
...	...
n	Eneágono

Una **circunferencia** es la línea cerrada formada por todos los puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado **centro**. A la distancia fija la llamamos **radio** de la circunferencia, y la denotamos por r.

Se llama **diámetro** de la circunferencia a todo segmento de recta que une dos puntos sobre la circunferencia y pasa por el centro. Si d es la longitud de un diámetro y r es la longitud del radio, es claro que $d = 2r$.

Un **círculo** es una figura plana limitada por una circunferencia.

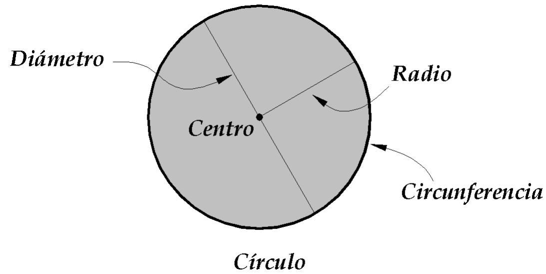


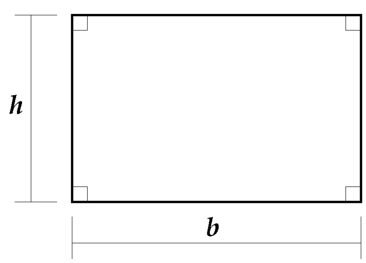
Figura 6.2

El **perímetro** de una figura plana es la longitud de la línea cerrada que limita la figura. El perímetro se mide en unidades de longitud, como milímetro [mm], centímetro [cm], metro [m], pies [ft], entre otras.

El **Área** de una figura plana es la medida de la superficie de dicha figura. El área se expresa en unidades cuadradas, como milímetro cuadrado [mm^2], centímetro cuadrado [cm^2], metro cuadrado [m^2], entre otras.

Perímetro y área de algunas figuras planas

1. **Rectángulo:** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes y cuyos cuatro ángulos internos son rectos.

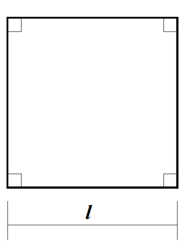


b: base
h: altura

Perímetro:
$P = 2(b + h)$
Área:
$A = bh$

Figura 6.3

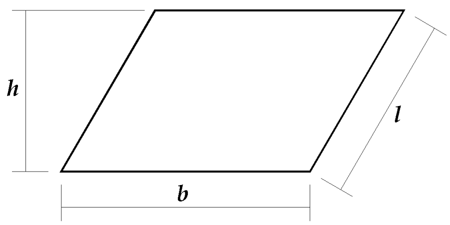
2. **Cuadrado:** es un cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes y cuyos cuatro ángulos internos son rectos.



l: lado
Perímetro:
$P = 4l$
Área:
$A = l^2$

Figura 6.4

3. **Paralelogramo:** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.



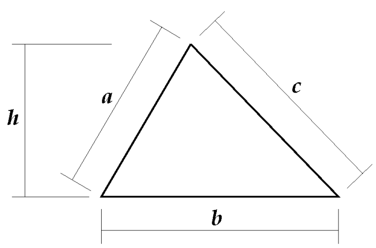
b: base
h: altura
l: lado adyacente
a la base

Figura 6.5

Perímetro: $P = 2(b + l)$

Área: $A = bh$

4. **Triángulo:**



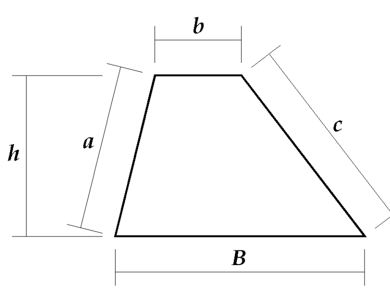
b: base
h: altura
a, c: lados

Figura 6.6

Perímetro: $P = a + b + c$

Área: $A = \dfrac{1}{2}bh$

5. **Trapecio:** es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos, llamados bases.



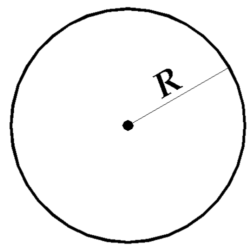
B: base mayor
b: base menor
h: altura
a, c: otros dos lados

Figura 6.7

Perímetro: $P = a + B + b + c$

Área: $A = \dfrac{1}{2}(B + b)h$

6. **Círculo:**



R: radio
d: diámetro

Longitud de la circunferencia:
$C = 2\pi R = \pi d$
Área del círculo:
$A = \pi R^2$

Figura 6.8

Ejemplo 6.1

En la figura 6.9 se muestra un círculo inscrito en un cuadrado de lado 8 cm. Halle el área de la región sombreada.

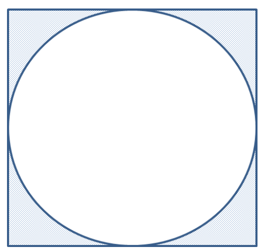


Figura 6.9

Solución

Vemos que la longitud del diámetro del círculo es igual a la longitud del lado del cuadrado. Por lo tanto el radio del círculo es 4 cm. Además, es claro que el área sombreada es

$$A_{\text{sombreada}} = A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{círculo}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A_{\text{sombreada}} &= (8\text{ cm})^2 - \pi(4\text{ cm})^2 \\ &= (64 - 16\pi)\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Encuentre el área de un círculo de diámetro 10 cm.
2. Encuentre el área de un cuadrado si se sabe que su perímetro es 52 m.
3. Encuentre el perímetro de un círculo que tiene área 49π cm^2.

4. Halle el área de la siguiente figura plana, donde el extremo izquierdo es un semicírculo y los dos segmentos de recta conectados a él son paralelos.

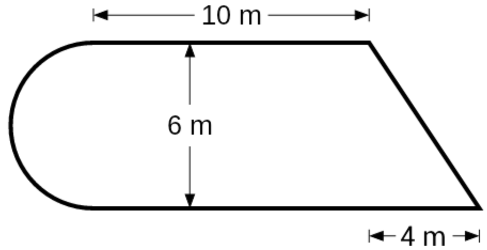


Figura 6.10

Lección 7

Figuras planas II

Más ejemplos

Ejemplo 7.1

Se tiene una ventana compuesta de un cuadrado y un semicírculo en la parte superior, como se muestra en la figura 7.1.

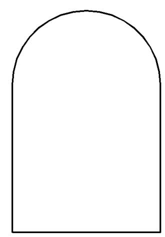


Figura 7.1

Si el perímetro de la ventana es 8 m, ¿qué cantidad de vidrio debemos comprar para cubrir la ventana?

Solución

Sea x la longitud del lado del cuadrado. Entonces el radio del semicírculo es $\dfrac{x}{2}$ (véase la figura 7.2).

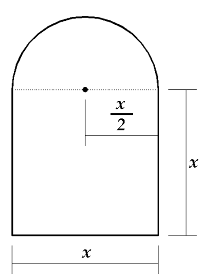


Figura 7.2

Vemos que el área de la ventana A_{ventana} está dada por

$$A_{\text{ventana}} = A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{semicírculo}}.$$

Como el área del cuadrado es $A_{\text{cuadrado}} = x^2$ y el área del semicírculo es

$$\begin{aligned} A_{\text{semicírculo}} &= \frac{\pi(x/2)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}\pi x^2, \end{aligned}$$

entonces el área de la ventana es

$$A_{\text{ventana}} = x^2\left(1+\frac{1}{8}\pi\right).$$

Necesitamos calcular el valor de x. Como el perímetro de la ventana P_{ventana} es

$$P_{\text{ventana}} = 3x + \frac{1}{2}\left[2\pi\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 3x + \frac{\pi}{2}x = x\left(3+\frac{\pi}{2}\right),$$

tenemos que $x\left(3+\frac{\pi}{2}\right) = 8$, y entonces el valor de x es

$$x = \frac{8\times 2}{6+\pi} = \frac{16}{6+\pi}.$$

Calculemos ahora el área de la ventana.

$$A_{\text{ventana}} = x^2\left(1+\frac{1}{8}\pi\right) = \left(\frac{16}{6+\pi}\right)^2\left(\frac{8+\pi}{8}\right) = 32\frac{8+\pi}{(6+\pi)^2}.$$

Luego, debemos comprar $32\dfrac{8+\pi}{(6+\pi)^2}$ m^2 de vidrio para cubrir la ventana.

Ejemplo 7.2

Sea $ABCD$ un cuadrado de lado L. Si desde los vértices B y D se traza $1/4$ de arco de circunferencia con radio L, tal y como se muestra en la figura 7.3, calcule el área sombreada.

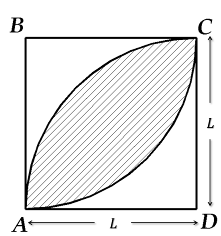


Figura 7.3

Solución

En la figura 7.4 vemos que la mitad del área de la región sombreada se puede calcular restando el área de un triángulo del área de un cuarto de círculo.

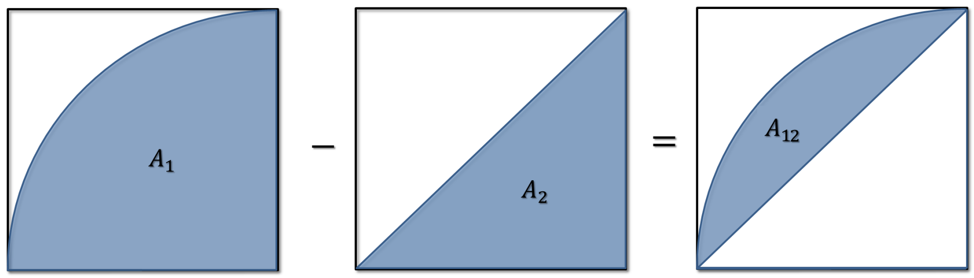


Figura 7.4

Luego, el área A_{12} se puede calcular como

$$A_{12} = A_1 - A_2,$$

donde

$A_1 =$ área de $\frac{1}{4}$ de círculo de radio L y

$A_2 =$ área de un triángulo de base L y altura L.

Entonces

$$A_1 = \frac{\pi L^2}{4} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{L \cdot L}{2} = \frac{L^2}{2}.$$

Así,

$$A_{12} = \frac{\pi L^2}{4} - \frac{L \cdot L}{2} = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right) L^2.$$

Finalmente, el área sombreada A_s es igual a dos veces el área A_{12}. Entonces

$$A_s = 2A_{12} = 2\left(\frac{\pi - 2}{4}\right) L^2 = \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) L^2.$$

Ejercicios

1. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado $2L$. Si desde el centro del cuadrado trazamos una circunferencia completa con radio L y desde cada uno de los vértices trazamos $1/4$ de circunferencia con radio L, como lo muestra la figura 7.5, calcule el área sombreada.

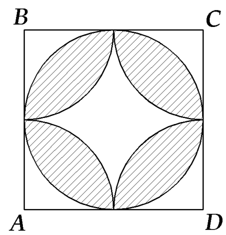


Figura 7.5

2. Con un alambre de 100 cm se construyen un cuadrado de lado L y una circunferencia de radio r, usando todo el alambre disponible. Calcule **la suma** de las áreas de las dos figuras:

   (a) en términos de L, (b) en términos de r.

3. En la figura 7.6 el radio de la circunferencia exterior es 2 cm y el diámetro de los semicírculos interiores es 2 cm. Encuentre el área de la región sombreada.

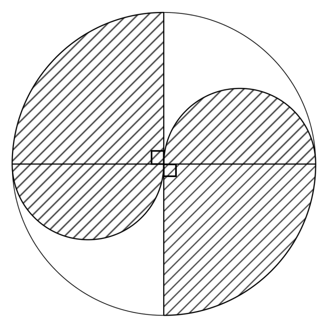


Figura 7.6

4. En la figura 7.7 el diámetro AB es paralelo al segmento de recta $\overline{CD}$. Encuentre el área de la región sombreada.

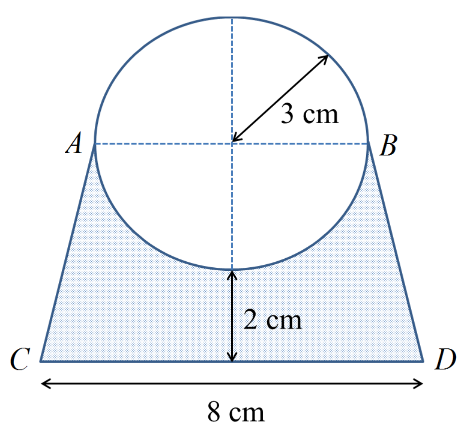


Figura 7.7

5. Considerando que los dos círculos internos de la figura 7.8 tienen igual área, halle el área de la región sombreada.

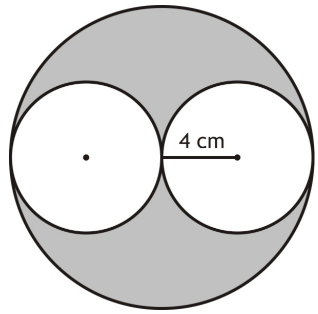


Figura 7.8

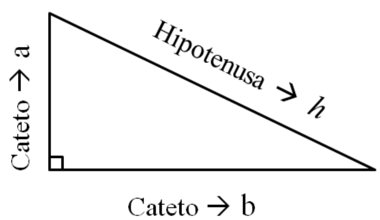
Lección 8

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



Entonces

$h^2 = a^2 + b^2$.

Figura 8.1

Prueba

Existente diversas demostraciones de este importantísimo teorema. A continuación veremos una prueba geométrica de este teorema.

Construyamos un cuadrado cuyos lados tienen longitud $a + b$ (véase la figura 8.2).

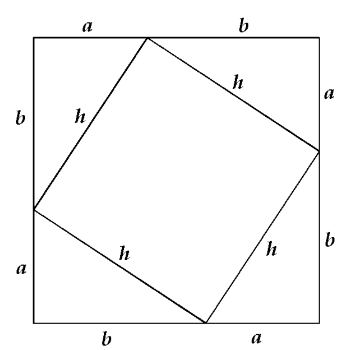


Figura 8.2

Como los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180°, vemos que los ángulos α y β de la figura 8.3 deben sumar 90°. Por lo tanto, el cuadrilátero de lado h es en realidad un cuadrado.

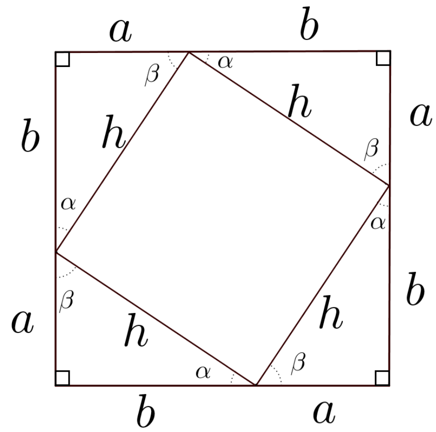


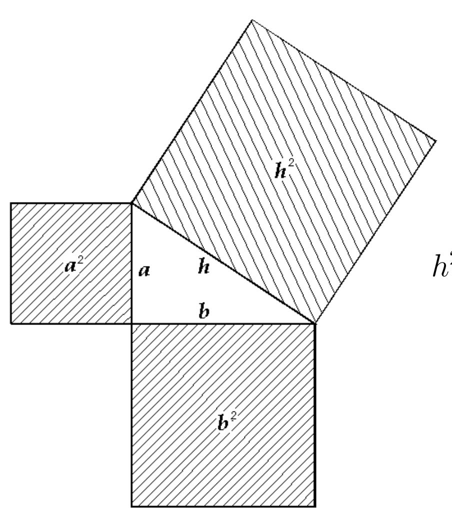
Figura 8.3

Volviendo a la figura 8.2, podemos descomponer el área del cuadrado de lado $a+b$ como la suma del área del cuadrado de lado h y el área de 4 triángulos rectángulos y congruentes.

Área del cuadrado de lado $a+b$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Área del cuadrado de lado h	h^2
Área de los 4 triángulos cuyos catetos son a y b	$4(ab/2) = 2ab$

Luego, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + h^2$, y así, $h^2 = a^2 + b^2$.

El teorema de Pitágoras se puede interpretar geométricamente diciendo que el área del cuadrado construido teniendo la hipotenusa como lado, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos teniendo como lado cada uno de los catetos.



$$h^2 = a^2 + b^2.$$

Figura 8.4

Ejemplo 8.1

Pruebe que en un triángulo equilátero de lado a la altura está dada por $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, y por lo tanto su área $\mathcal{A}_T$ es

$$\mathcal{A}_T = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Solución

En la figura 8.5, como el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero, el segmento $\overline{CD}$ es mediana y mediatriz.

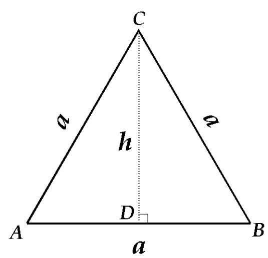


Figura 8.5

Por lo tanto, usando el teorema de Pitágoras, tenemos que $a^2 = h^2 + (a/2)^2$. Entonces $h^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$ y así $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. En consecuencia, $\mathcal{A}_T = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Ejemplo 8.2

El perímetro de la figura que se muestra a continuación es 20 m. Halle el valor de R.

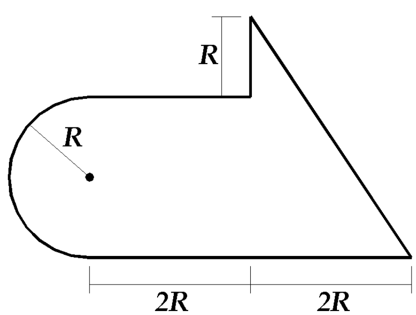


Figura 8.6

Solución

Primero expresemos el perímetro de la figura en términos de R.

El perímetro L del semicírculo de radio R es $L = \frac{1}{2}(2\pi R) = \pi R$ (véase la figura 8.7).

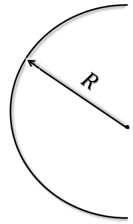


Figura 8.7

Calculemos la longitud h del segmento inclinado.

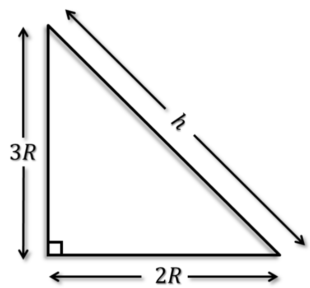


Figura 8.8

Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} h^2 &= (3R)^2 + (2R)^2, \\ h^2 &= 9R^2 + 4R^2, \\ h^2 &= 13R^2, \\ h &= \sqrt{13}R. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el perímetro P_F de la figura es

$$\begin{aligned} P_F &= \pi R + 2R + R + \sqrt{13}R + 2R + 2R \\ &= (7 + \sqrt{13} + \pi)R. \end{aligned}$$

Como $P_F = 20$ m, entonces $(7 + \sqrt{13} + \pi)R = 20$ m, y así

$$R = \frac{20}{7 + \sqrt{13} + \pi} \text{ m.}$$

Ejercicios

1. Sea ΔABC un triángulo equilátero con lado L. Si desde cada uno de los vértices se traza un arco de circunferencia con radio $\dfrac{L}{2}$, como se muestra en la figura 8.9, calcule el área sombreada en términos de L.

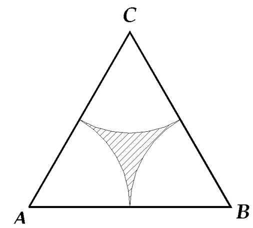


Figura 8.9

2. Se pide recortar en cada uno de los vértices de un cuadrado de lado a, un triángulo isósceles del mismo tamaño, de modo que el perímetro del octágono resultante sea los tres cuartos del perímetro del cuadrado (véase la figura 8.10). ¿Cuál es la longitud de los lados congruentes del triángulo isósceles?

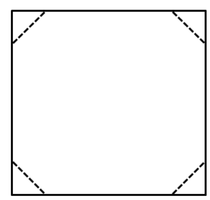


Figura 8.10

3. Con un alambre de 100 cm se construyen un cuadrado de lado L y un triángulo equilátero de lado w, usando todo el alambre disponible. Calcule **la suma** de las áreas de las dos figuras:

   (a) en términos de L,

   (b) en términos de w.

4. Un carro parte de un punto A y viaja en línea recta durante 2 horas, en dirección este y a una velocidad de 40 km/h. Luego viaja en línea recta durante una hora, en dirección norte y a una velocidad de 60 km/h. Al final del recorrido, ¿qué tan lejos se encuentra del punto A?

5. Encuentre el área de un hexágono regular de lado l. *Sugerencia:* Divida el hexágono regular en 6 triángulos.

Lección 9

Cuerpos geométricos I

Conceptos básicos

Un **sólido** o **cuerpo geométrico** es una figura geométrica de tres dimensiones: largo, ancho y alto, que ocupa un lugar en el espacio y por lo tanto tiene volumen. Los sólidos o cuerpos geométricos se pueden clasificar en poliedros y cuerpos redondos.

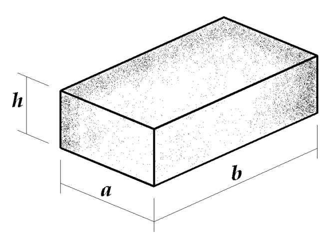
Un **poliedro** es un sólido limitado por polígonos y un **cuerpo redondo** es un sólido que tiene al menos una cara curva.

El **volumen de un sólido** es la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo y está dado en unidades cúbicas.

El **área superficial** de un sólido es la suma de las áreas de las superficies que limitan el sólido y está dada en unidades cuadradas o de área.

Volumen y área superficial de algunos sólidos

1. **Paralelepípedo rectangular:** es un poliedro de 6 caras, cada una de las cuales es un rectángulo.



a: ancho
b: largo
h: altura

Figura 9.1

Volumen: $V = abh$

Área superficial: $A = 2ab + 2ah + 2bh$

Un paralelepípedo rectangular es un **cubo** si $a = b = h$.

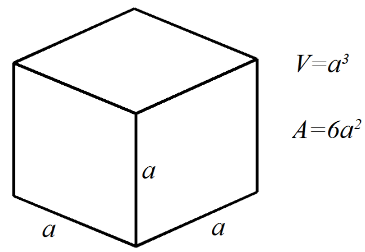
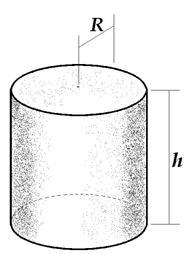


Figura 9.2

Un cubo de lado 1 tiene un volumen de 1 unidad cúbica. El volumen abh de un paralelepípedo rectangular indica cuantos cubos de lado 1 "caben" en el paralelepípedo.

2. **Cilindro circular recto:** es un cuerpo redondo limitado por dos círculos congruentes y paralelos, llamados **bases** del cilindro, y por una cara curva que al abrirse es un rectángulo en el cual un lado es la longitud de la circunferencia que encierra el círculo y el otro es la **altura** del cilindro. Cualquier sección transversal es un círculo paralelo y congruente a las bases.



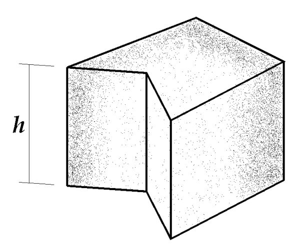
R: radio de la base
h: altura del cilindro

Volumen:
$V = \pi R^2 h$

Área superficial:
$A = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$

Figura 9.3

3. **Prisma:** es un poliedro que tiene dos caras paralelas que son polígonos congruentes (llamados **bases**) y las demás caras son paralelogramos. La distancia entre las bases es la **altura** del prisma. Cualquier sección transversal es un polígono paralelo y congruente a las bases.



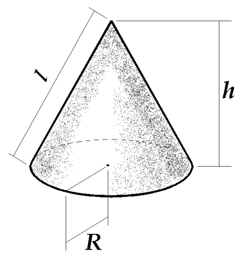
B: área de la base
P: perímetro de la base
h: altura del prisma

Volumen:
$V = Bh$

Área superficial:
$A = 2B + Ph$

Figura 9.4

4. **Cono circular recto:** es un cuerpo redondo que tiene como **base** un círculo y su superficie lateral se obtiene al unir un punto exterior, llamado **vértice** del cono, con cada punto de la circunferencia por medio de segmentos de recta. Además, para que el cono sea recto, el segmento de recta que une el vértice del cono con el centro del círculo debe ser perpendicular al círculo. La longitud de este segmento de recta es la **altura** del cono.



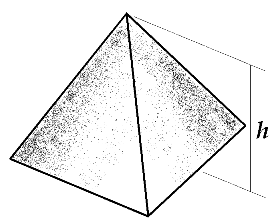
R: radio de la base
h: altura

Volumen:
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Área superficial:
$A = \pi R l + \pi R^2$

Figura 9.5

5. **Pirámide:** es un poliedro que tiene un polígono como **base** y las demás caras son triángulos que se encuentran en un punto llamado **vértice** de la pirámide. La altura de una pirámide es la distancia del vértice al plano determinado por la base.



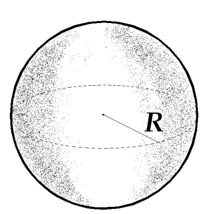
B: área de la base
h: altura

Volumen:
$V = \frac{1}{3}Bh$

Figura 9.6

El **área superficial** de una pirámide depende de la forma de la base y de los triángulos laterales.

6. **Esfera:** es el sólido limitado por la superficie cerrada formada por todos los puntos del espacio que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado **centro**. A la distancia fija la llamamos **radio** de la esfera y la denotamos por R.



Volumen:
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Área superficial:
$A = 4\pi R^2$

Figura 9.7

Ejemplo 9.1

Se va a construir en cemento el sólido que se muestra en la figura 9.8 compuesto por un cilindro circular recto de 18 cm de altura y 7 cm de radio con 2 semiesferas en sus extremos.

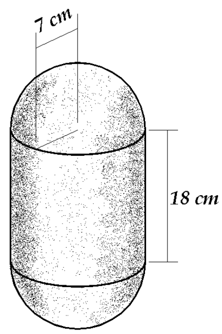


Figura 9.8

¿Cuánto cemento se requiere para la construcción del sólido? Si se quiere proteger el sólido con una lámina de acrílico, ¿qué cantidad de acrílico se necesita?

Solución

El volumen del sólido es igual al volumen del cilindro circular recto más el volumen de dos semiesferas, o equivalentemente, el volumen del cilindro más el volumen de una esfera:

$$V = \pi \cdot 7^2 \cdot 18 + \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3 = \frac{4018}{3}\pi \quad \text{cm}^3.$$

En forma similar, el área superficial es igual al área superficial de dos semiesferas (o de una esfera) más el área superficial de la parte cilíndrica:

$$A = 4\pi \cdot 7^2 + 2\pi \cdot 7 \cdot 18 = 448\pi \text{ cm}^2.$$

Entonces se requieren $\frac{4018}{3}\pi$ cm^3 de cemento para construir el sólido, y 448π cm^2 de acrílico para recubrirlo.

Ejercicios

1. Calcule el volumen y el área superficial de un cono circular recto de altura 3 cm y radio de la base 4 cm.
2. Encuentre el volumen de una esfera de 8 cm de diámetro.
3. Halle el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 5 m y altura 7 m.
4. Determine el volumen y el área superficial de un cilindro circular recto de altura 8 cm y radio de la base 5 cm.

Lección 10

Cuerpos geométricos II

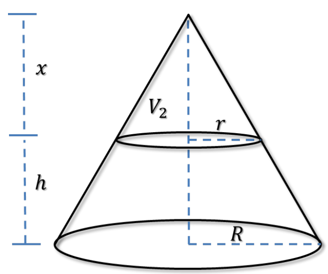
Más ejemplos

Ejemplo 10.1

Calcule el volumen de un tronco de cono de 7.6 cm de altura, sabiendo que los radios de sus bases miden 4.9 cm y 2.1 cm.

Solución

El volumen del tronco de cono se puede hallar como la diferencia entre el volumen de un cono grande y un cono pequeño, tal y como se muestra en la figura 10.1.



$$\begin{aligned} r &= 2.1 \text{ cm} \\ R &= 4.9 \text{ cm} \\ h &= 7.6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Figura 10.1

Tenemos que

$$V_{tronco} = V_{total} - V_2,$$

$$V_{total} = \frac{1}{3}\pi R^2(x+h), \tag{10.1}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 x. \tag{10.2}$$

Por semejanza de triángulos vemos que

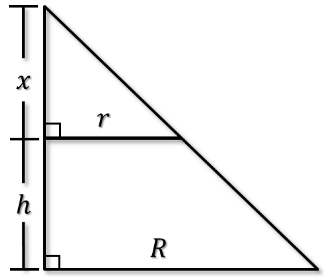


Figura 10.2

$$\begin{aligned}\frac{R}{r} &= \frac{h+x}{x},\\ Rx &= r(x+h),\\ Rx &= rx + rh,\\ (R-r)x &= rh.\end{aligned}$$

Luego

$$x = \frac{rh}{R-r}. \tag{10.3}$$

Sustituyendo (10.3) en (10.1) obtenemos que

$$V_{total} = \frac{1}{3}\pi R^2 \left(\frac{rh}{R-r} + h\right).$$

Y reemplazando los datos del problema vemos que $V_{total} \approx 334.40$ cm^3. Por otro lado, reemplazando (10.3) en (10.2) tenemos que

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\frac{rh}{R-r}\right) \approx 26.32 \text{ cm}^3,$$

y así

$$V_{tronco} = V_{total} - V_2 \approx 334.40 cm^3 - 26.32 \text{ cm}^3.$$

Por lo tanto, $V_{tronco} \approx 308.08$ cm^3.

Ejemplo 10.2

Un sólido está conformado por un cilindro circular recto de radio R y altura $2R$, una semiesfera en un extremo y en el otro un cono circular recto de altura R. El volumen total del sólido es 3π m^3. Halle el área de su superficie.

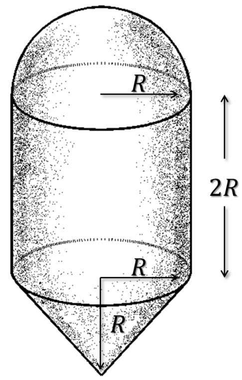


Figura 10.3

Solución

Para encontrar el área de la superficie necesitamos calcular primero el valor de R. Para ello usaremos el hecho de que conocemos el volumen del sólido. Este volumen V_T se puede descomponer como

$$V_T = V_{semiesfera} + V_{cilindro} + V_{cono}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) + \pi R^2(2R) + \frac{1}{3}\pi R^2 R \\ &= \frac{2}{3}\pi R^3 + 2\pi R^3 + \frac{1}{3}\pi R^3 \\ &= \left(\frac{2}{3} + 2 + \frac{1}{3}\right)\pi R^3 \\ &= \left(\frac{9}{3}\right)\pi R^3 = 3\pi R^3. \end{aligned}$$

Pero $V_T = 3\pi \text{ m}^3$, luego

$$\begin{aligned} 3\pi R^3 &= 3\pi \text{ m}^3, \\ R^3 &= 1 \text{ m}^3, \\ R &= 1 \text{ m}. \end{aligned}$$

Ahora que conocemos R, hallemos el área superficial A_s del sólido:

$$A_s = A_{semiesfera} + A_{cilindro} + A_{cono}.$$

Calculemos por separado cada una de estas áreas.

Semiesfera: $A_{semiesfera} = \frac{1}{2}(4\pi R^2) = 2\pi R^2$.

Cilindro sin tapas: $A_{cilindro} = 2\pi R(2R) = 4\pi R^2$.

Cono sin base:

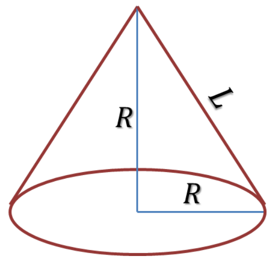


Figura 10.4

$$
\begin{aligned}
L^2 &= R^2 + R^2 = 2R^2,\\
L &= \sqrt{2}R.\\
A_{cono} &= \pi RL = \pi R(\sqrt{2}R),\\
A_{cono} &= \sqrt{2}\pi R^2.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
A_s &= 2\pi R^2 + 4\pi R^2 + \sqrt{2}\pi R^2\\
&= (6+\sqrt{2})\pi R^2\\
&= (6+\sqrt{2})\pi(1\ \mathrm{m})^2\\
&= (6+\sqrt{2})\pi\ \mathrm{m}^2.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10.3

Encuentre el volumen del sólido de la figura 10.5, compuesto por un prisma y una pirámide, cuyas bases son un hexágono regular de lado 4 cm.

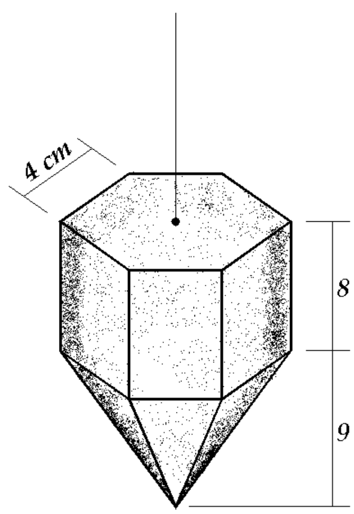


Figura 10.5

Solución

El volumen del sólido es la suma del volumen del prisma y del volumen de la pirámide, y éstos dependen del área del hexágono regular de lado $a = 4$ cm.

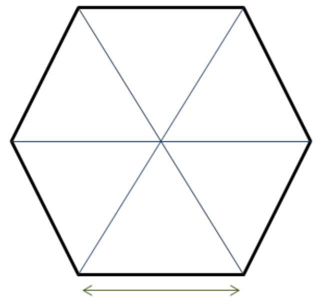


Figura 10.6

El área A_H de este hexágono regular se puede ver como la suma de las áreas de 6 triángulos equiláteros de lado $a = 4$ cm. En la Lección 8 vimos cómo calcular el área de un triángulo equilátero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A_H &= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) \\ &= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(4 \text{ cm})^2\right) \\ &= 24\sqrt{3} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, sean $h_1 = 8$ cm y $h_2 = 9$ cm las alturas del prisma y de la pirámide, respectivamente. Entonces el volumen V_S del sólido es

$$\begin{aligned} V_S &= V_{\text{prisma}} + V_{\text{pirámide}} \\ &= A_H\, h_1 + \frac{1}{3}A_H\, h_2 \\ &= \left(24\sqrt{3} \text{ cm}^2\right)(8 \text{ cm}) + \frac{1}{3}\left(24\sqrt{3} \text{ cm}^2\right)(9 \text{ cm}) \\ &= (192 + 72)\sqrt{3} \text{ cm}^3 \\ &= 264\sqrt{3} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Considere un envase con tapas, en forma de un cilindro circular recto de radio R, altura h, volumen V y área superficial A. Encuentre:

   (a) A en términos de R y V.

(b) A en términos de h y V.

2. Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y 30 cm de altura contiene tres pelotas de tenis bien encajadas. Calcule el volumen de aire que hay en su interior.

3. La base de una pirámide es un hexágono regular de 15 cm de lado y su altura es de 30 cm. Halle su volumen.

   Si partimos esta pirámide con un plano paralelo a la base que corta a la altura en la mitad, halle el volumen de cada una de las dos partes resultantes.

4. Halle el volumen de la esfera inscrita en un cono circular recto de altura 8 cm y radio de la base 6 cm.

Lección 11

Nociones sobre conjuntos I y sistemas numéricos

Nociones sobre conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos, llamados **elementos** del conjunto.

Un conjunto puede describirse:

- **Por extensión**: haciendo una lista explícita de sus elementos separados por comas y encerrados entre llaves, ó
- **Por comprensión**: dando la condición o condiciones que cumplen los elementos del conjunto.

Si A es un conjunto decimos que a **pertenece a** A, y escribimos $a \in A$, si a es un elemento de A. En caso contrario decimos que a **no pertenece a** A y escribimos $a \notin A$.

Ejemplo 11.1

El conjunto A cuyos elementos son los números naturales menores que 5 puede escribirse así: $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Observemos que $1 \in A$ y que $5 \notin A$.

Para nosotros tendrán sentido especial los conjuntos numéricos.

Sistemas numéricos

- Los **números naturales** son: $1, 2, 3, 4, ...$

  Utilizamos el símbolo $\mathbb{N}$ para representar al conjunto de todos lo números naturales, es decir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

- Los **números enteros** están formados por los números naturales junto con los números enteros negativos y el 0. Denotamos por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros. Es decir, $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

  Algunas veces se acostumbra escribir $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.

- El conjunto de los **números racionales** se obtiene al formar cocientes de números enteros. Este conjunto lo denotamos por $\mathbb{Q}$. Luego, $r \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $r = \dfrac{p}{q}$, con

$p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Números como $\frac{3}{5}$, $\frac{-7}{4}$, $0 = \frac{0}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $0.1 = \frac{1}{10}$ son ejemplos de números racionales.

¡Recuerde que no es posible dividir por cero, por tanto expresiones como $\frac{3}{0}$ ó $\frac{0}{0}$ no están definidas!

- Existen números que no pueden expresarse en la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Estos números se denominan **irracionales**. Denotados por $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales. Es posible probar que números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, pertenecen a $\mathbb{I}$.

- El conjunto de lo **números reales** se representa por $\mathbb{R}$ y consta de la unión de los racionales y los irracionales.

  Todos los números reales tienen una **representación decimal**. Si el número es racional, entonces, su decimal correspondiente es periódico. Por ejemplo $\frac{1}{2} = 0.5000... = 0.5\overline{0}$, $\frac{1}{3} = 0.3333... = 0.\overline{3}$, $\frac{157}{495} = 0.3171717... = 0.3\overline{17}$, $\frac{9}{7} = 1.285714285714... = 1.\overline{285714}$.

  La barra significa que la sucesión de cifras debajo de ella se repite indefinidamente. Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica, por ejemplo $\sqrt{2} = 1.414213562373095...$, $e = 2.71828182845904523 54....$, $\pi = 3.14159265358979323846....$

  En la práctica se acostumbra aproximar un número irracional por medio de uno racional, por ejemplo $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $e \approx 2.71828$, $\pi \approx 3.1416$.

  Dada la representación decimal periódica de un número x podemos hallar una fracción equivalente multiplicando éste por potencias adecuadas de 10, y luego restando para eliminar la parte que se repite.

  Ejemplo 11.2

  Sea $x = 5.4383838....$ Para convertirlo en un cociente de dos enteros, debemos multiplicarlo por dos potencias adecuadas de 10, de tal forma que al restarlos se cancelen las partes decimales. En este caso

$$\begin{array}{rcl} 1000x & = & 5438.3838\ldots \\ 10x & = & 54.3838\ldots \\ \hline 990x & = & 5384. \end{array}$$

  Por consiguiente, $x = \frac{5384}{990}$.

Ejercicios

1. Exprese cada uno de los decimales periódicos en forma de fracción:

(a) $5.\overline{23}$

(b) $1.3\overline{7}$

(c) $2.1\overline{35}$

(d) $0.6\overline{4}$.

2. Ordene de menor a mayor los números racionales $1.4\overline{3}$, $1.3\overline{9}$ y $1.44\overline{2}$.
3. Ordene de menor a mayor los números racionales $1.4\overline{3}$, $\frac{9}{7}$ y $\frac{8}{5}$.
4. ¿El producto de dos números irracionales es siempre un número irracional? ¿Qué puede decir de la suma?

Lección 12

Propiedades de los números reales I

Operaciones en los números reales y sus propiedades

En $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones: suma o adición y producto o multiplicación.

Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, la **suma de** a **y** b, denotada $a + b$, y el **producto de** a **y** b, denotado $a \cdot b$, ó $a \times b$ ó simplemente ab, son también elementos de $\mathbb{R}$, que cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad	**Suma**	**Producto**
Conmutativa	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$a(b + c) = ab + ac$ $(a + b)c = ac + bc$	

Usando estas propiedades podemos probar resultados importantes.

Ejemplo 12.1

Pruebe que $(a + b)(a + b) = aa + 2ab + bb$.

Solución

Usando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y la propiedad conmutativa del producto, tenemos que:

$$(a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b = aa + ab + ba + bb = aa + 2ab + bb.$$

Usando el hecho de que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot a = a^2$, escribimos la igualdad anterior como:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Otras propiedades de los números reales

Entre los números reales, el 0 y el 1 juegan un papel importante en la suma y el producto, respectivamente:

- $0 \in \mathbb{R}$, es tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$. Al número 0 se le llama el elemento **neutro para la suma**.
- Dado $a \in \mathbb{R}$ existe un único $b \in \mathbb{R}$ tal que $a + b = 0$. Dicho número b se denota por $-a$ y se llama **inverso aditivo** de a. Es decir, $a + (-a) = 0$.
- $1 \in \mathbb{R}$ es tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$. Al número 1 se le llama el elemento **neutro para el producto**.
- Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces existe un único número $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot b = 1$. Tal número b se denota por $\dfrac{1}{a}$ ó por a^{-1}, y se llama **inverso multiplicativo** o **reciproco** de a. Es decir, para $a \neq 0$ se tiene que $a \cdot \dfrac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1$.
- Si a y b son números reales, el número $a + (-b)$ se escribe también $a - b$ y se llama la **resta** o **diferencia** de a y b.
- Si a y b son números reales, con $b \neq 0$, el número $a \cdot \dfrac{1}{b}$ se escribe también $\dfrac{a}{b}$ y se llama el **cociente** de a y b. A la expresión $\dfrac{a}{b}$ se le llama **fracción**, a se llama **numerador** y b **denominador** de la fracción.

Con base en las definiciones y en las propiedades de la suma y la resta de números reales, podemos probar las siguientes propiedades, conocidas como **"leyes de signos"**:

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $(-1)a = -a$,
2. $-(-a) = a$,
3. $(-a)b = a(-b) = -ab$,
4. . $(-a)(-b) = ab$,
5. $-(a + b) = -a - b$.
6. $-(a - b) = b - a$,
7. $a \cdot 0 = 0$.

La propiedad 6 nos dice que $a - b$ es el inverso aditivo de $b - a$.

La propiedad 5 puede usarse con más de 2 términos, así:

$$-(a + b + c) = -a - b - c.$$

Ejemplo 12.2

Utilizando propiedades de número reales escriba las siguientes expresiones sin usar paréntesis:

1. $-(-x+y)$,
2. $-(x-y+z)$.

Solución

1. Tenemos que

$$\begin{aligned} -(-x+y) &= -(-x)-y && \text{(propiedad 5)} \\ &= x-y && \text{(propiedad 2).} \end{aligned}$$

   Luego, $-(-x+y)=x-y$.

2. Tenemos que

$$\begin{aligned} -(x-y+z) &= -x-(-y)-z && \text{(propiedad 5)} \\ &= -x+y-z && \text{(propiedad 2).} \end{aligned}$$

   Luego, $-(x-y+z)=-x+y-z$.

Caracterización y propiedades de algunos números reales

- Un número a es un **número par** si puede escribirse en la forma $a=2k$, con $k\in\mathbb{Z}$.

  6 es un número par ya que $6=2k$ con $k=3$; 0 es de la forma $2k$ con $k=0$, luego 0 es un número par; como -8 es de la forma $2k$ con $k=-4$, entonces -8 es par.

- Un número a es un **número impar** si puede escribirse en la forma $a=2k+1$, con $k\in\mathbb{Z}$.

  3 es de la forma $2k+1$ con $k=1$, entonces 3 es impar; como -7 es de la forma $2k+1$ con $k=-4$, entonces -7 es un número impar.

- Dados $d\in\mathbb{Z}$ y $b\in\mathbb{Z}$, con $d\neq 0$, decimos que d divide a b ó que d es un **divisor** de b, si existe $a\in\mathbb{Z}$ tal que $b=ad$. También se acostumbra decir que d es un **factor** de b y que b es un múltiplo de d.

- Decimos que d es el **Máximo Común Divisor** de los enteros a y b, con $a\neq 0$ ó $b\neq 0$, si d es el mayor número entero positivo que los divide a ambos, es decir, d es el mayor de los divisores comunes de a y b.

  El máximo común divisor de 24 y 30 es 6; el máximo común divisor de 7 y 18 es 1; el máximo común divisor de 0 y 12 es 12.

- Decimos que m es el **Mínimo Común Múltiplo** de los enteros a y b, con $a\neq 0$ y $b\neq 0$, si m es el menor número entero positivo que es múltiplo de ambos, es decir, m es el menor entero positivo que es divisible por a y por b.

El mínimo común múltiplo de 6 y 10 es 30; el mínimo común múltiplo de 15 y 14 es 210. D

- Dos números enteros a, b son **primos relativos** si el máximo común divisor de a y b es 1.

  7 y 18 son primos relativos.

- Un número racional $\dfrac{a}{b}$ está en **forma reducida, o "simplificado"** si a y b son primos relativos.

  $\dfrac{7}{18}$ está en forma reducida; $\dfrac{16}{12}$ no está en forma reducida, podemos simplificarlo y escribirlo en forma reducida como $\dfrac{4}{3}$.

  Todo número racional puede representarse en forma reducida.

  $\dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$.

- Un entero positivo $p \neq 1$ es un **número primo** si sus únicos divisores positivos son 1 y p.

  Los números $2, 3, 5, 7, 11, 37, 523$ son números primos.

  Los números $6, 8, 9, 20$ no son primos, ya que al menos 2 es divisor de 6, de 8, y de 20, y 3 es divisor de 9.

- Si $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$, y a no es primo, decimos que a es número **compuesto.**

- **Teorema fundamental de la aritmética:** Todo número entero mayor que 1 puede descomponerse en forma única como un producto de números ó factores primos.

Notas

- En la descomposición de un número los números primos pueden repetirse y no importa el orden en el que aparecen, ya que el producto de números reales cumple la propiedad conmutativa.

- Cuando escribimos un número como producto de factores primos, decimos que hemos "factorizado" el número.

Ejemplo 12.3

$2^2 \times 17 \times 43$ es la descomposición o factorización de 2 924, es decir, $2924 = 2^2 \times 17 \times 43$.

Ejercicios

1. Diga cuál propiedad de los números reales se está usando:

   (a) $5 + 8 = 8 + 5$,

   (b) $(3x + y) + 5z = 3x + (y + 5z)$,

(c) $(4x+2)\,7 = 28x+14$.

2. Usando las propiedades de los números reales, escriba las expresiones sin paréntesis:

   (a) $5\,(x-y)$,

   (b) $-\dfrac{3}{2}\,(2a+16b)$,

   (c) $(6k)\,(2l-4m+7n)$.

3. Halle el Máximo Común Divisor de los números

   (a) 1820 y 2574,

   (b) 110 y 273,

   (c) $144, 96$ y 64.

4. Descomponga los siguientes números enteros en sus factores primos:

   (a) 300,

   (b) 1386,

   (c) 2160.

5. Simplifique completamente las siguientes fracciones:

   (a) $\dfrac{126}{90}$,

   (b) $\dfrac{1540}{1680}$.

Lección 13

Propiedades de los números reales II

Operaciones con fracciones

1. Suma de fracciones

Con el mismo denominador: para sumar fracciones con el mismo denominador ponemos el denominador común y sumamos los numeradores.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \text{ con } c \neq 0.$$

Ejemplo 13.1

$\dfrac{15}{7}+\dfrac{23}{7}=\dfrac{38}{7}.$

Con distinto denominador: Para sumar fracciones que tienen distinto denominador, procedemos de acuerdo a la fórmula

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \qquad \text{con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0.$$

Esta fórmula es el resultado de ampliar cada fracción (multiplicar tanto el numerador como el denominador por el mismo número), la primera por d y la segunda por b, de tal forma que estas fracciones ampliadas equivalentes tengan el mismo denominador, en este caso bd, y así poder proceder como en la situación de denominadores iguales.

Ejemplo 13.2

$\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{5\cdot 7+3\cdot 2}{3\cdot 7}=\dfrac{35+6}{21}=\dfrac{41}{21}.$

Cuando tenemos la suma de dos o más fracciones cuyos numeradores y denominadores son enteros, también podemos proceder de la siguiente manera. Hallamos el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores, llamado también mínimo común denominador. Ampliamos cada fracción por un número adecuado tal que las nuevas fracciones equivalentes tengan como denominador el MCM. Finalmente sumamos estas fracciones equivalentes como en el caso de denominadores iguales.

Ejemplo 13.3

Calcule $\dfrac{3}{64}+\dfrac{7}{48}$.

Solución

Como $64 = 2^6$ y $48 = 2^4 \cdot 3$, el MCM de 64 y 48 es el producto de los factores de cada uno, usando sólo la potencia más alta de cada factor, es decir, el MCM de 64 y 48 es $2^6 \cdot 3 = 192$.

Debemos entonces ampliar las fracciones, para convertirlas en fracciones que tengan como denominador 192

$$\frac{3}{64}+\frac{7}{48}=\frac{3\cdot 3}{64\cdot 3}+\frac{7\cdot 4}{48\cdot 4},$$

$$\frac{3}{64}+\frac{7}{48}=\frac{9}{192}+\frac{28}{192}=\frac{37}{192}.$$

2. Producto de fracciones

Para multiplicar fracciones basta con hacer el producto de los numeradores y el de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \text{ con } b\neq 0 \text{ y } d\neq 0.$$

Ejemplo 13.4

$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{15}$.

Ejemplo 13.5

¿Cómo se calcula el **cociente** de dos fracciones?

Solución

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}, \text{ con } b\neq 0,\ c\neq 0,\ \text{y } d\neq 0.$$

Por ejemplo

$\dfrac{2}{5}\div\dfrac{3}{7}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{14}{15}$.

Ejemplo 13.6

Pruebe que si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ entonces $ad=bc$, con $b\neq 0$, y $d\neq 0$.

Solución

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$, luego $\frac{ad-bc}{bd} = 0$, y así $ad - bc = 0$, entonces $ad = bc$.

Orden en los números reales

Todo número real se puede representar gráficamente como un punto sobre una línea recta, la cual llamaremos **recta real** y, recíprocamente, todo punto sobre la recta real representa un número real, es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\mathbb{R}$ y los puntos de la recta. En esta representación el 1 se encuentra a la derecha del 0.

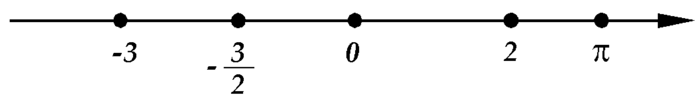


Figura 13.1

Geométricamente, si a y b son números reales, decimos que a **es mayor que** b, y escribimos $a > b$, si a está a la "derecha" de b en la recta real. En este caso decimos también que b **es menor que** a, y escribimos $b < a$.

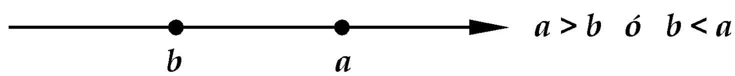


Figura 13.2

Si un número es **mayor** que **cero** decimos que es un número **positivo, e**s decir, a es un número positivo si $a > 0$.

Si un número es **menor** que **cero** decimos que es un número **negativo,** es decir, si $a < 0$, a es un número negativo.

Los números **positivos** (o de **signo positivo**) son los que están ubicados a la "derecha" de 0 en la recta real; los que están ubicados a la "izquierda" de 0 son los **negativos** (o de **signo negativo**).

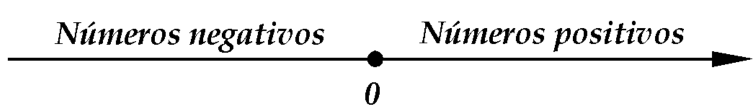


Figura 13.3

Definición: Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

Decimos que a **es mayor que** b y escribimos $a > b$, si $a - b$ es un número positivo, es decir si $(a - b) > 0$.

Decimos que a **es menor que** b, y escribimos $a < b$, si $a - b$ es un número negativo, o sea si $(a - b) < 0$.

Claramente si $a > b$, entonces $b < a$.

La expresión $a \leq b$ (ó $b \geq a$) se utiliza en lugar de $a < b$ ó $a = b$, y se lee "a es menor que o igual a b", ó "b es mayor que o igual a a".

Ejemplo 13.7

$3 < 5$ pues $5 - 3 = 2 > 0$; $4 \leq 4$ ya que $4 = 4$.

Si ubicamos estos números en la recta real vemos que 3 está a la izquierda de 5, o equivalentemente, 5 está a la derecha de 3.

Similarmente la expresión $a \geq b$ se utiliza en lugar de $a > b$ ó $a = b$, y se lee "a es mayor o igual a b".

Intuitivamente decimos que los número reales están "ordenados", ya que si a y b son números reales siempre podemos determinar si $a > b$ ó $a < b$ ó $a = b$.

En adelante la expresión $a < x < b$ significará $a < x$ y $x < b$, y representaciones similares se tienen para $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$ y $a < x \leq b$.

Algunas propiedades de orden

1. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 = a \cdot a \geqslant 0$ y $a^2 = 0$ sólo si $a = 0$.

   Con base en esto podemos afirmar que $1 > 0$, ya que como $1 \neq 0$, entonces $1 = 1^2 > 0$.

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.

   - Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
   - $a = b$ ó $a < b$ ó $b < a$.
   - $a \leq b$ si y sólo si $a + c \leq b + c$.
   - Si $a \leq b$ y $c > 0$, entonces $ac \leq bc$.
   - Si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $ac \geq bc$.

Ejemplo 13.8

$3 < 8$ y $3(-3) > 8(-3)$ ya que $-3 < 0$.

Nota

Con base en las propiedades anteriores podemos demostrar que:

Si $a > 0$ entonces $-a < 0$, es decir, si a es un número positivo entonces $-a$ es un número negativo.

Si $a < 0$ entonces $-a > 0$, o sea, si a es un número negativo, entonces $-a$ es positivo.

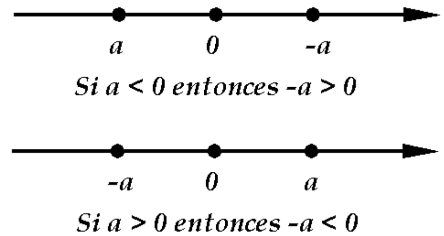


Figura 13.4

Ejercicios

1. Efectúe las operaciones indicadas y simplifique completamente su respuesta:
   (a) $\dfrac{13}{4}+\dfrac{23}{4}$,
   (b) $\dfrac{11}{5}-\dfrac{3}{25}$,
   (c) $\dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{14}{11}$,
   (d) $\dfrac{2}{3}\div\dfrac{4}{9}$.

2. Efectúe las operaciones indicadas y simplifique completamente su respuesta:
   (a) $\dfrac{1-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}$
   (b) $\dfrac{\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{15}}$
   (c) $\dfrac{3}{280}+\dfrac{1}{150}+\dfrac{11}{225}$.

3. Escriba cada enunciado en términos de desigualdades:
   (a) x es positiva.
   (b) a es mayor o igual a π.
   (c) t es menor que 4.
   (d) x es menor que $\dfrac{1}{3}$ y es mayor que -5.

Lección 14

Nociones sobre conjuntos II

Si un conjunto no tiene elementos se llama **conjunto vacío** y se denota por $\emptyset$ ó $\{\ \}$.

Ejemplo 14.1

Sea $A = \{x \in \mathbb{N}/x + 1 = 0\}$. No existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x + 1 = 0$. Luego, $A = \emptyset$. La expresión anterior se lee así: A es el conjunto cuyos elementos x son números naturales **tales que** x satisface la ecuación $x + 1 = 0$.

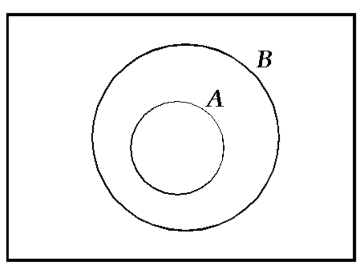
Si un conjunto es vacío o su número de elementos es un número natural se dice que el conjunto es **finito**.

Si un conjunto no es finito se dice que es **infinito**.

Ejemplo 14.2

- Sea $A = \{x \in \mathbb{N}/x < 4\}$. Claramente, A tiene 3 elementos: $A = \{1, 2, 3\}$. Luego, A es finito.
- Sea $A = \mathbb{N}$ (conjunto de números naturales). A es infinito ya que no podemos asignar un número natural que represente el número de elementos de $\mathbb{N}$.

Si A y B son conjuntos decimos que A **es subconjunto de** B, y escribimos $A \subseteq B$, si todo elemento de A es también elemento de B.



$A \subseteq B$

Figura 14.1

La anterior representación gráfica se conoce con el nombre de digrama de Venn.

Ejemplo 14.3

Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{x/x$ es una letra del abecedario$\}$.

$A \subseteq B$, pero B no es subconjunto de A y escribimos $B \nsubseteq A$.

Propiedades

Si A, B y C son conjuntos, las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $\emptyset \subseteq A$.
2. $A \subseteq A$.
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Dos conjuntos A **y** B **son iguales** si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Es decir, $A = B$ si y sólo si todo elemento de A está en B y todo elemento de B está en A.

Ejemplo 14.4

Sean $A = \{x/x$ es una vocal de la palabra mundo$\}$ y $B = \{$u, o$\}$, entonces $A = B$.

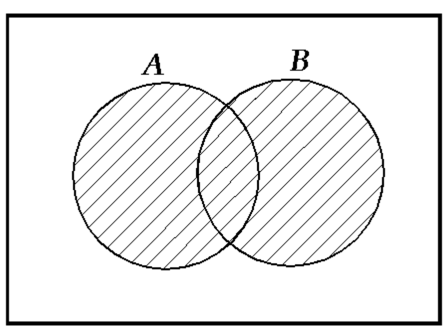
Sean $A = \{1,\ 3,\ 7\}$ y $B = \{1,\ 3,\ 7,\ 1\}$, entonces $A = B$. Esto nos dice que en un conjunto podemos suprimir los elementos repetidos, dejando sólo uno de ellos, y el conjunto no cambia.

Operaciones entre conjuntos

1. Unión

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **unión de** A **y** B, denotada por $A \cup B$, como el conjunto

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$



$A \cup B$

Figura 14.2

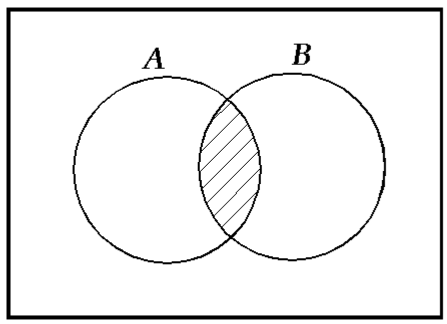
Ejemplo 14.5

Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$. Entonces $A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 12\}$. Es decir, reunimos los elementos de A y los de B en un solo conjunto sin repetir elementos.

2. Intersección

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **intersección de** A **y** B, denotada por $A \cap B$, como el conjunto

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



$A \cap B$

Figura 14.3

Ejemplo 14.6

Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ y } x \leq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ y } x \leq 3\}$. Entonces

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ y } x \leq 2\}.$$

Propiedades de la unión y de la intersección

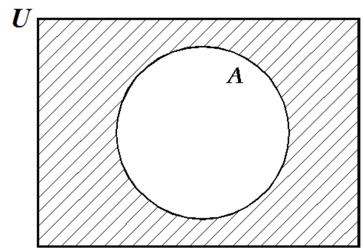
Sean A, B y C conjuntos. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $A \cup A = A$	$1'$. $A \cap A = A$
2. $A \cup \emptyset = A$	$2'$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \subseteq (A \cup B)$	$3'$. $(A \cap B) \subseteq A$
4. $B \subseteq (A \cup B)$	$4'$. $(A \cap B) \subseteq B$
5. $A \cup B = B \cup A$	$5'$. $A \cap B = B \cap A$
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$6'$. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$7'$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Complemento

Si U es un conjunto universal (el conjunto que contiene todos los elementos posibles para el problema en consideración), y A es un subconjunto de U, definimos el **complemento de** A, denotado por A', como el conjunto

$$A' = \{x \in U / x \notin A\}.$$



A'

Figura 14.4

Ejemplo 14.7

Si $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $A = \{c, f, h\}$, entonces $A' = \{a, b, d, e, g\}$.

Propiedades del Complemento

Sean A y B conjuntos. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $(A')' = A$,
2. $A \cup A' = U$,
3. $A \cap A' = \emptyset$,
4. $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
5. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Nota: Las dos últimas propiedades son conocidas como las "Leyes de De Morgan".

Ejercicios

1. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$

   y $C = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 5\}$. Halle:

   (a) $A \cap C$ y

   (b) $A \cap B$.

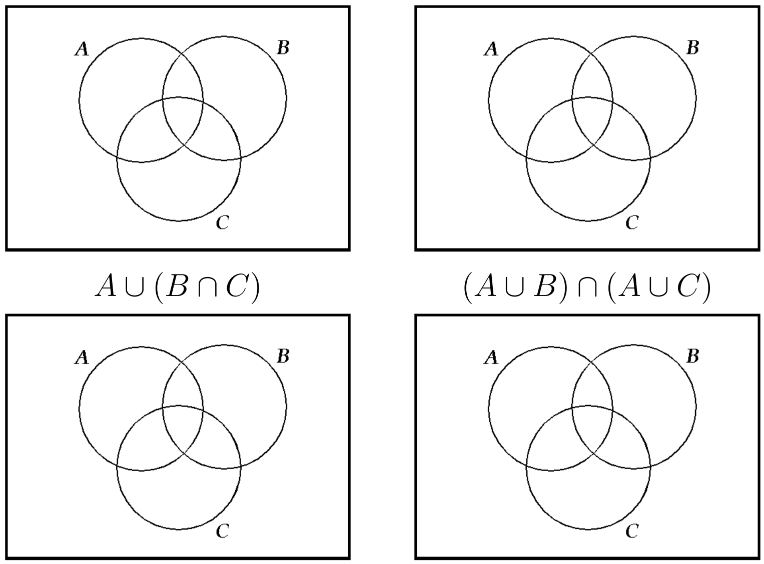
2. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} : -4 < x \leq 6\}$. Además, considere como conjunto universal al conjunto $U = \{x \in \mathbb{Z} : -10 \leq x \leq 10\}$. Halle los siguientes conjuntos:

(a) $A \cup B \cup C$,

(b) $A \cap B \cap C$,

(c) $A' \cap B$.

3. Sombree las regiones correspondientes a los conjuntos dados para ilustrar las propiedades 7 y 7' de la unión y la intersección de conjuntos.

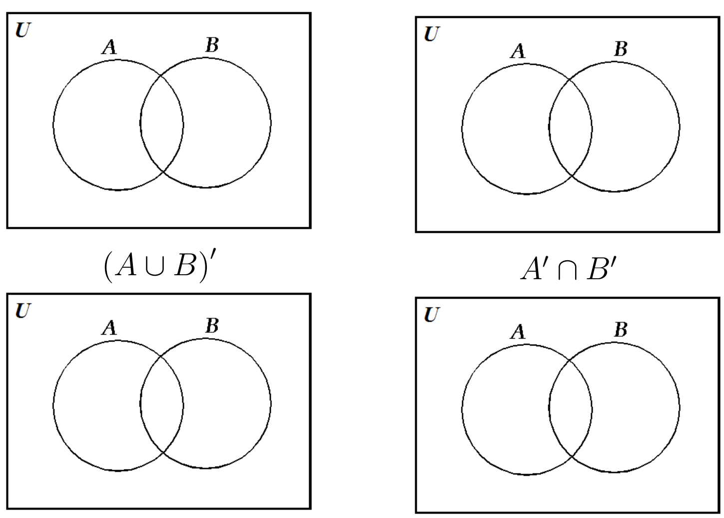


$A \cup (B \cap C)$ $\quad$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C)$ $\quad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Figura 14.5

4. Sombree las regiones correspondientes a los conjuntos dados para ilustrar las Leyes de De Morgan.



$(A \cup B)'$ $\quad$ $A' \cap B'$

$(A \cap B)'$ $\quad$ $A' \cup B'$

Figura 14.6

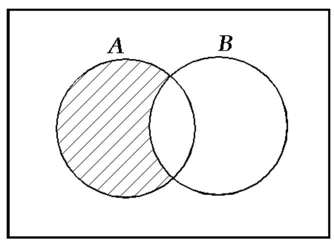
Lección 15

Nociones sobre conjuntos III

4. Diferencia

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **diferencia de** A **y** B, denotada por $A - B$, como

$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$



$A - B$

Figura 15.1

Ejemplo 15.1

Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Entonces $A - B = \{0, 2, 3, 5\}$.

Propiedades de la diferencia

Sean A y B conjuntos. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $A - B = A \cap B'$,
2. $A - B \neq B - A$,
3. $A - A = \emptyset$,
4. $A - \emptyset = A$,
5. $U - A = A'$.

Ejemplo 15.2

En cada uno de los siguientes diagramas de Venn, sombree el conjunto indicado.

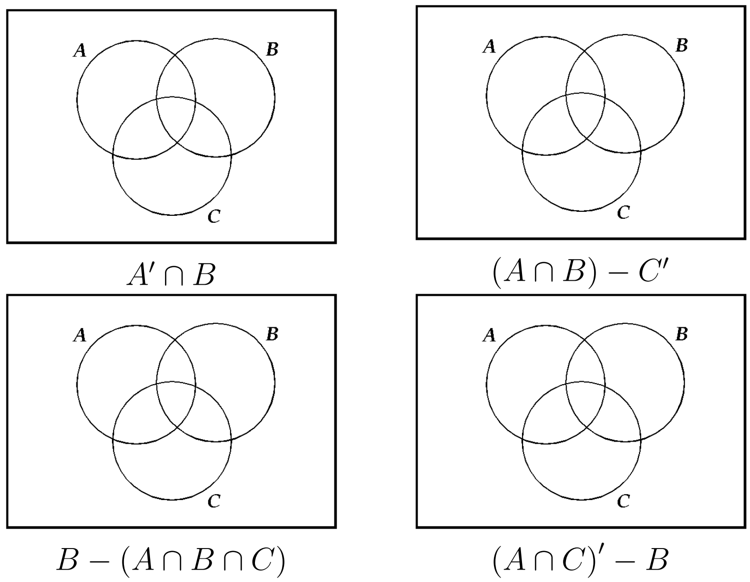


Figura 15.2

Solución

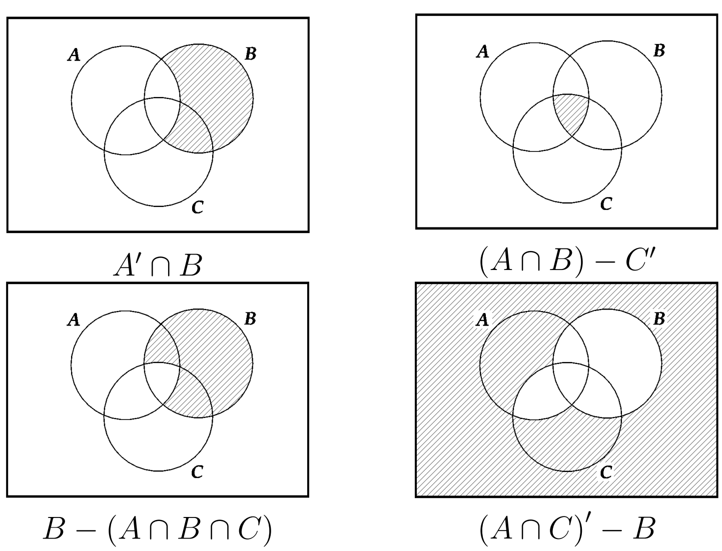


Figura 15.3

Ejemplo 15.3

Una encuesta aplicada a un grupo de jóvenes, acerca de las preferencias por alguna radio F.M. de la región, señaló que:

277 escuchan Salsa Estéreo,

233 escuchan 92.4 F.M. (Emisora U.P.B),

405 escuchan 100.4 F.M. (Emisora Unal),

165 escuchan 92.4 F.M. y 100.4 F.M.,

120 escuchan 92.4 F.M. y Salsa Estéreo,

190 escuchan Salsa Estéreo y 100.4 F.M.,

105 escuchan las tres estaciones de radio mencionadas.

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos jóvenes fueron encuestados?
2. ¿Cuántos jóvenes escuchan sólo Salsa Estéreo?
3. ¿Cuántos jóvenes escuchan sólo Salsa Estéreo y 100.4 F.M.?

Solución

Una manera fácil de resolver este problema es mediante el uso de un diagrama de Venn.

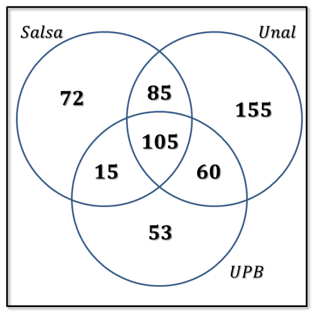


Figura 15.4

A continuación se listan los detalles de cómo llenar el anterior diagrama de Venn.

- 105 escuchan todas.

- 120 escuchan *UPB* y *Salsa*.
  Entonces $120 - 105 = 15$ escuchan sólo *UPB* y *Salsa*.

- 190 escuchan *Salsa* y *Unal*.
  Entonces $190 - 105 = 85$ escuchan sólo *Salsa* y *Unal*.

- 165 escuchan *Unal* y *UPB*.
  Entonces $165 - 105 = 60$ escuchan sólo *Unal* y *UPB*.

- 277 escuchan *Salsa*.
  Entonces $277 - 105 - 85 - 15 = 72$ escuchan sólo *Salsa*.

- 233 escuchan *UPB*.
  Entonces $233 - 105 - 15 - 60 = 53$ escuchan sólo *UPB*.

- 405 escuchan *Unal*.
  Entonces $405 - 105 - 60 - 85 = 155$ escuchan sólo *Unal*.

Por lo tanto, las respuestas son:

1. El número de jóvenes encuestados es $105 + 15 + 85 + 72 + 53 + 155$, es decir, 545.
2. 72 jóvenes escuchan sólo Salsa Estéreo.
3. 85 jóvenes escuchan sólo Salsa Estéreo y 100.4 F.M.

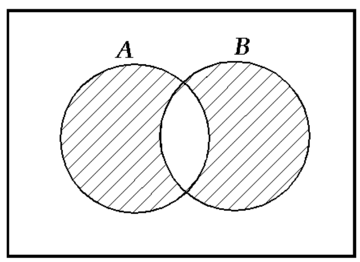
5. Diferencia simétrica

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **diferencia simétrica de A y B**, denotada $A \,\Delta\, B$, como

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)\,,$$

o equivalentemente

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$



$A \,\Delta\, B$

Figura 15.5

Ejemplo 15.4

Consideremos los conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ y } B = \{1, 4, 6, 7, 8, 9\}.$$

Por lo tanto

$$A \,\Delta\, B = \{0, 2, 3, 5, 8, 9\}.$$

Ejercicios

1. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} : -4 < x \leq 6\}$. Además, considere como conjunto universal al conjunto $U = \{x \in \mathbb{Z} : -10 \leq x \leq 10\}$. Halle los siguientes conjuntos:

(a) $A - B$

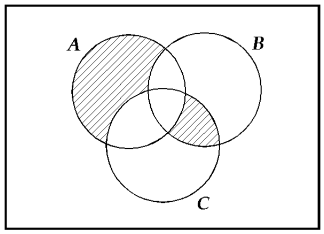
(b) $C - A$

(c) $(A \cap B) - C$

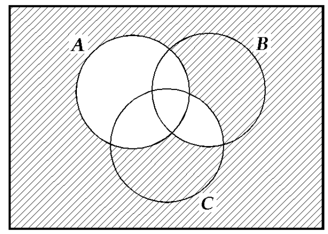
(d) $(A' \cap B') - C'$

(e) $A \,\Delta\, B$

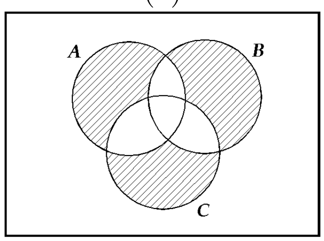
2. En cada uno de los siguientes diagramas de Venn diga a qué conjunto corresponde la parte sombreada.



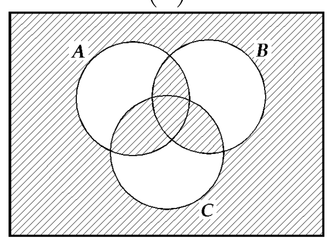
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 15.6

3. En una investigación realizada a un grupo de 100 alumnos que estudian idiomas se encontró que: 18 estudian sólo Alemán, 23 estudian Alemán pero no Español, 8 Alemán y Francés, 26 Alemán, 48 Francés, 8 Francés y Español y 24 no estudian ninguno de los tres idiomas.

   (a) Realice un diagrama de Venn que ilustre los resultados de la investigación.

   (b) ¿Cuántos alumnos estudian Español?

   (c) ¿Cuántos alumnos estudian Alemán y Español, pero no Francés?

   (d) ¿Cuántos alumnos estudian Francés pero no Español?

Lección 16

Intervalos y valor absoluto

Intervalos

Un **intervalo** es un subconjunto de $\mathbb{R}$ de ciertas características. La denominación, descripción, notación y representación geométrica de estos conjuntos es como se describe a continuación. Sean a y $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

El **intervalo abierto** entre a y b, denotado por (a, b), es el conjunto de los números reales mayores que a y menores que b. Así, $c \in (a, b)$ si $a < c$ **y** $c < b$. Estas dos expresiones se combinan así: $a < c < b$. Claramente $a \notin (a, b)$ y $b \notin (a, b)$.

Se denomina **intervalo cerrado** desde a hasta b, y se denota por $[a, b]$, al conjunto de los números reales mayores ó iguales que a y menores o iguales que b. Es decir, el intervalo cerrado incluye los extremos a y b.

Usando la notación de conjuntos, estos intervalos pueden escribirse en términos de desigualdades, así:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}, \qquad [a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}.$$

Gráficamente:

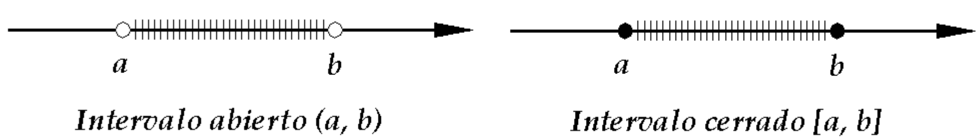
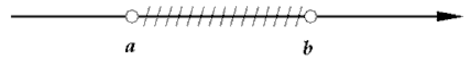
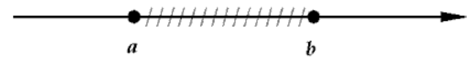
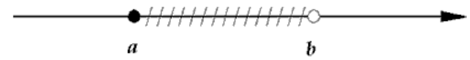
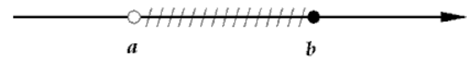
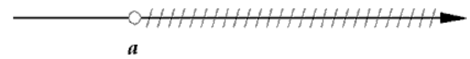
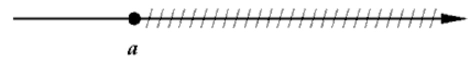
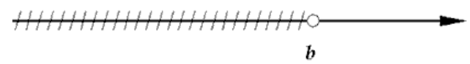
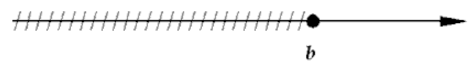
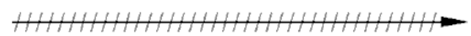


Figura 16.1

Los intervalos pueden incluir un solo punto extremo o se pueden prolongar hasta el infinito en una dirección o en ambas direcciones. En la siguiente tabla presentamos todos los tipos de intervalos:

NOTACIÓN	EN FORMA DE CONJUNTO	GRÁFICAMENTE
(a,b)	$\{x\in\mathbb{R}\ /\ a<x<b\}$	
$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\ /\ a\leq x\leq b\}$	
$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}/\ a\leq x<b\}$	
$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}/\ a<x\leq b\}$	
(a,∞)	$\{x\in\mathbb{R}\ /\ a<x\}$	
$[a,\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}/\ a\leq x\}$	
$(-\infty,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\ /\ x<b\}$	
$(-\infty,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\leq b\}$	
$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$	

Ejemplo 16.1

Expresar en términos de desigualdades los siguientes intervalos y representarlos gráficamente:

a) $[-3, 8]$,

b) $(5, 12]$,

c) $(-\infty, 2)$.

Solución

a) $[-3, 8] = \{x \in \mathbb{R}/ -3 \leq x \leq 8\}$. Gráficamente:

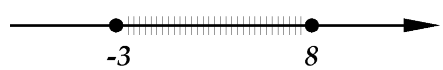


Figura 16.2

b) $(5, 12] = \{x \in \mathbb{R}/5 < x \leq 12\}$. Gráficamente:

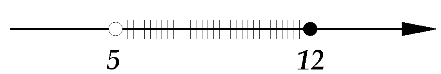


Figura 16.3

c) $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R}/x < 2\}$. Gráficamente:

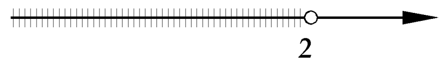


Figura 16.4

Como los intervalos son conjuntos, podemos realizar entre ellos las operaciones ya definidas para conjuntos.

Ejemplo 16.2

$[5,9] \cup (3,6) = (3,9]$, ya que

$$\{x \in \mathbb{R}/5 \leq x \leq 9\} \cup \{x \in \mathbb{R}/3 < x < 6\} = \{x \in \mathbb{R}/3 < x \leqslant 9\}.$$

Gráficamente:

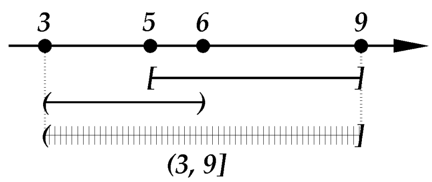


Figura 16.5

$[5,9] \cap (3,6) = [5,6)$ ya que

$$\{x \in \mathbb{R}/5 \leq x \leq 9\} \cap \{x \in \mathbb{R}/3 < x < 6\} = \{x \in \mathbb{R}/5 \leq x < 6\}.$$

Gráficamente:

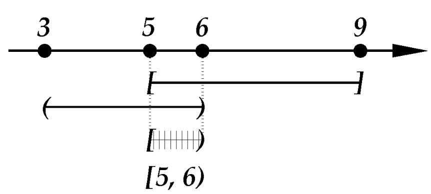


Figura 16.6

Valor absoluto

Si a y b son dos números reales, la **distancia** entre a y b, denotada por $d(a,b)$, es la longitud del segmento que los une en la recta real. Observemos que

- $d(a,b) \geq 0, \qquad d(a,b) = 0$ cuando $a = b$ y
- $d(a,b) = d(b,a)$.

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0, es decir $|a| = d(a, 0)$. Por lo tanto,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Ejemplo 16.3

a) $|8| = 8$,

b) $|-7| = -(-7) = 7$,

c) $|0| = 0$.

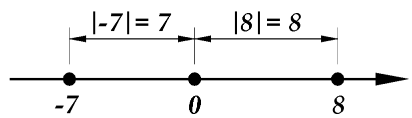


Figura 16.7

Ejemplo 16.4

- $|3 - e| = 3 - e$ (ya que $e < 3$ y por lo tanto $3 - e > 0$).
- $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$ (ya que $2 < \pi$ y por lo tanto $2 - \pi < 0$).

Propiedades del valor absoluto

Si a y b son números reales,

1. $|a| \geq 0$,
2. $|a| = |-a|$,
3. $-|a| \leq a \leq |a|$,
4. $|ab| = |a|\,|b|$,
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, con $b \neq 0$,
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$. La igualdad se cumple cuando a y b tienen el mismo signo.

Podemos calcular la distancia entre a y b utilizando el valor absoluto:

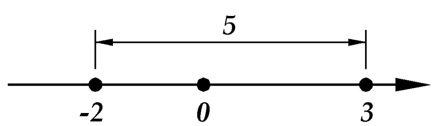


Figura 16.8

En la gráfica observamos que la distancia entre -2 y 3 es 5 y es la misma distancia entre 3 y -2.

Como $|3-(-2)| = 5$, y $|-2-3| = 5$, tenemos que $d(-2,3) = |-2-3| = |3-(-2)| = d(3,-2)$.

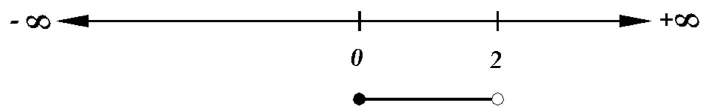
En general, si a y b son números reales:

a) $|a-b| = |b-a|$, ya que $|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$, por propiedad 2.

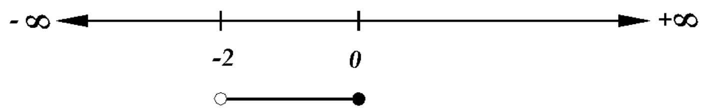
b) $d(a,b) = |a-b|$.

Ejercicios

1. Exprese cada conjunto mediante la notación de intervalo:



(a)



(b)

Figura 16.9

2. Grafique cada intervalo:
   (a) $[-4,6) \cup [0,8)$,
   (b) $[-4,6) \cap [0,8)$,
   (c) $(-\infty,6] \cup (2,10)$.
3. Exprese en forma de intervalos los siguientes conjuntos:
   (a) $\{x \in \mathbb{R}/x < -3 \text{ ó } x \geq 1\}$,
   (b) $\{x \in \mathbb{R}/0 < x \text{ y } x < 4\}$,
   (c) $\{x \in \mathbb{R}/-5 \leq x < -1\}$,
   (d) $\{x \in \mathbb{R}/x \leq -2 \text{ y } x \geq 3\}$.
4. Determine la distancia entre los números dados:
   (a) -2.5 y 1.5
   (b) $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$
   (c) -38 y -57
   (d) -2.6 y -1.8

Lección 17

Potenciación

Si $a \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, una expresión de la forma a^x se llama **expresión exponencial**, el número a se llama **base,** y el número x se conoce como **exponente**.

Aunque x puede ser cualquier número real, trabajaremos solamente exponentes enteros y racionales.

Exponentes enteros

a) Exponentes enteros positivos ó naturales

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. El producto $a \cdot a \cdots a$ de n factores se denota por a^n y se llama la **n-ésima potencia** de a. Es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores.}}$$

Ejemplo 17.1

- $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$,
- $(-5)^6 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 15625$,
- $-5^6 = -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = -15625$,
- $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

b) Exponente 0

Si a es un número real diferente de 0 definimos $a^0 = 1$.

Nota: La expresión 0^0 no está definida.

Ejemplo 17.2

- $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$,
- $(-5)^0 = 1$.

c) Exponentes enteros negativos

Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y n es un entero positivo, es decir, $n > 0$, entonces $-n < 0$, o sea, $-n$ es un entero negativo.

Definimos $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Ejemplo 17.3

- $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
- $(-5)^{-1} = \dfrac{1}{(-5)^1} = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$
- $x^{-1} = \dfrac{1}{x^1} = \dfrac{1}{x}$, para $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$.

Propiedades de los exponentes enteros:

También conocidas como **"leyes de los exponentes"**

1. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n}};$$

ya que

$$a^m a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}}_{m+n \ \text{ factores}} = a^{m+n}.$$

Ejemplo 17.4

$5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$.

2. Sean $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces, se puede probar, usando la definición y la propiedad 1, que

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}.$$

En particular si $m, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \ a \neq 0};$$

ya que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}.$$

Ejemplo 17.5

$\dfrac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5.$

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}};$$

ya que

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ factores}}$$

$$= \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}}}_{m \cdot n \quad \text{factores}} = a^{m \cdot n}.$$

En general, para $a \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}.$$

Ejemplo 17.6

$(7^6)^3 = 7^{6 \cdot 3} = 7^{18}.$

4. $\boxed{(ab)^n = a^n b^n, n \in \mathbb{N}.}$

Ejemplo 17.7

$(5 \cdot 8)^4 = 5^4 8^4.$

5. $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \text{ con } b \neq 0, n \in \mathbb{N}.}$

Ejemplo 17.8

$\left(\dfrac{9}{4}\right)^2 = \dfrac{9^2}{4^2}.$

6. $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n, \text{ con } a \text{ y } b \text{ no nulos y } n \in \mathbb{Z}.}$

Ejemplo 17.9

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2.$

7. $\boxed{\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}, \text{ con } a \text{ y } b \text{ no nulos y } m, n \in \mathbb{Z}.}$

Ejemplo 17.10

$\frac{4^{-3}}{7^{-5}} = \frac{7^5}{4^3}$.

En los siguientes ejemplos haremos uso combinado de todas estas propiedades.

Ejemplo 17.11

Escriba las siguientes expresiones con exponentes enteros positivos:

(a) $x^3x^6 = x^{3+6} = x^9$,

(b) $z^{-3}z^5 = z^{-3+5} = z^2$; $z \neq 0$,

(c) $\frac{5^4}{5^8} = 5^{4-8} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$,

(d) $(t^3)^2 = t^{3\cdot 2} = t^6$,

(e) $(5y)^3 = 5^3y^3 = 125y^3$,

(f) $\left(\frac{2}{x}\right)^4 = \frac{2^4}{x^4} = \frac{16}{x^4}$, $x \neq 0$.

Ejemplo 17.12

Simplifique las siguientes expresiones, dando la respuesta sólo con exponentes positivos:

(a) $(4a^4b^3)^2\,(5a^2b^5)$

(b) $\left(\frac{3xy^2}{2x^{-1}z^2}\right)^2 \left(\frac{x^2z^2}{3y^2}\right)$, donde x, y y z son distintos de cero.

Solución

(a)

$$\begin{aligned}
\left(4a^4b^3\right)^2\left(5a^2b^5\right) &= \left(4^2\left(a^4\right)^2\left(b^3\right)^2\right)\left(5a^2b^5\right)\\
&= \left(16a^8b^6\right)\left(5a^2b^5\right)\\
&= (16)(5)a^8a^2b^6b^5 = 80a^{10}b^{11}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3xy^2}{2x^{-1}z^2}\right)^2\left(\frac{x^2z^2}{3y^2}\right) &= \frac{3^2x^2y^4x^2z^2}{4\cdot 3x^{-2}y^2z^4}\\
&= \frac{3^23^{-1}}{4}x^4x^2y^4y^{-2}z^2z^{-4}\\
&= \frac{3}{4}x^6y^2z^{-2} = \frac{3x^6y^2}{4z^2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 17.13

Simplifique la expresión $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$ y escriba el resultado con exponentes positivos, donde x, y y z son distintos de cero.

Solución

$$\begin{aligned}\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3} &= \left(\frac{x^2y^3z^{-4}}{xy^{-2}z^{-3}}\right)^{3}\\ &= \left(xy^5z^{-1}\right)^3 = x^3y^{15}z^{-3} = \frac{x^3y^{15}}{z^3}.\end{aligned}$$

Definición

Un número x está escrito en notación científica si está expresado en la forma

$$x = a \times 10^n,$$

donde $1 \leq |a| < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 17.14

- El número 325.32 escrito en notación científica es 3.2532×10^2.
- $0.000354 = 3.54 \times 10^{-4}$.
- $-\dfrac{2}{25} = -8 \times 10^{-2}$.

Nota

Invitamos al lector a consultar cómo se suman, restan, multiplican y dividen números escritos usando notación científica.

Ejercicios

1. Simplifique las siguientes expresiones y elimine todos los exponentes negativos. Suponga que todas las letras representan cantidades distintas de cero.

   (a) $\left(\dfrac{ab^2c^{-3}}{2a^3b^{-4}}\right)^{-2}$

   (b) $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

   (c) $\left(\dfrac{c^4d^3}{cd^2}\right)\left(\dfrac{d^2}{c^3}\right)^3$

   (d) $(3ab^2c)\left(\dfrac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}.$

2. Escriba en notación científica las siguientes cantidades:

   (a) La distancia de la Tierra al Sol es de aproximadamente 150 millones de kilómetros.

(b) La masa de una molécula de oxígeno es de casi 0.000000000000000000000053 g.

(c) La velocidad de la luz es de casi 300000 km/s. Utilice la información de la parte (a) para determinar cuánto tarda un rayo de luz en llegar desde el Sol a la Tierra.

3. Simplifique la siguiente expresión y escriba su respuesta sólo con exponentes positivos:

$$\frac{10^{-3} \cdot 6^4 \cdot 4^{-2}}{15^2 \cdot 14^{-3} \cdot 2^5}.$$

Lección 18

Radicación

Exponentes racionales

Vamos a considerar ahora las expresiones de la forma $a^{\frac{p}{q}}$, con $a \in \mathbb{R}$ y $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, es decir, expresiones exponenciales en las cuales el exponente es un número racional.

I. Expresiones exponenciales de la forma $a^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Sea $a \geq 0$, **la raíz cuadrada** de a, que denotamos por $\sqrt[2]{a}$ o por $\sqrt{a}$, es el único $b \geq 0$ tal que $b^2 = a$. Es decir:

$$\sqrt[2]{a} = b \text{ significa que } b^2 = a \text{ y } b \geq 0.$$

- Sean $a \geq 0$ y n un número natural par. La raíz n-ésima de a, que denotamos por $\sqrt[n]{a}$, es el único $b \geq 0$ tal que $b^n = a$. Es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ significa que } b^n = a \text{ y } b \geq 0.$$

- Sean $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y n un número natural impar. La raíz n-ésima de a, que denotamos por $\sqrt[n]{a}$, es el único b tal que $b^n = a$.

- Para $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$ definimos $a^{\frac{1}{n}}$ como $\sqrt[n]{a}$, siempre que esta última expresión tenga sentido.

Ejemplo 18.1

a) $\sqrt[4]{625} = 5$ ya que $5^4 = 625$,

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$,

c) $\sqrt[4]{-81}$ no está definida puesto que 4 es par, y $-81 < 0$.

Importante: Si $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ejemplo 18.2

$\sqrt{3^2} = 3$, pero $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$, porque $-3 < 0$, de hecho $\sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$.

Propiedades

Sean a, b y c números reales y $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}}$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par.

Ejemplo 18.3

$\sqrt[3]{-27 \cdot 64} = \sqrt[3]{-27}\sqrt[3]{64} = (-3)(4) = -12.$

2. $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0}$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par.

Ejemplo 18.4

$\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}.$

3. $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$, con m y n impares cuando $a < 0$.

Ejemplo 18.5

$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3.$

4. $\boxed{\sqrt[n]{c^n} = |c| \text{ si } n \text{ es par.}}$

Ejemplo 18.6

$\sqrt[4]{3^4} = 3$ y $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5.$

5. $\boxed{\sqrt[n]{c^n} = c \text{ si } n \text{ es impar.}}$

Ejemplo 18.7

$\sqrt[7]{(-2)^7} = -2.$

Ejemplo 18.8

Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{a^2b^6}$,

b) $\sqrt[3]{x^3y^9}$,

c) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$.

Solución

a) $\sqrt{a^2b^6} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^6} = |a|\sqrt{(b^3)^2} = |a|\,|b^3|.$

b) $\sqrt[3]{x^3y^9} = \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{(y^3)^3} = xy^3.$

c) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}.$

II. Expresiones exponenciales de la forma $a^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$

Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $a^{\frac{m}{n}}$ por

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \text{ ó de forma equivalente por } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

siempre que las expresiones del lado derecho del igual estén definidas.

Es importante observar que las leyes de los exponentes también son válidas para exponentes racionales, siempre y cuando las expresiones involucradas estén definidas.

Ejemplo 18.9

Evalúe las siguientes expresiones:

a) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

b) $\left(\dfrac{-27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Solución

a) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\left(\dfrac{-27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{(-27)^{\frac{2}{3}}}{(8)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{-27}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \dfrac{(-3)^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$.

Ejemplo 18.10

Simplifique las siguientes expresiones, dando la respuesta sólo con exponentes positivos. Suponga que todas las letras representan números distintos de cero.

a) $\left(2x^4y^{-\frac{4}{5}}\right)^3 (8y^2)^{\frac{2}{3}}$

b) $\dfrac{(y^{10}z^{-5})^{\frac{1}{5}}}{(y^{-2}z^3)^{\frac{1}{3}}}$.

Solución

a) $\left(2x^4y^{-\frac{4}{5}}\right)^3 (8y^2)^{\frac{2}{3}} = \left(8x^{12}y^{-\frac{12}{5}}\right)\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 y^{\frac{4}{3}}$

$= 32x^{12}y^{\frac{4}{3}-\frac{12}{5}} = 32x^{12}y^{-\frac{16}{15}} = \dfrac{32x^{12}}{y^{\frac{16}{15}}}$

b) $\dfrac{(y^{10}z^{-5})^{\frac{1}{5}}}{(y^{-2}z^3)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{y^{\frac{10}{5}}z^{-\frac{5}{5}}}{y^{-\frac{2}{3}}z^{\frac{3}{3}}} = \dfrac{y^2z^{-1}}{y^{-\frac{2}{3}}z} = \dfrac{y^2y^{\frac{2}{3}}}{zz} = \dfrac{y^{\frac{8}{3}}}{z^2}$.

Ejercicios

1. Simplifique las expresiones y elimine todos los exponentes negativos. Suponga que las letras representan números positivos:

   (a) $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{x^2y}\right)^{-1/2}\left(\dfrac{x^3y}{y^{1/2}}\right)^2$,

   (b) $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$,

   (c) $\left(\dfrac{-2x^{1/3}}{y^{1/2}z^{1/6}}\right)^4$,

   (d) $\dfrac{(y^{10}z^{-5})^{1/5}}{(y^{-2}z^3)^{1/3}}$.

2. Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $\sqrt{75}+\sqrt{48}$,

   (b) $\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{3}$.

3. Simplifique y exprese su respuesta con exponentes positivos:

$$\frac{12^{-3/4}\times 15^{4/3}}{10^2\times 45^{5/6}}.$$

4. Simplifique y exprese su respuesta con exponentes positivos. Suponga que todas las letras representan números distintos de cero.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{40}\,x^{-\frac{2}{3}}w^{\frac{3}{7}}}{2w^{-\frac{11}{7}}y^4}\right)^{-3}.$$

Lección 19

Expresiones algebraicas I

- Una **expresión algebraica** es una combinación de **constantes** (números) y **variables** (elementos genéricos de un conjunto numérico, representados por letras), mediante suma, resta, multiplicación, división y potenciación con exponentes enteros o racionales.

  Por lo general las variables se representan con las últimas letras del alfabeto. Por ejemplo u, v, w, x,...

  Las expresiones

  $$3x^2 + 4x - 5, \quad \frac{x+z}{y^2+x}, \quad \frac{\sqrt{y} - 4z}{z+y},$$

  son expresiones algebraicas.

- Un **polinomio en la variable** x es una expresión algebraica de la forma

  $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

  donde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son números reales, llamados **coeficientes del polinomio** y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, se dice que el polinomio es de **grado** n, es decir, el grado de un polinomio corresponde al mayor exponente de la variable que aparece en el polinomio. Si además tenemos que $a_n = 1$ decimos que el polinomio es **mónico**.

Ejemplo 19.1

$7x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ es un polinomio en la variable x de grado 5. El término en x^3 no se escribe porque su coeficiente es 0.

Suma y resta de polinomios

Para sumar (o restar) polinomios, utilizamos las propiedades de la suma (o resta) de números reales.

Ejemplo 19.2

Sume los polinomios $3x^2 + 7x - 9$ y $-5x^3 - \frac{1}{5}x^2 + x - 5$.

Solución

$$
\begin{aligned}
(3x^2+7x-9)+(-5x^3-\frac{1}{5}x^2+x-5) &= \left(3x^2-\frac{1}{5}x^2\right)+(7x+x)+(-9+(-5))+(-5x^3)\\
&= \left(3-\frac{1}{5}\right)x^2+(7+1)x+(-9-5)+\left(-5x^3\right)\\
&= -5x^3+\frac{14}{5}x^2+8x-14.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 19.3

1. Efectúe la suma de los polinomios $3x^2+x+1$ y $2x^2-3x-5$.
2. Del polinomio $3x^2+x+1$ reste el polinomio $2x^2-3x-5$.

Solución

1. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(3x^2+x+1)+(2x^2-3x-5) &= \left(3x^2+2x^2\right)+(x-3x)+(1-5)\\
&= 5x^2-2x-4.
\end{aligned}
$$

2. Vemos que

$$
\begin{aligned}
(3x^2+x+1)-(2x^2-3x-5) &= 3x^2+x+1-2x^2+3x+5\\
&= x^2+4x+6.
\end{aligned}
$$

Producto o multiplicación de polinomios

Para multiplicar polinomios usamos las propiedades de la suma y el producto de números reales y las leyes de los exponentes. **Factorizar un polinomio** significa expresarlos como el producto de por lo menos dos polinomios llamados **factores**, cada uno de grado mayor o igual a uno.

Ejemplo 19.4

$(3x-4)\,(x^2+x)=3x(x^2+x)+(-4)(x^2+x)=3x^3+3x^2-4x^2-4x=3x^3-x^2-4x.$

Ejemplo 19.5

Considere los polinomios

$P(x)=4x^2-1$, $Q(x)=x^3-3x^2+6x-2$, $R(x)=6x^2+x+1$ y $T(x)=\dfrac{3}{2}x^2+5$.

Calcule los siguientes polinomios

1. $P(x)+2Q(x)-R(x)$,
2. $T(x)Q(x)$.

Solución

1. Vemos que

$$\begin{aligned} P(x)+2Q(x)-R(x) &= 4x^2-1+2(x^3-3x^2+6x-2)-(6x^2+x+1)\\ &= 2x^3+4x^2-6x^2-6x^2+12x-x-1-4-1\\ &= 2x^3-8x^2+11x-6. \end{aligned}$$

2. Tenemos que

$$\begin{aligned} T(x)Q(x) &= \left(\frac{3}{2}x^2+5\right)(x^3-3x^2+6x-2)\\ &= \frac{3}{2}x^5-\frac{9}{2}x^4+\frac{18}{2}x^3-3x^2+5x^3-15x^2+30x-10\\ &= \frac{3}{2}x^5-\frac{9}{2}x^4+14x^3-18x^2+30x-10. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Considere los polinomios

   $P(x)=5x^2+2x+3$, $Q(x)=-x^2-4x-1$.

   Calcule $P(x)+Q(x)$, $P(x)-Q(x)$.

2. Considere los polinomios

   $P(x)=4x^2-1$, $Q(x)=x^3-3x^2+6x-2$,

   $R(x)=6x^2+x+1$, $S(x)=\dfrac{1}{2}x^2+4$ y $T(x)=\dfrac{3}{2}x^2+5$.

   Calcule los siguientes polinomios

   $Q(x)+S(x)$, $P(x)-R(x)$, $T(x)S(x)$ y $S(x)S(x)-3Q(x)$.

3. Verifique que una factorización del polinomio $6x^3-25x^2-24x-5$ es

$$(3x+1)(x-5)(2x+1).$$

Lección 20

Expresiones algebraicas II

División de polinomios

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $D(x)$ y si $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

con el grado de $R(x)$ menor que el grado de $D(x)$.

Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se llaman **dividendo** y **divisor**, respectivamante, $Q(x)$ es el **cociente** y $R(x)$ es el **residuo.**

Si en la ecuación anterior, multiplicamos en ambos lados por $D(x)$ obtenemos la ecuación equivalente

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x).$$

División larga

Veamos, en el siguiente ejemplo, cómo hallar $Q(x)$ y $R(x)$ dados $P(x)$ y $D(x)$.

Ejemplo 20.1

Divida $5x^3 - 2x + 1$ entre $x + 1$.

Solución

En este caso, $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$ es el dividendo y $D(x) = x + 1$ es el divisor. Para hallar el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ se procede así:

- Se ordenan ambos polinomios con respecto a las potencias de x y si falta alguna potencia se agrega con coeficiente 0. En este caso, sólo falta agregar $0x^2$ al dividendo y la división se indica así:

$$5x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \;\; \underline{\big|\; x+1 \;}$$

- Para obtener el primer término del cociente, se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. En este caso, $\dfrac{5x^3}{x} = 5x^2$ (Éste será el primer término del cociente).

$$\begin{array}{r|l} 5x^3+0x^2-2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} & 5x^2 \end{array}$$

- Se multiplica el divisor por el primer término del cociente: $(x+1)\,5x^2 = 5x^3+5x^2$ y este resultado se resta del dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3+0x^2-2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -5x^3-5x^2 \qquad\quad & 5x^2 \\ \cline{1-1} -5x^2-2x+1 & \end{array}$$

- Se repite el procedimiento anterior, considerando el polinomio del último renglón, $-5x^2-2x+1$, como dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3+0x^2-2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -5x^3-5x^2 \qquad\quad & 5x^2-5x+3 \\ \cline{1-1} -5x^2-2x+1 & \\ \cline{1-1} 5x^2+5x \qquad & \\ \cline{1-1} 3x+1 & \\ \cline{1-1} -3x-3 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

- El proceso termina cuando el polinomio que se obtiene en el último renglón es de menor grado que el divisor. En este caso, como el divisor es un polinomio de grado 1 y el polinomio del último renglón es de grado 0, el proceso de división terminó y ecribimos el resultado así:

$$\frac{5x^3-2x+1}{x+1} = 5x^2-5x+3+\frac{-2}{x+1},$$

donde $Q(x) = 5x^2-5x+3$ es el cociente y $R(x) = -2$ es el residuo de la división.

Este resultado también se puede escribir, después de multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por $x+1$, como

$$5x^3-2x+1 = (x+1)(5x^2-5x+3)-2.$$

Ejemplo 20.2

Divida $x^6+x^4+2x^2+2$ entre x^2+1.

Solución

$$\begin{array}{r|l} x^6+0x^5+x^4+0x^3+2x^2+0x+2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^6 \qquad\quad -x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & x^4+2 \\ \cline{1-1} 2x^2+0x+2 & \\ -2x^2 \qquad\quad -2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Luego,

$$\frac{x^6+x^4+2x^2+2}{x^2+1} = x^4+2+\frac{0}{x^2+1},$$
$$\frac{x^6+x^4+2x^2+2}{x^2+1} = x^4+2,$$

o equivalentemente,

$$x^6+x^4+2x^2+2 = (x^2+1)(x^4+2).$$

En este caso el residuo de la división es igual a 0 y en la última ecuación el divisor x^2+1 es un **factor** del dividendo $x^6+x^4+2x^2+2$.

Ejercicios

En cada literal determine el cociente y el residuo si se divide $f(x)$ entre $p(x)$.

1. $f(x) = x^5 - x^4 + x^2 - x$,

   $p(x) = x^3 - x^2 + x$.

2. $f(x) = x^{n+2} + 3x^{n+3} + x^{n+4} - x^{n+5}$,

   $p(x) = x^2 + x$.

3. $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - x + 5$,

   $p(x) = 3x^3 + x^2 - 1$.

4. $f(x) = \frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{19}{30}x - \frac{4}{5}$,

   $p(x) = 2x^3 - \frac{1}{3}x + 2$.

Lección 21

Expresiones algebraicas III

División sintética

La división sintética es un método rápido para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $x - c$, con c un número real.

Ejemplo 21.1

Divida $x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ entre $x + 2$, usando división sintética.

Solución

- Sólo se escriben los coeficientes del dividendo y el valor de c (en este caso $c = -2$). Si falta alguna potencia de x se escribe 0 como coeficiente.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & -5 & -2 \\ \hline \end{array}$$

- Se traza una línea horizontal debajo de los coeficientes del polinomio, dejando un espacio, se escribe el primer coeficiente 1 debajo de la línea, se multiplica por c $(1\times -2 = -2)$ y el resultado se escribe en el espacio intermedio, debajo del segundo coeficiente y se suman estos dos números $(0+(-2) = -2)$. El resultado se multiplica por c y se suma al tercer coeficiente. Se repite este proceso hasta terminar los coeficientes del dividendo.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & -5 & -2 \\ \cline{6-6} & -2 & 4 & -2 & 0 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & -5 & \end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad -2 \quad 1 \quad 0}_{\text{Coeficientes del cociente}} \quad \underbrace{-5}_{\text{Residuo}}$$

- El residuo es el último número del último renglón $(R(x) = -5)$ y el cociente es el polinomio de un grado menor que el dividendo y cuyos coeficientes son los números del último renglón, excepto el último (En este caso, $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 0$).

  Escribimos:
$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 5}{x + 2} = x^3 - 2x^2 + x + \frac{-5}{x + 2},$$
  o equivalentemente,
$$x^4 - 3x^2 + 2x - 5 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + x) - 5.$$

Ejemplo 21.2

Divida $P(x) = 3x^3 - 16x^2 + 23x - 6$ entre $x - \dfrac{1}{3}$, utilizando división sintética.

Solución

Como en el ejemplo anterior tomamos los coeficientes de $P(x)$ y seguimos el procedimiento descrito, así

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -16 & 23 & -6 & 1/3 \\ \cline{5-5} & 1 & -5 & 6 & \\ \hline 3 & -15 & 18 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$\frac{3x^3 - 16x^2 + 23x - 6}{x - \frac{1}{3}} = 3x^2 - 15x + 18.$$

Observaciones

Si el divisor es de la forma $x - c$, $c \in \mathbb{R}$, como $x - c$ es un polinomio de grado 1 entonces el residuo de la división $\dfrac{P(x)}{x - c}$ es un polinomio de grado 0, esto es, el residuo es una constante, $R(x) = d$, $d \in \mathbb{R}$ y así:

$$\frac{P(x)}{x - c} = Q(x) + \frac{d}{x - c},$$

o equivalentemente,

$$P(x) = (x - c)Q(x) + d.$$

Además, si evaluamos el polinomio $P(x)$ en c tenemos

$$P(c) = (c - c)Q(c) + d = d,$$

que es el residuo en esta división.

Ejercicios

Use división sintética para dividir $P(x)$ entre $D(x)$. Exprese su respuesta como

$$P(x) = (x - c)Q(x) + d.$$

1. $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$ entre $D(x) = x + 1$
2. $P(x) = x^2 - 2x + 3$ entre $D(x) = x - 1$.
3. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ entre $D(x) = x + 1$.

4. $P(x) = x^4 - x^3 + 5$ entre $D(x) = x - 2$.
5. $P(x) = x^5 - 2x^3 + 2x - 4$ entre $D(x) = x - 5$.
6. $P(x) = -3x^{17} + x^9 - x^5 + 2x$ entre $D(x) = x - 1$.

Lección 22

Ceros reales de polinomios I

Teorema del residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x - c$, el residuo de la división es $P(c)$.

Ejemplo 22.1

Sin realizar la división, halle el residuo al dividir $-3x^2 + 2x - 1$ entre $x - 4$.

Solución

Sea $P(x) = -3x^2 + 2x - 1$. Como el divisor es de la forma $x - c$ con $c = 4$, por el teorema del residuo, el residuo de la división $\dfrac{P(x)}{x-4}$ es $P(4) = -3\,(4)^2 + 2\,(4) - 1 = -48 + 8 - 1 = -41$.

Comprobémoslo mediante división sintética:

$$\begin{array}{rrr|l} -3 & 2 & -1 & \;4 \\ \cline{4-4} & -12 & -40 & \\ \hline -3 & -10 & \underbrace{-41}_{\text{Residuo}} & \end{array}$$

Observación

¿Qué sucede si el residuo de la división $\dfrac{P(x)}{x-c}$ es cero?

Al realizar la división obtenemos $\dfrac{P(x)}{x-c} = Q(x) + \dfrac{d}{x-c}$. Si el residuo $d = 0$, el resultado de la división es

$$\frac{P(x)}{x-c} = Q(x),$$

o equivalentemente,

$$P(x) = (x-c)Q(x).$$

Esto es, si el residuo es cero, $x - c$ es un factor del polinomio $P(x)$. El polinomio $P(x)$ queda factorizado como el producto de los polinomios $x - c$ y $Q(x)$.

Teorema del factor

Si $c \in \mathbb{R}$ y $P(x)$ es un polinomio, $x - c$ es un factor de $P(x)$ si y sólo si $P(c) = 0$.

Ejemplo 22.2

Pruebe que $x + 3$ es un factor del polinomio $x^3 + x^2 - 2x + 12$.

Solución

Sea $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12$. Como $P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 2(-3) + 12 = 0$, por el teorema del factor concluimos que $x - (-3) = x + 3$ es un factor de $P(x)$.

¿Cómo hallar el otro factor?

Ceros reales de polinomios

Los **ceros reales de un polinomio** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ó las **raíces** de la ecuación polinómica $P(x) = 0$ son los valores $c \in \mathbb{R}$ tales que $P(c) = 0$.

Ejemplo 22.3

Los ceros del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$ son 2 y 3, pues

$P(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0$ y $P(3) = (3)^2 - 5(3) + 6 = 0$.

Por el teorema del factor sabemos entonces que $x - 2$ y $x - 3$ son factores de $P(x)$ y así, ya que $P(x)$, $x - 2$ y $x - 3$ son polnomios mónicos, tenemos que

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

En la gráfica de la función cuadrática $y = P(x) = x^2 - 5x + 6$,

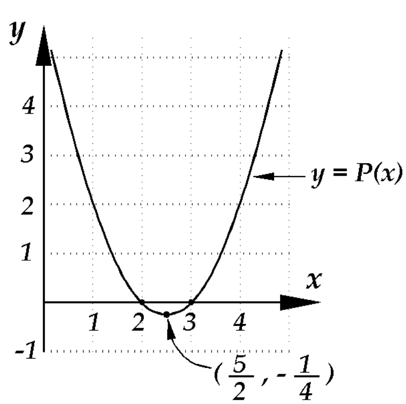


Figura 22.1

vemos que $(2, 0)$ y $(3, 0)$ son los puntos de intersección de la gráfica con el eje x.

Estas nociones de función y gráfica de una función serán tratadas con mayor detalle en una lección posterior.

Observaciones

1. Si $P(x)$ es un polinomio en x y c es un número real, los siguientes enunciados son equivalentes:
   - c es un cero de $P(x)$.
   - $x = c$ es una raíz o una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
   - $x - c$ es un factor de $P(x)$.
   - El punto $(c, 0)$ es un punto de intersección de la gráfica de $y = P(x)$ con el eje x.
2. Si un polinomio $P(x)$ puede factorizarse como
$$P(x) = (x - c)^m Q(x),$$
donde c no es cero de $Q(x)$ y m es un entero mayor o igual que 1, decimos que c **es un cero de** $P(x)$ **de multiplicidad** m**.**

Ejemplo 22.4

Si $P(x) = (x - 4)(x + 2)^2(x + 1)^4$, entonces 4 es un cero de $P(x)$ de multiplicidad 1, -2 es un cero de $P(x)$ de multiplicidad 2 y -1 es un cero de $P(x)$ de multiplicidad 4.

Nota

El teorema del factor es muy útil en la factorización de polinomios. Decimos que un polinomio es **irreducible** si es de grado mayor o igual a uno y no puede factorizarse más.[1]

Ejemplo 22.5

Factorice el polinomio $P(x) = 3x^3 - 2x - 20$.

Solución

Al evaluar $P(x)$ en 2 tenemos $P(2) = 3(2)^3 - 2(2) - 20 = 24 - 4 - 20 = 0$, luego 2 es un cero de $P(x)$ y, por el teorema del factor, $x - 2$ es un factor de $P(x)$.

Para hallar el otro factor de $P(x)$, dividimos $P(x)$ entre $x - 2$, utilizando división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & 0 & -2 & -20 & 2 \\ & 6 & 12 & 20 & \\ \hline 3 & 6 & 10 & 0 & \end{array}$$

Luego, $\dfrac{3x^3 - 2x - 20}{x - 2} = 3x^2 + 6x + 10 + \dfrac{0}{x - 2}$, o equivalentemente
$$3x^3 - 2x - 20 = (x - 2)\left(3x^2 + 6x + 10\right).$$

[1] Hablamos de factorización sobre los números reales y no sobre los números complejos.

El polinomio cuadrático $3x^2 + 6x + 10$ es irreducible ya que su discriminante $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = -84$ es negativo. El estudio detallado de las ecuaciones cuadráticas y sus discriminantes lo haremos en una lección posterior.

Ejemplo 22.6

Halle un polinomio $P(x)$ de grado 3 que tenga como ceros a -1, 0 y 3.

Solución

Por el teorema del factor, $x - (-1)$, $x - 0$ y $x - 3$ son factores del polinomio $P(x)$. Luego un polinomio con estas características puede ser:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x-0)(x-3) = x(x+1)(x-3) \\ &= \left(x^2 + x\right)(x-3) = x^3 - 2x^2 - 3x. \end{aligned}$$

Cualquier otro polinomio que sea un múltiplo constante de $P(x)$, es una solución del problema. También puede tomarse $P(x) = cx^n(x+1)^m(x-3)^l$, con $n, m, l \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$.

Ejercicios

1. Halle, sin efectuar la división, el residuo de dividir
   (a) $x^2 - 2x + 3$ entre $x - 1$,
   (b) $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ entre $x + 1$,
   (c) $x^4 - x^3 + 5$ entre $x - 2$,
   (d) $x^5 - 2x^3 + 2x - 4$ entre $x - 5$,
   (e) $-3x^{17} + x^9 - x^5 + 2x$ entre $x - 1$.
2. Utilice la división sintética y el teorema del residuo (no realice directamente una división), para comprobar que $(x-2)^2$ es un factor de $3x^4 - 10x^3 - x^2 + 28x - 20$.
3. Use el teorema del factor para determinar si $x - c$ es un factor de $P(x)$.
   (a) $P(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4, \quad x - 2$,
   (b) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1, \quad x - \dfrac{1}{2}$,
   (c) $P(x) = 2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9, \quad x + 3$.

Lección 23

Ceros reales de polinomios II

Supongamos ahora que queremos factorizar un polinomio empleando los teoremas del residuo y del factor y no conocemos sus ceros. El siguiente teorema nos muestra una forma de hallarlos:

Teorema de ceros racionales

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes ***enteros***, entonces, todo cero racional de P tiene la forma $\dfrac{p}{q}$, donde:

p es un factor del coeficiente (constante) a_0.

q es un factor del coeficiente a_n.

Ejemplo 23.1

Factorice completamente el polinomio $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$.

Solución

Por el teorema de los ceros racionales, los posibles ceros racionales de P son de la forma $\dfrac{p}{q}$, donde p es un factor de 10 y q es un factor de 1.

Factores de $10 : \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 5, \ \pm 10$.

Factores de $1 : \pm 1$.

Posibles ceros racionales $: \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 5, \ \pm 10$.

Para aplicar el teorema del factor, debemos encontrar un cero de P, es decir, un $c \in \mathbb{R}$ tal que $P(c) = 0$.

Evaluemos $P(x)$ en los posibles ceros racionales:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^4 - 5(1)^3 - 5(1)^2 + 23(1) + 10 \\ &= 1 - 5 - 5 + 23 + 10 = 24. \end{aligned}$$

Luego 1 no es cero de P.

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^4 - 5(-1)^3 - 5(-1)^2 + 23(-1) + 10 \\ &= 1 + 5 - 5 - 23 + 10 = -12. \end{aligned}$$

Luego -1 no es cero de P.

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^4 - 5(2)^3 - 5(2)^2 + 23(2) + 10 \\ &= 16 - 40 - 20 + 46 + 10 = 12. \end{aligned}$$

Luego 2 no es cero de P.

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^4 - 5(-2)^3 - 5(-2)^2 + 23(-2) + 10 \\ &= 16 + 40 - 20 - 46 + 10 = 0. \end{aligned}$$

Luego -2 es cero de P.

Como -2 es un cero de $P(x)$, al dividir $P(x)$ entre $x-(-2)$, el residuo es cero. Usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -5 & -5 & 23 & 10 & -2 \\ \cline{6-6} & -5 & 14 & -18 & -10 & \\ \hline 1 & -7 & 9 & 5 & 0 & \end{array}$$

Luego, $x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x+2)(x^3 - 7x^2 + 9x + 5)$.

Factoricemos ahora $x^3 - 7x^2 + 9x + 5$:

Factores de $5: \pm 1, \ \pm 5$.

Factores de $1: \pm 1$.

Posibles ceros racionales de $x^3 - 7x^2 + 9x + 5: \pm 1, \ \pm 5$.

Sin embargo, como ± 1 no son ceros de P, tampoco son ceros de $x^3 - 7x^2 + 9x + 5$. Sólo resta evaluar el nuevo polinomio en ± 5:

$$(5)^3 - 7(5)^2 + 9(5) + 5 = 125 - 175 + 45 + 5 = 0.$$

Luego, 5 es cero de $x^3 - 7x^2 + 9x + 5$.

Mediante división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -7 & 9 & 5 & 5 \\ \cline{5-5} & 5 & -10 & -5 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

Luego $x^3 - 7x^2 + 9x + 5 = (x-5)(x^2 - 2x - 1)$ y $P(x) = (x+2)(x-5)(x^2 - 2x - 1)$.

Ahora, factoricemos el polinomio cuadrático $x^2 - 2x - 1$.

Encontrar los ceros de este polinomio es sencillo empleando la fórmula cuadrática[1]:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ si y sólo si } x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Por lo tanto, los ceros del polinomio cuadrático son $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$. Luego, por el teorema del factor, $x^2 - 2x - 1 = \left[x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right]\left[x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right]$. Así

$$P(x) = (x+2)(x-5)\left[x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right]\left[x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right].$$

[1]El estudio detallado de la fórmula cuadrática se hará en una lección posterior.

Lección 24

Ceros reales de polinomios III

En esta lección veremos otro ejemplo de como factorizar un polinomio usando el teorema de los ceros racionales.

Ejemplo 24.1

Factorice completamente el polinomio $P(x) = 3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6$.

Solución

Busquemos los posibles ceros racionales de $P(x)$.

Como $a_0 = -6$ y $a_5 = 3$, los valores de p son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, y los de q: $\pm 1, \pm 3$.

Entonces los posibles ceros racionales de $P(x)$ son de la forma $\dfrac{p}{q}$, y son: $\pm 1, \pm\dfrac{1}{3}$, $\pm 2, \pm\dfrac{2}{3}$, $\pm 3, \pm 6$.

Evaluemos $P(x)$ en estos valores:

$$\begin{aligned} P(1) &= 3(1)^5 - 10(1)^4 - 6(1)^3 + 24(1)^2 + 11(1) - 6 \\ &= 3 - 10 - 6 + 24 + 11 - 6 = 22, \end{aligned}$$

Luego 1 no es cero de $P(x)$.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 3(-1)^5 - 10(-1)^4 - 6(-1)^3 + 24(-1)^2 \\ &\quad + 11(-1) - 6 = -3 - 10 + 6 + 24 - 11 - 6 \\ &= 0, \end{aligned}$$

Luego -1 es cero de $P(x)$.

Al hacer la división sintética tenemos:

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 & -1 \\ & -3 & 13 & -7 & -17 & 6 & \\ \hline 3 & -13 & 7 & 17 & -6 & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto $P(x) = (3x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 17x - 6)(x + 1)$.

Los posibles ceros racionales de $3x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 17x - 6$ son los mismos que los de $P(x)$, ya que el primero y el último coeficiente son los mismos.

Como 1 no es cero de $P(x)$, tampoco lo es del nuevo polinomio.

Evaluemos el nuevo polinomio en -1 :

$$\begin{aligned}&3(-1)^4 - 13(-1)^3 + 7(-1)^2 + 17(-1) - 6\\ &= 3 + 13 + 7 - 17 - 6 = 0,\end{aligned}$$

entonces -1 es un cero del nuevo polinomio.

Hagamos de nuevo división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -13 & 7 & 17 & -6 & -1 \\ & -3 & 16 & -23 & 6 & \\ \hline 3 & -16 & 23 & -6 & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto

$$3x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 17x - 6 = (3x^3 - 16x^2 + 23x - 6)(x + 1).$$

Los posibles ceros del polinomio $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6$ son los mismos de $P(x)$ ¿Por qué?

Evaluemos el nuevo polinomio en -1 :

$$3(-1)^3 - 16(-1)^2 + 23(-1) - 6 = -3 - 16 - 6 = -25,$$

entonces -1 no es cero de este nuevo polinomio.

Evaluemos este polinomio en $\dfrac{1}{3}$

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 16\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 23\left(\frac{1}{3}\right) - 6 = \frac{1}{9} - \frac{16}{9} + \frac{23}{3} - 6 = 0,$$

luego $\dfrac{1}{3}$ es cero del polinomio, usando nuevamente la división sintética tenemos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -16 & 23 & -6 & 1/3 \\ & 1 & -5 & 6 & \\ \hline 3 & -15 & 18 & 0 & \end{array}$$

Entonces $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = (3x^2 - 15x + 18)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$.

Ahora $3x^2 - 15x + 18 = 3(x^2 - 5x + 6) = 3(x - 3)(x - 2)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
P(x) &= 3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6 \\
&= (3x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 17x - 6)(x+1) \\
&= (3x^3 - 16x^2 + 23x - 6)(x+1)(x+1) \\
&= (3x^2 - 15x + 18)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+1)(x+1) \\
&= 3(x-3)(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+1)(x+1) \\
&= 3(x-3)(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+1)^2.
\end{aligned}$$

$P(x)$ tiene 3 ceros ($3, 2$ y $\dfrac{1}{3}$) de multiplicidad 1 y uno (-1) de multiplicidad 2.

Ejercicios

1. Halle todas las raíces reales de cada polinomio.
   (a) $Q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.
   (b) $R(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$.
   (c) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$.
2. Encuentre el valor de k tal que $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 2$ tiene como un factor a $x - 2$.
3. Factorice completamente los siguientes polinomios.
   (a) $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$.
   (b) $6x^3 - 11x^2 - 4x + 4$.
   (c) $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$.
   (d) $3x^3 + 2x^2 + 14x - 5$.
   (e) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 6$.
   (f) $x^4 - 6x^2 - 7x - 6$.
   (g) $5x^4 + 15x^3 - 49x^2 + 3x - 10$.

Lección 25

Factorización I

Productos notables

Algunos productos se usan frecuentemente y por ello es fácil memorizar el resultado. Sean a y b números reales o expresiones algebraicas. Tenemos las siguientes identidades:

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
6. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$,
7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

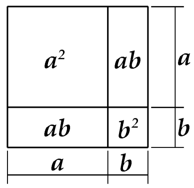
Estos resultados pueden verificarse realizando los productos. Verifiquemos por ejemplo las fórmulas 1, 3 y 5:

1. $(a+b)(a-b) = a\,a + a(-b) + b\,a - b\,b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.
3. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a\,a + a(-b) + (-b)a + (-b)(-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
5. $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) = aa^2 + a(-2ab) + ab^2 + (-b)a^2 + (-b)(-2ab) + (-b)b^2$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

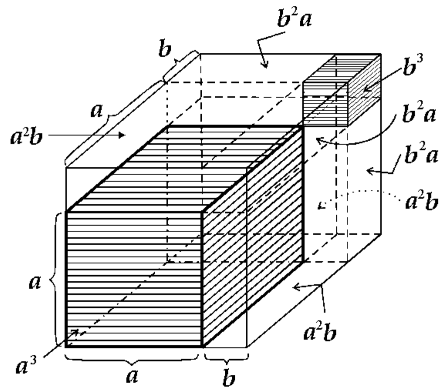
Las demás identidades se prueban de manera similar.

Interpretación geométrica

Una manera muy interesante de visualizar las identidades 2 y 4, es mediante el uso de las nociones de área y volumen. La expresión $(a+b)^2$ se puede interpretar como el área de un cuadrado de lado $a+b$. Este cuadrado se puede descomponer en un cuadrado de área a^2, un cuadrado de área b^2 y dos rectángulos de área ab. Análogamente, la expresión $(a+b)^3$ se puede interpretar como el volumen de un cubo de lado $a+b$ (véase la figura 25.1).



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Figura 25.1

Ejemplo 25.1

Utilice los productos notables para obtener los siguientes productos

a) $\left(c + \dfrac{1}{c}\right)^2$, $c \neq 0$.

b) $\left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} + \dfrac{1}{b}\right)$, $a \geq 0$ y $b \neq 0$.

c) $(1-2y)^3$.

Solución

a) Aplicando la identidad 2, tenemos:

$$\left(c + \frac{1}{c}\right)^2 = c^2 + 2c\left(\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = c^2 + 2\frac{c}{c} + \frac{1}{c^2} = c^2 + 2 + \frac{1}{c^2}.$$

b) Aplicando la identidad 1, tenemos:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2 = a - \frac{1}{b^2}.$$

c) Aplicando la identidad 5, con $a = 1$ y $b = 2y$, obtenemos:

$$(1-2y)^3 = 1^3 - 3\,(1)^2\,(2y) + 3\,(1)\,(2y)^2 - (2y)^3 = 1 - 6y + 12y^2 - 8y^3.$$

Ejercicios

Utilice los productos notables para obtener los siguientes productos

1. $\left(\dfrac{a}{b} - b\right)^2$, $b \neq 0$,

2. $(x-y)\left(x^2+y^2\right)(x+y)$.

3. $\left(a^3+b^3\right)\left(a^6-a^3b^3+b^6\right)$,

4. $\left(\sqrt{3x}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2x}\right)$, $x \geq 0$,

5. $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.

6. $\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}\right)$.

Lección 26

Factorización II

Factorización

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como un producto de expresiones más simples. En los ejemplos anteriores desarrollamos productos de expresiones algebraicas utilizando reiteradamente la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Si "reversamos" este proceso hasta tener las expresiones algebraicas en términos de productos, decimos que hemos factorizado dichas expresiones.

Ejemplo 26.1

Factorice la expresión $a^2+2ab+b^2$ es escribirla como un producto de factores, es decir,

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2.$$

Utilizando los productos notables podemos factorizar algunas expresiones algebraicas

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (Diferencia de cuadrados),

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ (Suma de cubos),

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ (Diferencia de cubos),

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ (Trinomio cuadrado perfecto),

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$.

Ejemplo 26.2

Factorice las siguientes expresiones.

1. $16x^2-9z^4=(4x)^2-(3z^2)^2=(4x+3z^2)(4x-3z^2)$.
2. $\begin{aligned}27x^3+y^3&=(3x+y)\left[(3x)^2-3xy+y^2\right]\\&=(3x+y)\left(9x^2-3xy+y^2\right).\end{aligned}$

3. $64 - 125t^6 = (4 - 5t^2)\left[(4)^2 + 4(5t^2) + (5t^2)^2\right]$
$= (4 - 5t^2)(16 + 20t^2 + 25t^4)$
$= \left(2 - \sqrt{5}t\right)\left(2 + \sqrt{5}t\right)(16 + 20t^2 + 25t^4)\,.$

Ejemplo 26.3

Factorice las siguientes expresiones.

1. $x^4 + 10x^2 + 25$,
2. $81c^4 - d^4$,
3. $X^{8m} - 16Y^{4n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$.

Solución

1. Hacemos el cambio de variable $X = x^2$ y obtenemos

$$\begin{aligned} x^4 + 10x^2 + 25 &= X^2 + 10X + 25 \\ &= (X+5)(X+5) \\ &= (x^2+5)(x^2+5) \\ &= (x^2+5)^2. \end{aligned}$$

2. Usamos la fórmula para una diferencia de cuadrados dos veces:

$$\begin{aligned} 81c^4 - d^4 &= (9c^2 - d^2)(9c^2 + d^2) \\ &= (3c - d)(3c + d)(9c^2 + d^2). \end{aligned}$$

3. Usamos la fórmula para una diferencia de cuadrados dos veces:

$$\begin{aligned} X^{8m} - 16Y^{4n} &= (X^{4m} - 4Y^{2n})(X^{4m} + 4Y^{2n}) \\ &= (X^{2m} - 2Y^n)(X^{2m} + 2Y^n)(X^{4m} + 4Y^{2n}). \end{aligned}$$

Consideremos ahora algunos casos especiales de expresiones algebraicas, cuya factorización no es consecuencia directa de los productos notables.

Caso 1. Factor común

Todos los términos de la expresión algebraica tienen un **factor común**.

Ejemplo 26.4

Factorice las expresiones

a) $-2x^3 + 16x$,

b) $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$,

c) $(z+2)^2 - 5(z+2)\,.$

Solución

a) Como $16 = 2 \cdot 8$, tanto 2 como x "están" en los dos términos. Entonces, usando propiedades de la suma y del producto, tenemos:

$$\begin{aligned}
-2x^3 + 16x =& 2x\left(-x^2+8\right) \\
=& -2x\left(x^2-8\right) \\
=& -2x\left(x+\sqrt{8}\right)\left(x-\sqrt{8}\right) \\
=& -2x\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

b) -7, x y y^2 son factores de todos los términos, entonces

$$-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4 = -7xy^2\left(x^3-2y-3y^2\right).$$

c) $z+2$ es factor de los dos sumandos, entonces:

$$\begin{aligned}
(z+2)^2 - 5(z+2) &= (z+2)\left[(z+2)-5\right] \\
&= (z+2)(z-3).
\end{aligned}$$

Ejemplo 26.5

Factorice las expresiones

a) $y^4(y+2)^3 + y^5(y+2)^4$,

b) $ab^4c^2 + a^3bc^5 - a^2b^2c^2$,

c) $xy^2 - b^2x + xy + bx$.

Solución

a) Tomemos factor común y simplifiquemos

$$\begin{aligned}
y^4(y+2)^3 + y^5(y+2)^4 &= y^4(y+2)^3(1+y(y+2)) \\
&= y^4(y+2)^3(1+y^2+2y) \\
&= y^4(y+2)^3(y+1)^2.
\end{aligned}$$

b) Tomando factor común,

$$ab^4c^2 + a^3bc^5 + a^2b^2c^2 = abc^2(b^3 + a^2c^3 - ab).$$

c) Tomando factor común y factorizando la diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned}
xy^2 - b^2x + xy + bx &= x(y^2 - b^2 + y + b) \\
&= x((y-b)(y+b) + (y+b)) \\
&= x(y+b)(y-b+1).
\end{aligned}$$

Ejercicios

Factorice completamente las expresiones

1. $2a^3 + a^4 + a^2$,
2. $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$,
3. $20x^6y^3 - 60x^4y^4 + 45x^2y^5$,
4. $64u^{12} - v^{18}$,
5. $3w^2 - 5$,
6. $25a^4b^3 - 40a^3b^5 + 16a^2b^7$,
7. $x^{12} - 1$,
8. $64X^{6n} - Y^{6n}$,
9. $x^3(x-6)^2 + x^4(x-6)$,
10. $y^4(y+2)^3 + y^5(y+2)^4$.

Lección 27

Factorización III

Caso 2. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

En este caso la expresión es un **trinomio** (suma o resta de tres términos) de la forma x^2+bx+c. Como $(x+r)(x+s) = x^2+(r+s)x+rs$, para factorizar el trinomio x^2+bx+c debemos hallar r y s tales que $b = r+s$ y $c = rs$.

Ejemplo 27.1

Factorice $x^2 - 6x + 5$.

Solución

$x^2 - 6x + 5 = (x+r)(x+s)$, con r y s tales que $r+s = -6$ y $rs = 5$. Como $5 = (-5)(-1)$ y $-6 = (-5)+(-1)$, entonces $r = -5$ y $s = -1$, y así:

$$x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1).$$

Ejemplo 27.2

Factorice $(3x+2)^2 + 8(3x+2) + 12$.

Solución

La expresión dada tiene la forma $(\cdot)^2 + 8(\cdot) + 12$, donde $(\cdot)$ representa a $(3x+2)$. Como $(\cdot)^2 + 8(\cdot) + 12 = ((\cdot)+6)((\cdot)+2)$, entonces:

$$\begin{aligned}(3x+2)^2 + 8(3x+2) + 12 &= (3x+2+6)(3x+2+2)\\ &= (3x+8)(3x+4).\end{aligned}$$

Ejemplo 27.3

Factorice las siguientes expresiones:

1. $x^3 - x^2 - 56x$
2. $(a^2+2a)^2 - 2(a^2+2a) - 3$

Solución

1. Sacamos factor común y factorizamos el trinomio para obtener

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 56x &= x(x^2 - x - 56)\\ &= x(x-8)(x+7).\end{aligned}$$

2. Hacemos el cambio de variable $x = a^2 + 2a$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\left(a^2+2a\right)^2 - 2\left(a^2+2a\right) - 3 &= x^2 - 2x - 3\\ &= (x-3)(x+1)\\ &= \big((a^2+2a)-3\big)\big((a^2+2a)+1\big)\\ &= (a+3)(a-1)(a+1)^2.\end{aligned}$$

Caso 3. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

En este caso la expresión es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$ y $a \neq 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= \frac{1}{a}(a^2x^2 + b(ax) + ac)\\ &= \frac{1}{a}((ax)^2 + b(ax) + ac).\end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis es de la forma $y^2 + By + C$, donde $y = ax$. Así, podemos factorizar esta expresión usando el caso anterior.

Ejemplo 27.4

Factorice $6y^2 + 11y - 21$.

Solución

Podemos escribir

$$6y^2 + 11y - 21 = \frac{1}{6}((6y)^2 + 11(6y) - 126).$$

Con el fin de factorizar la expresión entre paréntesis debemos hallar dos números cuya suma sea 11 y cuyo producto sea -126. Para esto, notemos que la descomposición de 126 en factores primos es $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Por tanteo se obtiene que los números requeridos son 18 y -7. Así,

$$\begin{aligned}6y^2 + 11x - 21 &= \frac{1}{6}((6y)^2 + 11(6y) - 126)\\ &= \frac{1}{6}(6y+18)(6y-7)\\ &= (y+3)(6y-7).\end{aligned}$$

Ejemplo 27.5

Factorice $2x^2 + x - 1$.

Solución

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 1 &= \frac{1}{2}((2x)^2 + (2x) - 2) \\ &= \frac{1}{2}(2x-1)(2x+2) \\ &= (2x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Ejercicios

Factorice completamente:

1. $5x^2 - 18x - 8$,
2. $5x^{19} - 18x^{18} - 8x^{17}$,
3. $u^2 - 4u - 77$,
4. $9x^2 - 36x - 45$,
5. $2\,(a+b)^2 + 5\,(a+b) - 3$,
6. $\left(a^2 + 2a\right)^2 - 2\left(a^2 + 2a\right) - 3$,
7. $x^2 + 7x - 260$,
8. $45x^2 + 17x - 88$.

Lección 28

Factorización IV

Caso 4. Exponentes racionales

Algunas expresiones poseen exponentes racionales:

Ejemplo 28.1

Factorice la expresión $x^{-3/2}+2x^{-1/2}+x^{1/2}$.

Solución

Sacamos factor común x^q con q el menor exponente. En este caso $x^{-3/2}$ es factor de los tres términos, entonces

$$\begin{aligned} x^{-3/2}+2x^{-1/2}+x^{1/2} &= x^{-3/2}\left(1+2x+x^2\right) \\ &= x^{-3/2}\left(x+1\right)^2. \end{aligned}$$

Caso 5. Factorización por agrupación

Algunos polinomios con al menos 4 términos se pueden factorizar por agrupación, buscando que cada agrupación se pueda factorizar usando los casos ya descritos.

Ejemplo 28.2

Factorice la expresión $3x^3-x^2+6x-2$.

Solución

$$\begin{aligned} 3x^3-x^2+6x-2 &= \left(3x^3-x^2\right)+\left(6x-2\right) \\ &= x^2\left(3x-1\right)+2\left(3x-1\right) \\ &= \left(3x-1\right)\left(x^2+2\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 28.3

Factorice las siguientes expresiones:

1. a^3+27b^3+a+3b,
2. $xy-vy+xz+wy+wz-vz$,
3. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x+4)^{1/2}-\frac{3}{2}x^{1/2}(3x+4)^{-1/2}$.

Solución

1. Factorizamos por agrupación

$$\begin{aligned} a^3 + 27b^3 + a + 3b &= (a^3 + 27b^3) + (a + 3b) \\ &= (a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2) + (a + 3b) \\ &= (a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2 + 1). \end{aligned}$$

2. Factorizamos por agrupación

$$\begin{aligned} xy - vy + xz + wy + wz - vz &= (xy - vy + wy) + (wz - vz + xz) \\ &= (x - v + w)y + (w - v + x)z \\ &= (x - v + w)(y + z). \end{aligned}$$

3. Sacamos factor común y simplificamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^{-1/2}(3x+4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x+4)^{-1/2} &= \frac{1}{2}x^{-1/2}(3x+4)^{-1/2}\left((3x+4)^1 - 3x^1\right) \\ &= \frac{3x + 4 - 3x}{2x^{1/2}(3x+4)^{1/2}} \\ &= \frac{4}{2x^{1/2}(3x+4)^{1/2}} \\ &= \frac{2}{x^{1/2}(3x+4)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Caso 6. Diferencia de potencias n-ésimas

La diferencia de cuadrados y la diferencia de cubos son casos particulares de expresiones de la forma $a^n - b^n$, donde $n \geq 2$ es un número natural. Observemos que

$$\begin{aligned} &(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &\qquad = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + cdots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} \\ &\qquad - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 - cdots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n \\ &\qquad = a^n - b^n. \end{aligned}$$

Así, $a^n - b^n$ se puede factorizar como

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Ejemplo 28.4

Factorice la expresión $x^5 - 1$.

Solución

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

El siguiente ejemplo nos muestra que una **suma de potencias impares** también se puede factorizar escribiéndola como una diferencia de potencias adecuada.

Ejemplo 28.5

Factorice la expresión $x^5 + 1$.

Solución

$$\begin{aligned} x^5 + 1 &= x^5 - (-1)^5 \\ &= (x - (-1))(x^4 + x^3(-1)^1 + x^2(-1)^2 + x(-1)^3 + (-1)^4) \\ &= (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Ejercicios

Factorice completamente las siguientes expresiones:

1. $a^9 - \dfrac{1}{a^9}$,
2. $(x+1)y^{3/2} - (x+1)^3 y^{-1/2}$,
3. $a^2b^3 - 2ab^3 + b^3 + (a-1)^3 b + ab - b$,
4. $\left(x^2+2\right)^{5/2} + 2x\left(x^2+2\right)^{3/2} + x^2\sqrt{x^2+2}$,
5. $9a^2 - 16b^2 - 3a - 4b$,
6. $2x^3 - 5x^2 - 6x + 15$,
7. $16x^2 - y^2 - 4x + y$,
8. $y^5 + 1024$,
9. $10ax - 14bx + 15ay - 21by$.

Lección 29

Factorización V

Miscelánea

En esta lección y en la próxima presentamos variados ejemplos sobre los distintos casos de factorización que hemos estudiado. El lector debe entender que, en la práctica, los problemas de factorización no vienen acompañados con un rótulo que diga a qué caso corresponden. Por lo tanto, se requiere resolver muchos ejercicios para poder adquirir la experiencia necesaria y así lograr identificar ante qué caso de factorización se está enfrentado en cada problema.

Ejemplo 29.1

Factorice la expresión $x^{5/2}y^{1/2} - x^{1/2}y^{5/2}$.

Solución

$$\begin{aligned} x^{5/2}y^{1/2} - x^{1/2}y^{5/2} &= x^{1/2}y^{1/2}(x^2 - y^2) \\ &= x^{1/2}y^{1/2}(x-y)(x+y). \end{aligned}$$

Ejemplo 29.2

Factorice la expresión $y^4 + 7y^2 - 30$.

Solución

Si hacemos el cambio de variable $x = y^2$ obtenemos una expresión cuadrática que se puede factorizar como

$$y^4 + 7y^2 - 30 = x^2 + 7x - 30 = (x-3)(x+10).$$

Al "deshacer" la sustitución obtenemos

$$\begin{aligned} y^4 + 7y^2 - 30 &= x^2 + 7x - 30 \\ &= (x-3)(x+10) \\ &= (y^2-3)(y^2+10) \\ &= (y-\sqrt{3})(y+\sqrt{3})(y^2+10). \end{aligned}$$

Ejemplo 29.3

Factorice la expresión $625 - a^8$.

Solución

Observemos que $625 = 5^4$ y que $a^8 = (a^2)^4$. Así

$$\begin{aligned} 625 - a^8 &= (5 - a^2)(5^3 + 5^2a^2 + 5a^4 + a^6) \\ &= (\sqrt{5} - a)(\sqrt{5} + a)(125 + 25a^2 + 5a^4 + a^6). \end{aligned}$$

Ejemplo 29.4

Factorice la expresión $(x + 4)^3(y + 6)^4 + (x + 4)^4(y + 6)^3$.

Solución

$$\begin{aligned} (x + 4)^3(y + 6)^4 + (x + 4)^4(y + 6)^3 &= (x + 4)^3(y + 6)^3(y + 6 + x + 4) \\ &= (x + 4)^3(y + 6)^3(x + y + 10). \end{aligned}$$

Ejemplo 29.5

Factorice la expresión $2x^3 - 3x + 8x^2 - 12$.

Solución

Podemos escribir la expresión como

$$2x^3 + 8x^2 - 3x - 12,$$

y escrita en esta forma observamos que podemos factorizar agrupando términos, es decir,

$$\begin{aligned} 2x^3 + 8x^2 - 3x - 12 &= 2x^2(x + 4) - 3(x + 4) \\ &= (x + 4)(2x^2 - 3) \\ &= (x + 4)(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ejemplo 29.6

La expresión cuadrática

$$a^2 + 2a + 1 + 6(a + 1) + 8,$$

se puede factorizar de dos formas. Una forma consiste en caracterizar la primera parte de la expresión como un trinomio cuadrado perfecto (en este caso $(a+1)^2$) y a continuación hacer el cambio de variable $x = a + 1$. De esta manera

$$\begin{aligned} a^2 + 2a + 1 + 6(a + 1) + 8 &= (a + 1)^2 + 6(a + 1) + 8 \\ &= (x + 4)(x + 2) \\ &= ((a + 1) + 4)((a + 1) + 2) \\ &= (a + 5)(a + 3). \end{aligned}$$

Otra forma consiste en simplificar primero la expresión y luego factorizar:

$$\begin{aligned} a^2 + 2a + 1 + 6(a + 1) + 8 &= a^2 + 8a + 15 \\ &= (a + 5)(a + 3). \end{aligned}$$

Ejemplo 29.7

Si deseamos escribir la expresión $a^4 + 4b^4$ en términos de factores cuadráticos de a y b, observamos que $a^4 = (a^2)^2$ y $4b^4 = (2b^2)^2$. A continuación podemos **sumar y restar** un término adecuado:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2.$$

En el lado derecho de esta igualdad observamos que los primeros tres términos forman un trinomio cuadrado perfecto. Por lo tanto

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2.$$

Finalmente, la última expresión es una diferencia de cuadrados. Luego,

$$a^4 + 4b^4 = \left[(a^2 + 2b^2) - 2ab\right]\left[(a^2 + 2b^2) + 2ab\right].$$

La técnica de **sumar y restar** un término adecuado para "armar" un trinomio cuadrado perfecto se conoce como **completación de cuadrados**.

Lección 30

Factorización VI

Miscelánea (continuación)

Ejemplo 30.1

Factorice la expresión $2x^2 + 9x - 11$.

Solución

$$\begin{aligned}
2x^2 + 9x - 11 &= \frac{1}{2}((4x^2) + 9(2x) - 2 \cdot 11) \\
&= \frac{1}{2}((2x)^2 + 9(2x) - 22) \\
&= \frac{1}{2}(2x + 11)(2x - 2) \\
&= (2x + 11)(x - 1).
\end{aligned}$$

Ejemplo 30.2

Podemos factorizar $y^2 + 2y - 3$ en la forma

$$y^2 + 2y - 3 = (y + 3)(y - 1).$$

Alternativamente, se puede emplear la técnica de completación de cuadrados así:

$$\begin{aligned}
y^2 + 2y - 3 &= y^2 + 2y + 1 - 1 - 3 \\
&= (y^2 + 2y + 1) - 4 \\
&= (y + 1)^2 - 4 \\
&= ((y + 1) - 2)((y + 1) + 2) \\
&= (y + 3)(y - 1).
\end{aligned}$$

Ejemplo 30.3

Factorice la expresión $4a^{5/2} + 12a^2 + 12a^{3/2} + 4a$.

Solución

$$\begin{aligned}
4a^{5/2} + 12a^2 + 12a^{3/2} + 4a &= 4a(a^{3/2} + 3a + 3a^{1/2} + 1) \\
&= 4a((a^{1/2})^3 + 3(a^{1/2})^2 + 3a^{1/2} + 1) \\
&= 4a(a^{1/2} + 1)^3.
\end{aligned}$$

Ejemplo 30.4

Factorice la expresión $x^3 + 75xy^2 + 15x^2y + 125y^3$.

Solución

Notemos que $125y^3 = (5y)^3$, $75xy^2 = 3x(5y)^2$ y $15x^2 = 3x^2(5y)$. Luego

$$\begin{aligned} x^3 + 75xy^2 + 15x^2y + 125y^3 &= x^3 + 15x^2y + 75xy^2 + 125y^3 \\ &= x^3 + 3x^2(5y) + 3x(5y)^2 + (5y)^3 \\ &= (x + 5y)^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 30.5

Factorice la expresión $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x - 1$.

Solución

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 &= x^3(x^2 + x - 1) + x^2 + x - 1 \\ &= (x^3 + 1)(x^2 + x - 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 1). \end{aligned}$$

Ejemplo 30.6

Factorice la expresión $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$.

Solución

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 &= x^3(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) \\ &= (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 30.7

Factorice la expresión $a^{12} + a^{10} - a^8 - a^4 - a^2 + 1$.

Solución

$$\begin{aligned} a^{12} + a^{10} - a^8 - a^4 - a^2 + 1 &= a^8(a^4 + a^2 - 1) - (a^4 + a^2 - 1) \\ &= (a^8 - 1)(a^4 + a^2 - 1) \\ &= (a^4 - 1)(a^4 + 1)(a^4 + a^2 - 1) \\ &= (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^2 + 2)(a^2 - 1) \\ &= (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^2 + 2)(a - 1)(a + 1) \\ &= (a - 1)^2(a + 1)^2(a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^2 + 2). \end{aligned}$$

Ejercicios

Factorice completamente las siguientes expresiones:

1. $y^8 - 5y^4 + 4$,
2. $x^{15} - 3x^9 + 2x^3$,
3. $y^4 + 1$ (*ayuda:* complete cuadrados),
4. $x^8 + 9y^4$,
5. $x^8 - 20x^4 + 64$,
6. $63x^2 - 31x - 10$,
7. $x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 12$,
8. $a^3 + b^3 - a^2 + ab - b^2$,
9. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a + b$,
10. $x^8 + 4y^8$,
11. $x^2 - z^2 + w^2 - y^2 - 2xw - 2yz$,
12. $ax - ay + bx - by - x + y$,
13. $x^2 + \dfrac{2}{5}x - \dfrac{3}{25}$,

Lección 31

Definición de n-factorial

Definición

Definimos

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

y, en general, si n es cualquier número natural, el número $n \cdot (n-1) \cdot \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ se llama **factorial de** n y se denota como $n!$, esto es

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

El número $n!$ es útil para expresar algunas fórmulas como veremos a continuación. Por conveniencia, se define $0! = 1$. Está definición quedará justificada un poco mas adelante.

Teorema

El número total de formas diferentes de ordenar n objetos distintos (llamadas **permutaciones**) es $n!$.

En efecto, si se dispone de n objetos distintos, cualquiera de ellos se puede seleccionar como "el primero", es decir, hay n posibilidades para el "primer objeto". Una vez escogido éste, cualquiera de los objetos restantes se puede seleccionar como el "segundo". Es decir, hay $n-1$ posibilidades para el "segundo objeto". Sucesivamente, habrá $n-2$ posibilidades para el "tercero", $n-3$ posibilidades para el "cuarto"...y finalmente sólo habrá una posibilidad para el "n-ésimo" objeto. Así, en total hay $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ posibles órdenes o permutaciones.

Combinaciones

Si queremos formar todos los posibles subconjuntos de tamaño r de un conjunto de n elementos, $r \leq n$, sin importar el orden, diremos que estamos haciendo **combinaciones** de los elementos.

Por ejemplo, como el orden de los elementos en un conjunto carece de importancia, las combinaciones $\{A,\ B,\ C\}$ y $\{A,\ C,\ B\}$ son iguales (es decir, cuentan como una combinación solamente).

El número de combinaciones de n objetos tomados en grupos de r a la vez (esto es, el número de subconjuntos de tamaño r, dado un conjunto de tamaño n) se denota $\dbinom{n}{r}$.

Ejemplo 31.1

En un club, cuyos miembros son

$$\begin{aligned}&\{Andrés,\ Bernardo,\ Catalina,\ David,\ Estela\}\\&=\{A,\ B,\ C,\ D,\ E\}\,,\end{aligned}$$

se quiere formar comités de 3 miembros. Se pueden formar los siguientes:

$$\begin{aligned}&\{A,\ B,\ C\}\,,\ \{A,\ B,\ D\}\,,\ \{A,\ B,\ E\}\,,\ \{A,\ C,\ D\}\,,\\&\{A,\ C,\ E\}\,,\ \{A,\ D,\ E\}\,,\ \{B,\ C,\ D\}\,,\ \{B,\ C,\ E\}\,,\\&\{B,\ D,\ E\}\,,\ \{C,\ D,E\}\,.\end{aligned}$$

Es decir, hay 10 posibles comités. Como en las permutaciones, no se permiten repeticiones, en este caso $\{B,\ B,\ E\}$ no es un subconjunto o comité válido.

Teorema

El número de combinaciones o subconjuntos, de n objetos distintos tomados en grupos de r a la vez, donde $r \leq n$, está dado por

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

La expresión $\dbinom{n}{r}$ se lee n *tomados en grupos de* r y se denomina **coeficiente binomial**.

¿Cuándo aplicar combinaciones?

Las combinaciones se aplican cuando

(1) no se permiten las repeticiones, y

(2) el orden **no** es importante.

Ejemplo 31.2

Esteban quiere comprar 10 libros diferentes pero sólo tiene dinero para comprar 4. ¿De cuántas maneras puede hacer su selección?

Solución

Los cuatro libros elegidos deben ser distintos (no se permiten las repeticiones), y además el orden no es importante en este caso, entonces usamos combinaciones:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = 210 \text{ maneras.}$$

Luego, Esteban puede seleccionar los 4 libros de 210 maneras distintas.

Ejemplo 31.3

Todos los miembros de una comunidad desean ir a un evento, pero sólo hay cupo para 12 de ellos. ¿De cuántas maneras podría elegirse los 12 participantes si hay un total de 24 miembros?

Solución

En este caso, se requieren 12 personas distintas (no se permiten las repeticiones) y el orden de la selección no importa, entonces usamos combinaciones. Así,

$$\binom{24}{12} = \frac{24!}{12!\,(24-12)!} = 2,704,156 \text{ maneras.}$$

Luego, la selección de las 12 personas que participarán en el evento puede hacerse de $2,704,156$ maneras diferentes.

Ejercicios

1. Anita acaba de terminar el bachillerato y desea archivar sus seis libros de matemáticas. Para ello dispone de 6 (seis) casillas en su biblioteca. ¿En cuántos posibles órdenes puede Anita guardar sus libros de matemáticas?
2. Una reconocida empresa de raquetas de tenis de mesa desea donar veinte raquetas a un "semillero" de practicantes que cuenta con cien jugadores. Si ningún beneficiario puede recibir más de una raqueta, ¿de cuántas formas se pueden seleccionar los beneficiarios de la donación?
3. Carlitos tiene cinco pares de zapatos y donará dos pares. ¿Cuántas posibles elecciones de dos pares puede hacer Carlitos? Desarrolle el procedimiento usando la teoría de esta sesión y desarróllelo directamente, nombrando los pares de zapatos como A, B, C, D, y E. Compare sus respuestas.

Lección 32

Coeficiente binomial y teorema del binomio

El teorema del binomio

Realizando multiplicaciones se pueden encontrar desarrollos de la primera, segunda, tercera, cuarta y quinta potencia de un binomio. Veamos

$$\begin{aligned}
(x+y)^1 &= x+y\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.
\end{aligned}$$

Los resultados anteriores se pueden generalizar de la siguiente forma:

Teorema

Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n,$$

o lo que es equivalente

$$\begin{aligned}
(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3\\
+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^{n-4}y^4 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n.
\end{aligned}$$

Los coeficientes $\binom{n}{r}$, para $r = 0, 1, ..., n$, se denominan **coeficientes binomiales**.

Ejemplo 32.1

Desarrolle la expresión $(2a+b)^6$.

Solución

Aquí $x = 2a$, $y = b$ y $n = 6$, entonces

$$\begin{aligned}
(2a+b)^6 &= \binom{6}{0}(2a)^6 + \binom{6}{1}(2a)^5 b + \binom{6}{2}(2a)^4 b^2 + \binom{6}{3}(2a)^3 b^3 + \binom{6}{4}(2a)^2 b^4 \\
&\quad + \binom{6}{5}(2a) b^5 + \binom{6}{6} b^6 \\
&= (2a)^6 + 6(2a)^5 b + \frac{6\times 5}{2!}(2a)^4 b^2 + \frac{6\times 5\times 4}{3!}(2a)^3 b^3 + \frac{6\times 5\times 4\times 3}{4!}(2a)^2 b^4 \\
&\quad + \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2}{5!}(2a) b^5 + \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{6!} b^6 \\
&= 64a^6 + 192a^5 b + 240a^4 b^2 + 160a^3 b^3 + 60a^2 b^4 + 12ab^5 + b^6.
\end{aligned}$$

Ejemplo 32.2

Desarrolle la expresión $(2x-5y)^4$.

Solución

Observemos que $2x$ es el primer término y $(-5y)$ el segundo, luego

$$\begin{aligned}
(2x-5y)^4 &= (2x)^4 + 4(2x)^3(-5y) + \frac{4\times 3}{2!}(2x)^2(-5y)^2 + \frac{4\times 3\times 2}{3!}(2x)(-5y)^3 + (-5y)^4 \\
&= 16x^4 - 160x^3 y + 600x^2 y^2 - 1000xy^3 + 625y^4.
\end{aligned}$$

Término general del desarrollo binomial

Del teorema anterior es fácil deducir que el término que contiene a^r en el desarrollo de $(a+b)^n$ es

$$\binom{n}{n-r} a^r b^{n-r}$$

Ejemplo 32.3

Encuentre el coeficiente del término $x^{15}y^4$ en el desarrollo de $\left(\sqrt{x} + \frac{y^2}{2}\right)^{32}$.

Solución

Usando la expresión definida mas arriba, tomando $r = 30$ (pues $(\sqrt{x})^{30} = x^{15}$)y $n = 32$, tenemos que

$$\binom{32}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{32-2}\left(\frac{y^2}{2}\right)^2 = 16 \cdot 31\, x^{15}\frac{y^4}{4} = 124\, x^{15}y^4.$$

Por lo tanto, el coeficiente pedido es 124.

Ejercicios

1. Encuentre el coeficiente del término con y^{15} en el desarrollo de $(7-y)^{19}$.

2. La expresión $(x+1)^4 - 1$ se puede desarrollar usando dos procedimientos: primero, caracterizándola como una diferencia de cuadrados; y, segundo, desarrollando el término $(x+1)^4$ usando el teorema del binomio y luego restando uno. Verifique que ambos caminos conducen al mismo resultado.

3. Desarrolle la expresión $(x^2 - 2y)^5$.

4. Encuentre el coeficiente del término con x^9 en el desarrollo de $(3x^3 - 2y)^9$.

Lección 33

El triángulo de Pascal

Una forma alternativa para expandir $(x+y)^n$ consiste en "leer" los coeficientes de los términos de la forma $x^{n-k}y^k$ del denominado **triángulo de Pascal**:

$n=0$:					1				
$n=1$:				1		1			
$n=2$:			1		2		1		
$n=3$:		1		3		3		1	
$n=4$:	1		4		6		4		1

Esta figura se construye de la siguiente forma: en cada fila (lista horizontal) se escribe una colección ordenada de números. En la fila "cero" se escribe un 1, en la "primera" fila se escribe dos veces el número 1. En adelante, en la fila "k-ésima" se escriben $k+1$ números, el primero y el último de los cuales es el 1. En una fila dada, después del primer número (que es 1) se escribe la suma de los dos números ubicados en la fila anterior y en las columnas "vecinas". Así, por ejemplo, en la segunda fila se escriben tres números. El primero y el tercero son el 1, en tanto que el segundo es la suma de los dos números de la fila anterior, es decir $2 = 1 + 1$. Análogamente, en la tercera fila se escriben cuatro números. El primero y el cuarto son el 1, en tanto que el segundo es la suma de los dos números en la segunda fila que son "vecinos", es decir, $3 = 1 + 2$. El tercer número de la tercera fila es $3 = 2 + 1$. Y así sucesivamente...

Se puede probar que los coeficientes binomiales de la expansión de $(x + y)^n$ son los números de la "n-ésima" fila del triángulo de Pascal. Así, por ejemplo, los coeficientes de $(x + y)^2$ son

$$1 \quad 2 \quad 1,$$

con lo cual

$$(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2.$$

Los coeficientes de $(x + y)^3$ son

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1,$$

con lo cual

$$(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3.$$

Análogamente, los coeficientes de $(x + y)^4$ son

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1,$$

con lo cual

$$(x+y)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3y + 6 \cdot x^2y^2 + 4 \cdot xy^3 + 1 \cdot y^4.$$

Ilustremos el uso de esta técnica.

Ejemplo 33.1

Desarrolle la expresión $(x+y)^6$.

Solución

Debemos hallar los coeficientes de la sexta fila del triángulo de Pascal. Para esto, usando los coeficientes de la cuarta fila, observamos que los coeficientes de la quinta fila son

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

Así, los coeficientes que buscamos son

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1.$$

En consecuencia,

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

Ejemplo 33.2

Desarrollemos nuevamente la expresión $(2a+b)^6$ del ejemplo 1 de la sesión 32. Usando la expansión obtenida en el ejemplo 1,

$$\begin{aligned}(2a+b)^6 &= (2a)^6 + 6(2a)^5b + 15(2a)^4b^2 + 20(2a)^3b^3 \\ &\quad + 15(2a)^2b^4 + 6(2a)b^5 + b^6 \\ &= 64a^6 + 6 \cdot 32a^5b + 15 \cdot 16a^4b^2 + 20 \cdot 8a^3b^3 + 15 \cdot 4a^2b^4 + 6 \cdot 2ab^5 + b^6 \\ &= 64a^6 + 192a^5b + 240a^4b^2 + 160a^3b^3 + 60a^2b^4 + 12ab^5 + b^6.\end{aligned}$$

Observación

La técnica de hallar los coeficientes binomiales mediante el triángulo de Pascal es más sencilla de aplicar que el teorema del binoimio cuando n, la potencia, es pequeña. El teorema del binomio se aplica más fácilmente cuando la potencia n es un número relativamente grande. Para convencerse de esto, intente desarrollar el ejemplo 3 de la sesión 32 usando el triángulo de Pascal.

Ejercicios

1. Encuentre la expansión binomial de

$$\left(\sqrt{x}+\frac{y^2}{2}\right)^7$$

   usando el triángulo de Pascal para hallar los coeficientes.

2. Desarrolle la expresión $\left(a^2+b^2\right)^5$ usando el triángulo de Pascal para hallar los coeficientes.

3. Desarrolle la expresión $(x^2-2y)^5$ usando el triángulo de Pascal.

Lección 34

Expresiones fraccionarias I

Expresiones racionales

Se llama **expresión fraccionaria** o **fracción** al cociente de dos expresiones algebraicas. Por ejemplo,

$$\frac{4z^2}{z-1}, \qquad \frac{\sqrt{y}-2}{y^3+5}, \quad \text{y} \quad \frac{3x+1}{2x^{3/4}}$$

son expresiones fraccionarias.

Si en una expresión fraccionaria el numerador y el denominador son polinomios, la expresión se llama **expresión racional**. Por ejemplo,

$$\frac{5x^2}{x+2} \quad \text{y} \quad \frac{7x^3+2x^2-x+1}{4x^4+2x^2+1}$$

son expresiones racionales.

Operaciones con fracciones

1. Simplificación

Factorizamos el numerador y el denominador, y luego aplicamos la propiedad $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A}{B}$, cuando sea posible.

Ejemplo 34.1

Simplifique

a) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.

b) $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$.

Solución

a) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x-2}{x-1}.$

b) Factorizamos la diferencia de cuadrados y la diferencia de cubos, así:

$$\begin{aligned}\frac{1-x^2}{x^3-1}&=\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\&=\frac{-(x-1)(1+x)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\&=\frac{-(1+x)}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

2. Las operaciones de **multiplicación** y **división** entre fracciones se definen y cumplen las mismas propiedades que las respectivas operaciones con números racionales.

Ejemplo 34.2

Realice las operaciones indicadas y simplifique

a) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-9}\cdot\dfrac{3+x}{4-x}.$

b) $\dfrac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\dfrac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$

c) $\dfrac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}.$

Solución

a) Factorizamos y simplificamos

$$\begin{aligned}\frac{x^2-x-12}{x^2-9}\cdot\frac{3+x}{4-x}&=\frac{(x-4)(x+3)}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{x+3}{-(x-4)}\\&=\frac{(x-4)(x+3)(x+3)}{-(x-3)(x+3)(x-4)}\\&=-\frac{x+3}{x-3}.\end{aligned}$$

b) Factorizamos y simplificamos

$$\begin{aligned}\frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\frac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}&=\frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\cdot\frac{y^2+5y-6}{2y^2+y-3}\\&=\frac{(2y-3)(2y+3)}{(2y-3)(y+6)}\cdot\frac{(y+6)(y-1)}{(2y+3)(y-1)}\\&=1.\end{aligned}$$

c) Factorizamos y simplificamos

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}} &= \frac{(2x^2-3x-2)\,(x^2+x-2)}{(x^2-1)\,(2x^2+5x+2)} \\
&= \frac{(2x+1)\,(x-2)\,(x+2)\,(x-1)}{(x+1)\,(x-1)\,(2x+1)\,(x+2)} \\
&= \frac{x-2}{x+1}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 34.3

Simplifique las siguientes expresiones

1. $\dfrac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}$.
2. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}\cdot\dfrac{3-x}{3+x}$.

Solución

1. $\dfrac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}=\dfrac{(y-6)(y+3)}{(2y+3)(y+1)}$.
2. Factorizamos y simplificamos

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}\cdot\frac{3-x}{3+x} &= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}\cdot\frac{(-1)\cdot(x-3)}{x+3} \\
&= \frac{(-1)\cdot(x-1)}{x+1} \\
&= \frac{1-x}{x+1}.
\end{aligned}$$

Ejercicio

Realice las operaciones indicadas y simplifique

1. $\dfrac{a^2-4}{a^2-4a+4}$.
2. $\dfrac{a^3+a^2b+ab^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}\cdot\dfrac{(a^2-b^2)(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}$
3. $\dfrac{x^2-4}{3x-6}$.
4. $\dfrac{x^2-6x+9}{5x-15}$.

5. $\dfrac{x^3+5x}{x^4+2x^3}$.

6. $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+4x^2+4x}$.

Lección 35

Expresiones fraccionarias II

3. Las operaciones de **suma y resta** entre fracciones se definen y cumplen las mismas propiedades que las respectivas operaciones con números racionales.

Nota: Para obtener el mínimo común denominador (MCD), se puede factorizar los denominadores y el MCD es el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplo 35.1

Realice las operaciones indicadas y simplifique

1. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2 + x}$.
2. $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x^2 + 7x + 12}$.

Solución

1. $$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + x} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\,(x+1)} \\ &= \frac{x + 1 + x}{x^2\,(x+1)} \\ &= \frac{2x+1}{x^2\,(x+1)}. \end{aligned}$$
2. $$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)\,(x+4)} = \frac{2\,(x+4) - 1}{(x+3)\,(x+4)} = \frac{2x+7}{(x+3)\,(x+4)}.$$

Ejemplo 35.2

Realice las operaciones indicadas y simplifique

1. $\dfrac{2}{a^2} - \dfrac{3}{ab} + \dfrac{4}{b^2}$.
2. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{3}{x^2 - 1}$.

Solución

1. Sacando denominador común obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{2}{a^2}-\frac{3}{ab}+\frac{4}{b^2}&=\frac{2b-3a}{a^2b}+\frac{4}{b^2}\\&=\frac{2b^2-3ab+4a^2}{a^2b^2}.\end{aligned}$$

2. Sacando denominador común obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{x^2-1}&=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{(x+1)(x-1)-2(x-1)+3(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}\\&=\frac{x^2-1-2x+2+3x+3}{(x+1)^2(x-1)}\\&=\frac{x^2+x+4}{(x+1)^2(x-1)}.\end{aligned}$$

Nota

Es muy importante tener en cuenta que:

- $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$
- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$
- $\frac{a+b}{a} \neq b$
- $(a+b)^{-1} \neq a^{-1}+b^{-1}$.

Fracciones compuestas

Si en una fracción, el numerador o el denominador son también fracciones, la expresión se llama **fracción compuesta**. En el siguiente ejemplo veremos como simplificar algunas fracciones compuestas.

Ejemplo 35.3

Simplifique las siguientes fracciones compuestas

1. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}}{\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{a+b}{a}}$

2. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

3. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2}+x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$.

Solución

1. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}}{\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{a+b}{a}}=\dfrac{\dfrac{b(a-b)-a(a+b)}{ab}}{\dfrac{a(a-b)+b(a+b)}{ab}}=\dfrac{\dfrac{ab-b^2-a^2-ab}{ab}}{\dfrac{a^2-ab+ab+b^2}{ab}}=\dfrac{\dfrac{-(b^2+a^2)}{ab}}{\dfrac{a^2+b^2}{ab}}=-1.$

2. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}=\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x+y}}=\dfrac{\dfrac{y+x}{xy}}{\dfrac{1}{x+y}}=\dfrac{x+y}{xy}\cdot\dfrac{x+y}{1}=\dfrac{(x+y)^2}{xy}.$

3. Factorizando el numerador,

$$\begin{aligned}\frac{(1-x^2)^{1/2}+x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}&=\frac{(1-x^2)^{-1/2}\left[(1-x^2)+x^2\right]}{1-x^2}\\&=\frac{(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}\\&=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Ejercicios

Simplifique las siguientes fracciones compuestas

1. $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{(xy)^{-2}}$.

2. $\dfrac{\dfrac{ab}{a+b}-\dfrac{a-b}{ab}}{\dfrac{ab+a-b}{a^2b+ab^2}}$.

3. $\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2x+3}{x+2}$

4. $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{3}{x+2}$

5. $\dfrac{x+10}{x^2-4}-\dfrac{x+4}{x^2+4x+4}$

6. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{x-2}{x^2+4x+4} - \dfrac{x-1}{x^3+6x^2+12x+8}$

Lección 36

Expresiones fraccionarias III

Ejemplo 36.1

Simplifique las siguientes fracciones compuestas

1. $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$.

2. $\dfrac{\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^m\left(a-\dfrac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^m\left(b-\dfrac{1}{a}\right)^n}$.

3. $\sqrt{1+\left(x^3-\dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$.

Solución

1. Sacando denominador común

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2-x-6}-\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-3} &= \frac{x}{(x-3)(x+2)}-\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-3}\\
&= \frac{x-(x-3)-2(x+2)}{(x-3)(x+2)}\\
&= \frac{x-x+3-2x-4}{(x-3)(x+2)}\\
&= \frac{-2x-1}{(x-3)(x+2)}\\
&= \frac{-(2x+1)}{(x-3)(x+2)}.
\end{aligned}$$

2. Usando propiedades de exponentes

$$\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^m\left(a-\frac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^m\left(b-\frac{1}{a}\right)^n} = \left(\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}\right)^m\left(\frac{a-\frac{1}{b}}{b-\frac{1}{a}}\right)^n$$
$$= \left(\frac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{ab+1}{a}}\right)^m\left(\frac{\frac{ab-1}{b}}{\frac{ab-1}{a}}\right)^n$$
$$= \left(\frac{a}{b}\right)^m\left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$= \left(\frac{a^m}{b^m}\right)\left(\frac{a^n}{b^n}\right)$$
$$= \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}.$$

3. Expandiendo el cuadrado del binomio

$$\sqrt{1+\left(x^3-\frac{1}{4x^3}\right)^2} = \sqrt{1+\left((x^3)^2-\left(2x^3\cdot\frac{1}{4x^3}\right)+\left(\frac{1}{4x^3}\right)^2\right)}$$
$$= \sqrt{1+\left(x^6-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^6}\right)}$$
$$= \sqrt{x^6+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^6}}$$
$$= \sqrt{\left(x^3+\frac{1}{4x^3}\right)^2}$$
$$= \left|x^3+\frac{1}{4x^3}\right|.$$

Racionalización

Dada una expresión fraccionaria con radicales en el denominador, **racionalizar el denominador** en tal expresión consiste en multiplicarla y dividirla por un factor adecuado (llamado factor racionalizante), de manera que se **eliminen los radicales en el denominador**.

- Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Así

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

- Si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$, $m < n$ y $a > 0$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$. Así
$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

- Si el denominador es de la forma $a + b\sqrt{c}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $a - b\sqrt{c}$, llamado el **conjugado de** $a + b\sqrt{c}$. De esta forma
$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b\sqrt{c}} &= \frac{1}{a+b\sqrt{c}} \cdot \frac{a-b\sqrt{c}}{a-b\sqrt{c}} \\ &= \frac{a-b\sqrt{c}}{(a+b\sqrt{c})\,(a-b\sqrt{c})} \\ &= \frac{a-b\sqrt{c}}{a^2-b^2c}.\end{aligned}$$
¿Cómo se procede en el caso en que el denominador sea de la forma $a - b\sqrt{c}$?

- Si el denominador es de la forma $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$. Resulta que
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}.\end{aligned}$$
¿Cómo se procede en el caso en que el denominador sea de la forma $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$?

Ejercicios

Simplifique las expresiones

1. $\dfrac{\dfrac{x+2}{x^2-1} + \dfrac{3}{x+1}}{\dfrac{2x-5}{x^2+2x-3}}$

2. $\dfrac{\dfrac{x+2}{2x^2-3x-2}}{1 - \dfrac{4}{2x+1}}$

3. $\dfrac{1}{2-3\sqrt{x}}$

4. $\dfrac{x-y}{2\sqrt{y}-3\sqrt{x}}$

Lección 37

Expresiones fraccionarias IV

Racionalización (continuación)

De manera similar, en fracciones cuyo numerador contiene radicales, **racionalizar el numerador** es eliminar los radicales del numerador. Para ello se procede en la misma forma como en la racionalización del denominador.

Ejemplo 37.1

1. Racionalice el denominador
   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$
   (b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$
   (c) $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$
   (d) $\dfrac{2\,(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.
2. Racionalice el numerador
   (a) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$
   (b) $(ii)\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}{x+2}$.

Solución

1. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

   (b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$.

   (c) $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(d) $\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{2(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2} = \dfrac{2(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y} =$
$2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

2. (a)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}} \\ &= \frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} \\ &= \frac{-h}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}.\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}{x+2} &= \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}{x+2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{2})^3}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2^2})} \\ &= \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2^2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2^2}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 37.2

Racionalice el denominador en las siguientes expresiones

1. $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{n}}$.
3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

Solución

1. Racionalizando obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}} &= \frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{y}}{\sqrt{3}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{y \cdot \left(\sqrt{3}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2} \\ &= \frac{y \cdot \left(\sqrt{3}-\sqrt{y}\right)}{3-y}.\end{aligned}$$

2. Racionalizando obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{n}} &= \frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{n}} \cdot \frac{\sqrt{m}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{m}+\sqrt[4]{n}} \\
&= \frac{1\cdot(\sqrt{m}+\sqrt[4]{n})}{(\sqrt{m})^2-(\sqrt[4]{n})^2} \\
&= \frac{\sqrt{m}+\sqrt[4]{n}}{m-\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{m}+\sqrt[4]{n}}{m-\sqrt{n}} \cdot \frac{m+\sqrt{n}}{m+\sqrt{n}} \\
&= \frac{(\sqrt{m}+\sqrt[4]{n})\cdot(m+\sqrt{n})}{(m)^2-(\sqrt{n})^2} \\
&= \frac{(\sqrt{m}+\sqrt[4]{n})\cdot(m+\sqrt{n})}{m^2-n}.
\end{aligned}$$

3. Racionalizando obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \\
&= \frac{1\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3} \\
&= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 37.3

Racionalice el numerador en la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt{2\,(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2\,(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h} &= \frac{\sqrt{2\,(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2\,(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2\,(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{2(x+h)+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}{h\cdot\left(\sqrt{2\,(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\right)} \\
&= \frac{(2\,(x+h)+1)-(2x+1)}{h\cdot\left(\sqrt{2\,(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\right)} \\
&= \frac{2x+2h+1-2x-1}{h\cdot\left(\sqrt{2\,(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2h}{h \cdot \left(\sqrt{2\,(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}\right)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\,(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio

1. Racionalice el denominador en la siguiente expresión

$$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$$

2. Racionalice el numerador en la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}{(a-b)^2}$$

Lección 38

Ecuaciones lineales

Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebráicas en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos, llamados incóginitas o variables, relacionados mediante operaciones matemáticas.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones:

$x^2 + 4 = 16$,

$3x + 5 = -1$,

$\sqrt{y-3} = 4$,

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} = 4$,

$2xy - 5x + 4y = 0$.

Si en una ecuación se reemplazan las variables por números que convierten la ecuación en una proposición verdadera, decimos que dichos números son **soluciones** o **raíces** de la ecuación.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución** de la ecuación.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Resolver una ecuación es encontrar todas las soluciones de la ecuación, y para ello transformamos la ecuación inicial en una ecuación equivalente más simple, usando las siguientes propiedades de la igualdad entre expresiones algebraicas:

Si A, B y C representan expresiones algebraicas:

1. Si a la igualdad $A = B$ le sumamos a ambos lados la expresión algebraica C, la igualdad se mantiene, es decir $A + C = B + C$

2. Si a la igualdad $A = B$ la multiplicamos a ambos lados por C ($C \neq 0$), la igualdad se mantiene, es decir $CA = CB$.

Ecuaciones lineales

Una ecuación **lineal** o de **primer grad**o en x es una ecuación de la forma

$$ax + b = 0$$

con a y b constantes (números reales) y $a \neq 0$. En esta ecuación x es la variable o incógnita.

Ejemplo 38.1

$2x + 3 = 23$ es una ecuación lineal o de primer grado en la variable x.

Las siguientes ecuaciones no son lineales:

$x^2 + 3x = 2$, $\sqrt{x} + 1 = 2x$, $\dfrac{5}{x} = 2x$.

La ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene una única solución dada por $x = -\dfrac{b}{a}$ ya que como $ax + b = 0$ al sumar $-b$ a ambos lados obtenemos $ax + b - b = 0 - b$ de donde $ax = -b$, así que al multiplicar a ambos lados por $\frac{1}{a}$ llegamos a la igualdad $\dfrac{1}{a} \cdot ax = \dfrac{1}{a} \cdot (-b)$ que se puede simplificar para obtener el resultado final $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 38.2

Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

1. $5x - 3 = 7$,
2. $2y - \dfrac{y}{2} + \dfrac{y+1}{4} = 6y$.

Solución

1. Debemos transformar la ecuación original en una equivalente, que sólo involucre la variable y su valor, es decir, debemos "despejar la variable":

$$\begin{array}{ll}
5x - 3 = 7, & \text{(Ecuación original)} \\
5x - 3 + 3 = 7 + 3, & \text{(Se suma 3 a cada lado)} \\
5x = 10, & \text{(Se realizan las operaciones)} \\
\dfrac{1}{5} \cdot 5x = \dfrac{1}{5} \cdot 10, & \text{(Se multiplica por } \dfrac{1}{5} \text{ cada lado)} \\
x = 2. & \text{(Se realizan las operaciones).}
\end{array}$$

Entonces que $x = 2$ es la solución de la ecuación.

Para verificar que $x = 2$ es la solución reemplazamos x por 2 en la ecuación original, así:

$5\,(2) - 3 = 10 - 3$ y obtenemos $7 = 7$ que es una proposición verdadera. Luego $x = 2$ si es la solución de la ecuación $5x - 3 = 7$.

2. Simplificamos la ecuación original, realizando las operaciones indicadas en cada lado de la igualdad:

   $2y - \dfrac{y}{2} + \dfrac{y+1}{4} = 6y$, es decir $\dfrac{8y - 2y + y + 1}{4} = 6y$ ó $7y + 1 = 24y$, donde podemos sumar a ambos lados $-24y$ para obtener $7y + 1 - 24y = 24y - 24y$ ó $-17y + 1 = 0$, que es una ecuación lineal que sabemos tiene una única solución dada por $y = \dfrac{1}{17}$, que puede ser obtenida como se mostró antes.

   Invitamos al lector a realizar la verificación de la solución.

Las ecuaciones lineales también se pueden usar para modelar situaciones de la vida diaria. Algunos ejemplos de estas situaciones son:

Ejemplo 38.3

Una compañia colombiana de alquiler de vehículos cobra 100.000 pesos por cada día mas 1.000 pesos por cada kilómetro recorrido. Si un visitante extranjero renta un vehículo en esta compañia por tres días y su cuenta es de 438.000 pesos, ¿cuántos kilómetros recorrió?

Solución

Para determinar la cantidad de kilómetros que el extranjero recorrió, llamemos

$$x = \text{Cantidad de kilómetros recorridos}$$

y planteamos el modelo

$$\text{costo total} = \text{costo diario} + \text{costo kilómetros}.$$

De donde

$$\begin{aligned} 438000 &= 100000(3) + 1000x \\ 438000 - 300000 &= 1000x \\ \frac{138000}{1000} &= x \\ 138 &= x. \end{aligned}$$

Así que el extranjero recorrió 138 kilómetros en el auto alquilado.

Ejemplo 38.4

Encuentre tres números consecutivos cuya suma sea 156.

Solución

Para resolver este ejercicio llamemos: $x =$ El menor número de los tres buscados. Entonces

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 156,$$

de donde $3x + 3 = 156$, que es una ecuación lineal para la cual tenemos que

$$x = \frac{156 - 3}{3} = 51.$$

Así que los tres números buscados son: 51, 52 y 53.

Ejemplo 38.5

Una mujer gana 10% mas que su esposo. Entre los dos ganan 42 millones de pesos al año. ¿Cuál es el salario de cada uno al año?

Solución

En este caso llamemos

$$x = \text{Salario del hombre al año, en millones de pesos,}$$

entonces el salario de la mujer sería $1.1x$. De donde podemos plantear la ecuación lineal

$$x + 1.1x = 42,$$

es decir que $2.1x = 42$ ó $x = 20$ millones de pesos. Así que el hombre gana 20 millones de pesos y su esposa 20(1.1)=22 millones de pesos al año.

Ejercicios

1. Resuelva las ecuaciones lineales
   (a) $2x + 7 = 31$,
   (b) $\frac{z}{5} = \frac{3}{10}z + 7$,
   (c) $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$.
2. Encuentre cuatro números impares consecutivos cuya suma sea 416.
3. Un trabajador gana 10000 pesos por hora de trabajo, pero si trabaja más de 35 horas a la semana se le paga 50 por ciento mas por cada hora extra trabajada. Una semana obtiene un salario total de 425000. ¿Cuántas horas de tiempo extra trabajó dicha semana? (Tenga en cuenta que una semana laboral contiene 5 días).

Lección 39

Ecuaciones cuadráticas I

Ecuaciones cuadráticas

Una **ecuación cuadrática** o de **segundo grado en** x, es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a, b y c constantes (números reales) y $a \neq 0$. En esta ecuación, x es la variable o incógnita. Por ejemplo, $3x^2+2x-1=0$ y $4x^2+2=0$ son ecuaciones cuadráticas.

Las ecuaciones cuadráticas en una variable pueden tener una raíz de multiplicidad 2, es decir dos soluciones iguales, dos soluciones distintas (cada una de miltiplicidad 1), o no tener solución real.

- Las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse usando factorización y la siguiente propiedad:

  $$AB = 0 \text{ si y sólo si } A = 0 \text{ ó } B = 0,$$

  con A y B expresiones algebraicas.

  Para utilizar esta propiedad agrupamos todos los términos a un lado de la igualdad, de tal forma que el otro lado de la igualdad sea **cero** $(= 0)$.

  Estas ideas también se pueden usar para resolver **ecuaciones polinómicas** de cualquier grado.

- Si la ecuación cuadrática es de la forma $x^2 = c$, $c \geqslant 0$, es decir, es una ecuación cuadrática que no tiene término lineal, se dice que es una **ecuación cuadrática simple** y siempre se puede resolver factorizando y aplicando la propiedad.

  En efecto, $x^2 = c$ se puede escribir como $x^2 - c = 0$ que se puede factorizar como $(x+\sqrt{c})\,(x-\sqrt{c}) = 0$.

  Luego, las soluciones de $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$ (ó $x = \pm\sqrt{c}$) (verificarlo).

  Ejemplo 39.1

  Resuelva las ecuaciones:

  1. $x^2 + 3x - 4 = 0$,

2. $2y^2 + 7y = -3$,
3. $x^2 = 7$,
4. $(x+2)^2 = 9$,
5. $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$.

Solución

1. Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación y obtenemos $(x+4)(x-1) = 0$. Luego, $x + 4 = 0$ ó $x - 1 = 0$, por lo tanto $x = -4$ ó $x = 1$. Así, las soluciones de la ecuación son $x = -4$ y $x = 1$.

   Verificamos que éstas son soluciones reemplazando los valores de x en la ecuación original:

   $(-4)^2 + 3(-4) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$,

   $(1)^2 + 3(1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$.

   Como -4 y 1 satisfacen la ecuación original, son efectivamente las soluciones de la ecuación

   $x^2 + 3x - 4 = 0$.

2. Agrupamos todos los términos al lado izquierdo de la ecuación, factorizamos y aplicamos la propiedad:

   $2y^2 + 7y = -3$ se puede escribir como $2y^2 + 7y + 3 = 0$ que se puede factorizar como $(2y+1)(y+3) = 0$.

   Entonces, $2y+1 = 0$ ó $y+3 = 0$, es decir, $y = -\dfrac{1}{2}$ ó $y = -3$. Luego, las soluciones de la ecuación son $y = -\dfrac{1}{2}$ e $y = -3$ (verificarlo).

3. $x^2 = 7$ es equivalente a $x^2 - 7 = 0$, que se puede factorizar como $(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7}) = 0$. Entonces $x = \pm\sqrt{7}$ y el conjunto solución de la ecuación $x^2 = 7$ es $\left\{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right\}$ (verificarlo).

4. $(x+2)^2 = 9$, es decir, $(x+2)^2 - 9 = 0$ que al factorizar se convierte en $(x + 2 + 3)(x + 2 - 3) = 0$, es decir, $(x+5)(x-1) = 0$. Luego, $x = -5$ y $x = 1$ son las raíces de la ecuación original (verificarlo).

5. $x^3+5x^2+6x = 0$ puede factorizarse por factor común para obtener $x\left(x^2 + 5x + 6\right) = 0$ y posteriormente el trinomio entre paréntesis puede ser factorizado de tal manera que $x(x+3)(x+2) = 0$. Luego las soluciones de esta ecuación son $x = 0$, $x = -3$ y $x = -2$.

- En algunos casos la ecuación cuadrática puede llevarse a la forma del ejemplo b) anterior, escribiendo a un lado de la ecuación los términos que involucran la variable y en el otro los términos independientes, para luego convertir la expresión que involucra la variable en un cuadrado perfecto, sumando o restando un número adecuado, que también debe sumarse o restarse al otro lado de la ecuación, para conservar la igualdad. Este procedimiento se conoce como **completación del cuadrado.** Es decir,

$$x^2 + bx + c = 0$$

es equivalente a

$$x^2 + bx = -c.$$

Para completar un cuadrado perfecto a la izquierda, debemos sumar a ambos lados de la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, es decir,

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

y así el lado izquierdo de la ecuación es $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. Si el lado derecho es una cantidad positiva, podemos continuar transformando la ecuación para obtener una diferencia de cuadrados igual a 0, y luego procedemos como en el ejemplo anterior.

Si el lado derecho es una cantidad negativa, la ecuación no tiene solución real ¿Por qué?

En forma similar se trabajan las ecuaciones de la forma $x^2 - bx + c = 0$.

Ejemplo 39.2

Resuelva la ecuación $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Solución

$$\begin{array}{ll}
x^2 - 4x + 2 = 0, & \text{(Ecuación original)} \\
x^2 - 4x = -2, & \text{(Ecuación equivalente)} \\
x^2 - 4x + \left(-\frac{4}{2}\right)^2 = -2 + \left(-\frac{4}{2}\right)^2, & \text{(Completamos cuadrado)} \\
x^2 - 4x + 4 = -2 + 4, & \text{(Realizamos operaciones)} \\
(x-2)^2 = 2, & \text{(Factorizamos)} \\
(x-2)^2 - 2 = 0, & \text{(Igualamos a 0)} \\
\left[(x-2) + \sqrt{2}\right]\left[(x-2) - \sqrt{2}\right] = 0, & \text{(Factorizamos)} \\
x = 2 \pm \sqrt{2}. & \text{(Obtenemos las raíces)}
\end{array}$$

Luego, las soluciones de la ecuación son: $x = 2 + \sqrt{2}$ y $x = 2 - \sqrt{2}$.

Ejercicios

1. Resuelva por factorización:
   (a) $x^2 + x - 12 = 0$.
   (b) $4x^2 - 4x - 15 = 0$.
2. Resuelva la ecuación $x^2 + 2x - 5 = 0$, completando el cuadrado.
3. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas tanto por factorización como completando el cuadrado.
   (a) $x^2 - 6x - 27$.
   (b) $x^2 + 13x - 30$.
   (c) $(2x)^2 - 12x - 27$.

Lección 40

Ecuaciones cuadráticas II

Ecuaciones cuadráticas con $a \neq 1$

Cuando el coeficiente del término en x^2 es diferente de 1, se factorizan los términos que contienen la variable tomando como factor común el coeficiente del término en x^2, es decir,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c, \quad a \neq 1,$$

y luego se completa el cuadrado de la expresión que está dentro del paréntesis.

Es importante tener en cuenta que al sumar una cantidad dentro del paréntesis, al otro lado debe sumarse la misma expresión multiplicada por el coeficiente de x^2.

Ejemplo 40.1

Resuelva la ecuación $3x^2 - 6x - 1 = 0$.

Solución

Tenemos que $3x^2 - 6x - 1 = 0$, así que después de sumar 1 a ambos lados podemos obtener $3x^2 - 6x = 1$ o lo que es lo mismo $3\left(x^2 - 2x\right) = 1$. Para completar el cuadrado dentro del paréntesis debemos sumar 1 allí y por lo tanto 3 al lado derecho, es decir $3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 1 + (3)(1)$.

En este paso ya podemos factorizar para obtener $3\left(x - 1\right)^2 = 4$, es decir $3(x-1)^2 - 4 = 0$ que puede ser factorizado nuevamente como $(\sqrt{3}(x-1)+2)(\sqrt{3}(x-1)-2) = 0$.

Así, las soluciones de la ecuación son:

$$x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ y } x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

- Usando la técnica de completar el cuadrado, puede probarse que las raíces de cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta última se conoce como la **fórmula cuadrática**.

En este caso la factorización de la ecuación original es

$$a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

- Se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática, y se denota por D, a la expresión b^2-4ac, es decir,

$$D=b^2-4ac.$$

Con base en la fórmula cuadrática, las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. Si $D>0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D=0$ la ecuación tiene una solución real de multiplicidad 2.
3. Si $D<0$ la ecuación no tiene soluciones reales. (Las soluciones son números complejos)

Ejemplo 40.2

Encuentre las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

- $z^2+5z+3=0$,
- $9x^2-12x+4=0$,
- $5x^2-7x+5=0$.

Solución

- En este caso, $a=1$, $b=5$ y $c=3$, así que $D=b^2-4ac=5^2-4\,(1)\,(3)=13>0$, y tenemos dos raíces reales distintas. Reemplazando en la fórmula cuadrática tenemos:

$$z=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\,(1)\,(3)}}{2\,(1)}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Luego, las soluciones son $z=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$ y $z=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$.

- En este caso, $a=9$, $b=-12$ y $c=4$, de donde $D=144-144=0$ y concluimos que debemos encontrar una raíz real de multiplicidad 2. Usando la fórmula cuadrática,

$$x=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\,(9)\,(4)}}{2\,(9)}=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}.$$

Luego, la ecuación tiene una raíz de multiplicidad 2, $x=\dfrac{2}{3}$.

- Ahora, como $a=5$, $b=-7$ y $c=5$, entonces $D=-51<0$ y la ecuación no tiene raíces reales. Veámoslo:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\,(5)\,(5)}}{2\,(5)}=\frac{7\pm\sqrt{-51}}{10}.$$

Como $\sqrt{-51}$ no es un número real, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

En la física se presentan problemas que involucran ecuaciones cuadráticas, entre ellos los de caída de cuerpos.

Ejemplo 40.3

Si dejamos caer un objeto desde una altura h_0 por encima del suelo, su altura, después de t segundos, está dada por la ecuación $h = -16t^2 + h_0$, donde h se mide en pies.

En particular, si se deja caer una pelota desde una altura de 288 pies, ¿cuánto tiempo se demora la pelota para tocar el piso?

Solución

La pelota llega al suelo cuando $h = 0$ (pies) y, como $h_0 = 288$ (pies), reemplazando en la ecuación que modela este fenómeno tenemos

$$0 = -16t^2 + 288.$$

Para calcular el tiempo debemos resolver esta ecuación cuadrática en la variable t.

En la ecuación $0 = -16t^2+288$, el lado derecho se puede factorizar como $0 = -16\left(t^2 - 18\right)$ de donde $t^2 - 18 = 0$ ó $\left(t - \sqrt{18}\right)\left(t + \sqrt{18}\right) = 0$.

Luego, $t = \sqrt{18}$ ó $t = -\sqrt{18}$ pero como t no puede ser negativo (¿por qué?), entonces,

$$t = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ (segundos).$$

Luego la pelota llegará al suelo $3\sqrt{2}$ segundos después de dejarse caer.

Ejemplo 40.4

Un avión vuela de Bogotá a Medellín, una distancia de 420 kilómetros. La velocidad para el viaje de regreso fue de 100 km/h más rápido que la velociad del viaje de ida. Si el viaje total dura 3 horas, ¿cuál es la velocidad del avión desde Bogotá a Medellín?

Solución

Llamemos

$$s = \text{ Velocidad del avión entre Bogotá y Medellín}$$

entonces $s + 100$ es la velocidad entre Medellín y Bogotá y teniendo en cuenta que $tiempo = \frac{distancia}{velocidad}$, entonces

$$3 = \frac{420}{s} + \frac{420}{s+100},$$

de donde

$$\begin{aligned} 420(s+100)+420s &= 3s(s+100) \\ 840s+42000 &= 3s^2+300s \\ 0 &= 3s^2-540s-42000 \end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática que puede ser resuelta con la fórmula

$$s=\frac{540\pm\sqrt{540^2-4\,(3)\,(-42000)}}{2\,(3)}=\frac{180\pm\sqrt{88400}}{2},$$

a partir de lo cual obtenemos

$$s\approx 238.66 \text{ ó } s\approx -58.66.$$

Pero como la velocidad debe ser positiva, concluimos que el avión entre Bogotá y Medellín viajaba a 238.66 kilómetros por hora.

Ejercicios

1. Resuelva completando el cuadrado:
   (a) $3x^2-6x-9=0.$
   (b) $-2x^2+6x+3=0.$
2. Halle el discriminante de las siguientes ecuaciones, determine cuantas soluciones reales tiene y encuéntrelas:
   (a) $x^2+3x+1=0.$
   (b) $3x^2-6x+1=0.$
   (c) $5x^2-7x+5=0.$

Lección 41

Otros tipos de ecuaciones

Algunas ecuaciones se presentan en otras formas, las cuales, mediante operaciones algebraicas, se transforman en ecuaciones lineales, cuadráticas o polinómicas.

Ecuaciones en las que la variable o variables hacen parte del denominador de expresiones fraccionarias

Si en una ecuación las variables aparecen en los denominadores de expresiones fraccionarias, realizamos las operaciones indicadas, y analizamos la expresión simplificada para determinar qué ecuación debe resolverse.

Ejemplo 41.1

Resuelva la ecuación $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x-3} + 4 = 0$.

Solución

Primero realizamos las operaciones indicadas al lado izquierdo de la ecuación, así:

$\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x-3} + 4 = 0$ puede ser sumado como $\dfrac{10\,(x-3) - 12x + 4x(x-3)}{x\,(x-3)} = 0$ para obtener $\dfrac{10x - 30 - 12x + 4x^2 - 12x}{x(x-3)} = 0$, que después de simplificar el numerador se convierte en $\dfrac{4x^2 - 14x - 30}{x(x-3)} = 0$ ó $\dfrac{2(2x^2 - 7x - 15)}{x(x-3)} = 0$.

Como $x(x-3)$ no puede ser cero porque la división por cero no está definida, entonces, para que el cociente sea igual a cero, el numerador tiene que ser igual a cero, y como $2 \neq 0$, la única posibilidad es que $2x^2 - 7x - 15 = 0$. Es decir, nuestro problema se reduce a resolver la ecuación cuadrática

$$2x^2 - 7x - 15 = 0, \text{es decir, } (2x+3)(x-5) = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son $x = -\dfrac{3}{2}$ y $x = -5$ (verificarlo).

Ecuaciones en las que la variable o variables son parte de cantidades subradicales

Si en la ecuación sólo aparece un radical, la escribimos de tal forma que a un lado de la igualdad sólo aparezca el radical, luego elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación. Con este procedimiento la ecuación resultante puede tener raíces que no lo sean de la ecuación original, por lo que debemos determinar mediante verificación cuáles de las raíces de la ecuación resultante son raíces de la ecuación original.

Ejemplo 41.2

Resuelva la ecuación $\sqrt{5-x}+1=x-2$.

Solución

$\sqrt{5-x}+1=x-2$, es decir, $\sqrt{5-x}=x-3$, de donde $(\sqrt{5-x})^2=(x-3)^2$ ó $5-x=x^2-6x+9$, por lo tanto $x^2-5x+4=0$ que al factorizarse produce

$$(x-4)(x-1)=0.$$

Luego, $x=4$ y $x=1$ son las soluciones de la ecuación $x^2-5x+4=0$.

Veamos si son raíces de la ecuación original $\sqrt{5-x}+1=x-2$.

Al reemplazar x por 4 en esta ecuación tenemos:

$$\sqrt{5-4}+1=4-2,$$

ya que $2=2$. Luego $x=4$, que es solución de $x^2-5x+4=0$, lo es también de la ecuación original $\sqrt{5-x}+1=x-2$.

Al reemplazar $x=1$ en la ecuación original, tenemos

$$\sqrt{5-1}+1\neq 1-2,$$

ya que $3\neq -1$. Luego, $x=1$ que es solución de $x^2-5x+4=0$, no lo es de la ecuación original.

Entonces, la única solución de la ecuación original es $x=4$.

Si en la ecuación aparece más de un radical con variables en su interior, se escribe uno de éstos a un lado y los demás al otro lado de la igualdad, se elevan ambos lados al cuadrado y se realizan las operaciones. El procedimiento se repite hasta que desaparezcan todos los radicales.

Ecuaciones de la forma $x^{2n} \pm bx^n + c = 0$

Estas ecuaciones se pueden transformar en ecuaciones cuadráticas utilizando otra variable en reemplazo de x^n. Si $y = x^n$, la ecuación original se escribe como $y^2 \pm by + c = 0$, que es una ecuación cuadrática en la variable y, la cual sabemos resolver. Conociendo los valores de y que satisfacen esta nueva ecuación, los reemplazamos en $y = x^n$, y hallamos los correspondientes valores de x que son las soluciones de la ecuación original. El procedimiento anteriormente descrito se llama **solución de ecuaciones usando cambio de variable**.

Ejemplo 41.3

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Solución

Como la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ puede escribirse como $\left(x^2\right)^2 - 5\left(x^2\right) + 4 = 0$, hacemos $y = x^2$ y entonces la ecuación original puede escribirse como $y^2 - 5y + 4 = 0$, la cual sabemos resolver.

En efecto, factorizando el lado derecho de $y^2 - 5y + 4 = 0$ obtenemos $(y-4)(y-1) = 0$ entonces $y = 4$ y $y = 1$ son las soluciones de la nueva ecuación. Como $y = x^2$, para $y = 4$, $x = \pm 2$ y para $y = 1$, $x = \pm 1$.

Luego, las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son $x = \pm 2$, $x = \pm 1$.

Observemos que la ecuación tiene 4 raíces y el grado del polinomio en el miembro de la izquierda de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ es 4.

Ecuaciones con potencias racionales

Se resuelven como en la situación anterior, haciendo cambio de variable, de tal manera que la nueva variable sea la variable original elevada a la menor potencia.

Ejemplo 41.4

Determine todas las soluciones de la ecuación

$$x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} = 3x^{\frac{1}{6}} - 9.$$

Solución

Agrupamos todos los términos a la izquierda de la igualdad, de manera que el lado derecho sea cero y hacemos el cambio de variable $w = x^{\frac{1}{6}}$. Entonces $w^2 = x^{\frac{1}{3}}$ y $w^3 = x^{\frac{1}{2}}$, y así $x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{1}{6}} + 9 = 0$ es equivalente a $w^3 - 3w^2 - 3w + 9 = 0$.

¿Cuántas raíces reales tendrá esta ecuación?

En esta última ecuación factorizamos el lado izquierdo de la igualdad, así:

El lado izquierdo de la ecuación $w^3 - 3w^2 - 3w + 9 = 0$ puede factorizarse por agrupación como $w^2 (w - 3) - 3 (w - 3) = 0$,

de donde $(w^2 - 3) (w - 3) = 0$.

Es decir $(w - 3) \left(w - \sqrt{3}\right) \left(w + \sqrt{3}\right) = 0$ y las soluciones de la nueva ecuación son: $w = 3$, $w = \sqrt{3}$ y $w = -\sqrt{3}$.

Para hallar las raices de la ecuación original, reemplazamos estos valores en la ecuación $w = x^{\frac{1}{6}}$. Para $w = 3, x = 3^6 = 720$ y para $w = \pm\sqrt{3}$, $x = \left(\pm\sqrt{3}\right)^6 = 27$.

Nuevamente, debemos verificar estas soluciones en la ecuación original:

$$\left(3^6\right)^{\frac{1}{2}} - 3\left(3^6\right)^{\frac{1}{3}} - 3\left(3^6\right)^{\frac{1}{6}} + 9 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 9 = 0.$$

Luego $x = 3^6$ es solución de la ecuación original.

$$(27)^{\frac{1}{2}} - 3\,(27)^{\frac{1}{3}} - 3\,(27)^{\frac{1}{6}} + 9 = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Luego $x = 27$ es solución de la ecuación original.

Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver ecuaciones que involucran valor absoluto, recordemos que $|a| = a$ ó $|a| = -a$ según se tenga $a \geq 0$ ó $a < 0$, respectivamente.

Ejemplo 41.5

Resuelva la ecuación $|3x + 5| = 1$.

Solución

De acuerdo con la definición de valor absoluto,

$$3x + 5 = 1 \quad \text{ó} \quad -(3x + 5) = 1$$

• Si $3x + 5 = 1$ entonces $3x = -4$, es decir $x = -\dfrac{4}{3}$

• Si $-(3x + 5) = 1$ entonces $3x + 5 = -1$, es decir $3x = -6$ lo cual implica $x = -2$.

Luego, las soluciones de la ecuación $|3x + 5| = 1$ son $x = -2$ y $x = -\dfrac{4}{3}$.

Verifiquemos que estos dos valores de x satisfacen la ecuación original.

Si $x = -2$, $|3(-2)+5| = |-6+5| = |-1| = 1$.

Si $x = -\frac{4}{3}$, $\left|3(-\frac{4}{3})+5\right| = |-4+5| = |1| = 1$.

Nota: En muchas aplicaciones se tiene ecuaciones que relacionan dos ó más variables, y es importante expresar una de éstas en términos de las otras.

Ejemplo 41.6

Escriba la variable indicada en términos de las otras:

a) $F = \dfrac{GmM}{r^2}$, variable m (F es fuerza gravitacional de la tierra)

b) $P = 2l + 2w$, variable w (P es el perímetro de un rectángulo de lados l y w.)

Solución

a) $F = \dfrac{GmM}{r^2}$ puede escribirse como

$$\frac{r^2F}{MG} = \frac{r^2}{MG} \cdot \frac{GmM}{r^2},$$

de donde $m = \dfrac{r^2F}{MG}$.

b) $P = 2l + 2w$ puede escribirse como $P - 2l = 2w$, de donde $\dfrac{P-2l}{2} = w$, es decir $w = \dfrac{P}{2} - l$.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$
2. $\sqrt{5\sqrt{t} - t - 1} = \sqrt{5}$
3. $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$
4. $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$
5. $|3x - 7| = x + 2$
6. $|x - 4| = |x - 2|$

Lección 42

Modelado mediante ecuaciones I

Tanto en matemáticas como en otras ciencias, y aún en situaciones de la vida real, encontramos problemas que involucran dos o más cantidades relacionadas entre sí y entonces debemos plantear y resolver un **modelo matemático**, que puede ser una **ecuación,** para relacionar y encontrar estas cantidades.

Para resolver este tipo de problemas es conveniente proceder de acuerdo con las siguientes instrucciones:

1. Leer cuidadosamente el problema resaltando la información más importante y, de ser posible, hacer un dibujo que ilustre la situación planteada indicando las cantidades conocidas en el problema.

2. Identificar claramente la cantidad o cantidades desconocidas (variables o incógnitas) que debemos encontrar y asignarles una letra. Por lo general éstas aparecen en la pregunta que plantea el problema. Si es posible se deben identificar en el dibujo hecho en el paso 1.

3. Encontrar, en el enunciado del problema o en el dibujo, la información que permita relacionar las cantidades y las variables definidas en 1. y 2.

4. Plantear un modelo matemático o ecuación que permita expresar esta relación.

5. Resolver la ecuación, verificar la respuesta y responder en palabras las preguntas planteadas.

Ejemplo 42.1

Exprese el área A de un triángulo equilátero en términos de su altura h.

Solución

Realizamos un dibujo que representa la situación planteada en el problema (ver figura 42.1).

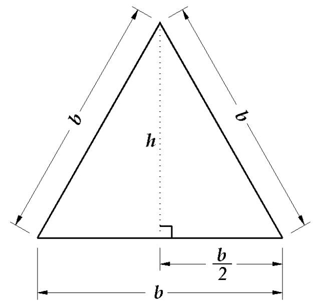


Figura 42.1

Sea b la base del triángulo y h la altura sobre la base b.

El área A del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}bh.$$

Queremos expresar A en términos de h, entonces debemos relacionar a b con h y hallar una expresión para b en términos de h .

Como todo triángulo equilátero es isósceles, la altura h sobre la base b es también mediana y, aplicando el Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$\begin{aligned}
b^2 =& h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \\
b^2 - \frac{b^2}{4} =& h^2, \\
\frac{3}{4}b^2 =& h^2, \\
b^2 =& \frac{4}{3}h^2, \\
b =& \frac{2}{\sqrt{3}}h.
\end{aligned}$$

Luego,

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{h^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}h^2}{3}.$$

Y entonces, el área A de un triángulo equilátero, en términos de su altura h, es

$$A = \frac{\sqrt{3}h^2}{3}.$$

Ejemplo 42.2

Carlos invirtió \$ 120,000 en dos fondos de inversión diferentes. En uno de ellos a un interés simple de 4.5% por año y en el otro a una tasa de 4% anual. Después de un año, el dinero obtenido por intereses en las inversiones es de \$5,250 ¿Cuánto dinero invirtió en cada fondo?

Solución

Debemos determinar la cantidad de dinero invertida en cada fondo.

Sea x : cantidad de dinero, en pesos, invertida en el fondo al 4.5%.

Entonces:

$120000 - x$: cantidad de dinero, en pesos, invertida en el otro fondo al 4%.

$0.045x$: cantidad de dinero, en pesos, obtenida por intereses al invertir en el fondo al 4.5%.

$0.04\,(120000 - x)$: cantidad de dinero, en pesos, obtenida por intereses al invertir en el fondo que produce el 4%.

Ahora, como el dinero obtenido por intereses en las dos inversiones es de \$5250, entonces:

$$0.045x + 0.04\,(120000 - x) = 5250.$$

Resolviendo para x la ecuación planteada obtenemos:

$$\begin{aligned}
0.045x + 0.04\,(120000 - x) &= 5250, \\
0.045x + 4800 - 0.04x &= 5250, \\
0.005x &= 450, \\
x &= \frac{450}{0.005}, \\
x &= 90000.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, Carlos invirtió \$90,000 al 4.5% y \$30,000 al 4%.

Ejemplo 42.3

Un hombre se aleja caminando de un poste cuya lámpara está 6 m por arriba del suelo. El hombre tiene una estatura de 2 m. ¿Cuánto mide la sombra del hombre cuando está a 10 m del poste?

Solución

La figura 42.2 ilustra la situación planteada en el problema:

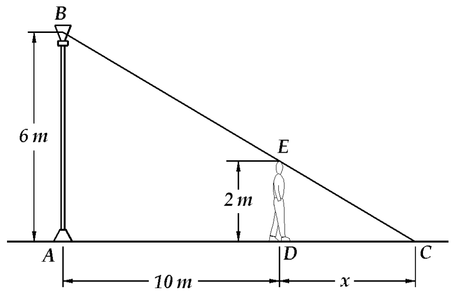


Figura 42.2

Como $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, aplicando el Teorema de Thales, obtenemos que $\triangle\ ABC \sim \triangle\ DEC$. Sabiendo que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales tenemos que

$$\frac{6}{10+x} = \frac{2}{x}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{6}{10+x} - \frac{2}{x} &= 0, \\ \frac{6x - 2(10+x)}{x(10+x)} &= 0, \\ \frac{6x - 20 - 2x}{x(10+x)} &= 0, \\ 4x - 20 &= 0, \\ 4x &= 20, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Y entonces, la longitud de la sombra del hombre, cuando éste dista a $10m$ del poste, es de $5m$.

Ejercicios

1. La suma de dos números positivos es 60. Encuentre una función que modele su producto en términos de uno de los números.
2. Un alambre de $10cm$ de largo se corta en dos trozos, uno de ellos de longitud x. Cada trozo se dobla en la forma de un cuadrado. Halle una función que modele el área total encerrada por los dos cuadrados, en términos de x.
3. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Exprese el área del triángulo como una función de la longitud de la base.

Lección 43

Modelado mediante ecuaciones II

Ejemplo 43.1

Se tienen $128\pi\ cm^2$ de hojalata para fabricar un envase cerrado en forma de cilindro circular recto.

1. Diseñe un modelo matemático para expresar el volumen V del envase en términos del radio r de la base.

2. ¿Para cuáles valores de r el volumen V del envase es igual a cero?

Solución

La figura 43.1 ilustra la situación planteada en el problema.

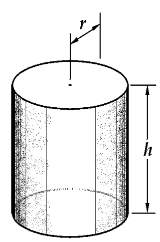


Figura 43.1

1. Sean:

   r : radio, en cm, de la base del envase.

   h : altura, en cm, del envase.

   V : volumen , en cm^3, del envase.

   Como $V = \pi r^2 h$ y debemos expresar a V en términos de r únicamente, hallemos una expresión para h en términos de r.

   La cantidad de material necesaria para construir el envase es igual al área superficial del envase, es decir el área de la tapa, del fondo y el área lateral de cilindro. Luego

   $$128\pi = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Despejemos h :

$$\begin{aligned}128\pi =&2\pi r^2 + 2\pi r h,\\128\pi - 2\pi r^2 =&2\pi r h,\\h =&\frac{128\pi - 2\pi r^2}{2\pi r},\\h =&\frac{64 - r^2}{r}.\end{aligned}$$

Sustituyendo h en V obtenemos:

$$V = \pi r^2 \left(\frac{64 - r^2}{r}\right) = \pi r(64 - r^2).$$

Luego, el volumen V del envase en términos de r es $V = \pi r(64 - r^2)$.

2. Si reemplazamos $V = 0$ en la expresión hallada en el numeral anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\pi r(64 - r^2) =&0,\\\pi r(8 - r)(8 + r) =&0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $r = 0$, $r = 8$ ó $r = -8$. Sin embargo, como r es una distancia, no tomamos el valor de $r = -8$.

Entonces, el volumen es cero cuando el radio es 0 cm, o cuando el radio es de 8 cm. Observemos que si el radio es 0 no hay cilindro, y si el radio es 8 cm, la cantidad de hojalata sólo alcanza para hacer las dos tapas, es decir, tampoco hay cilindro.

Ejemplo 43.2

María emprende un viaje desde Manizales hasta Cali, ciudades que están a una distancia de 300 km. Viaja un tramo en bus, y éste llega a la estación de tren justo a tiempo para que María continúe su viaje por tren. El bus viaja a una velocidad promedio de 40 km/h y el tren se mueve a 60 km/h. Si el viaje completo dura 5.5 horas ¿cuánto tiempo pasará María en el tren?

Solución

Sea t : tiempo, en horas, que María viaja en tren.

Entonces,

$5.5 - t$: tiempo, en horas, que María viaja en bus.

Como

$$distancia = velocidad \times tiempo,$$

tenemos que la distancia recorrida en tren es $60t$ y la distancia recorrida en bus es $40(5.5-t)$.

Ahora, como la distancia total es 300 km, entonces

$$\begin{aligned}60t+40(5.5-t)=&300,\\ 60t+220-40t=&300,\\ 20t=&80,\\ t=&4.\end{aligned}$$

Luego, María viajará 4 horas en el tren.

Ejemplo 43.3

Un cono circular recto de radio de la base r y altura h se circunscribe a una esfera de 4 cm de radio. Exprese el volumen V del cono circular recto en términos de h.

Solución

La figura 43.2 ilustra la situación planteada en el problema.

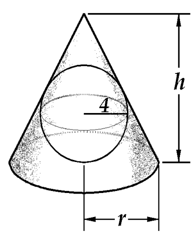


Figura 43.2

Sean

r : radio, en cm, de la base del cono circular recto

h : altura, en cm, del cono circular recto

V : Volumen , en cm^3, del cono.

Sabemos que $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$. Para expresar a V en términos de h , debemos relacionar r con h.

Si consideramos la sección tranversal del sólido mostrada en la figura 43.3, $\Delta DBC \backsim \Delta EOB$ por el criterio de semejanza AA, ya que en toda circunferencia, el radio es perpendicular a la recta tangente a la circunferencia, en el punto de tangencia.

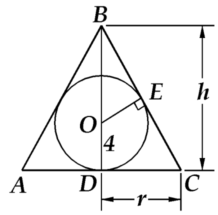


Figura 43.3

Como los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales, tenemos que

$$\frac{r}{4} = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h-4}.$$

Despejemos r :

$$\begin{aligned}\frac{r}{4} &= \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h-4},\\ \frac{r(h-4)}{4} &= \sqrt{r^2+h^2}.\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado en ambos lados obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{r^2(h-4)^2}{16} &= r^2+h^2,\\ r^2(h-4)^2 &= 16r^2+16h^2,\\ r^2(h-4)^2-16r^2 &= 16h^2,\\ r^2\left[(h-4)^2-16\right] &= 16h^2,\\ r^2 &= \frac{16h^2}{(h-4)^2-16}.\end{aligned}$$

Sustituyendo r^2 en V obtenemos

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{16h^2}{(h-4)^2-16}\right]h = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{16h^3}{(h-4)^2-16}\right].$$

Esta última ecuación nos da V en términos de h.

Ejercicios

1. La altura de un cilindro circular recto es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen del cilindro en términos de su radio.

2. Un envase cerrado de hojalata, cuyo volumen es de 60 pul^3, tiene la forma de un cilindro circular recto. Suponga que el costo del material para las tapas, por unidad de área, es dos veces el costo del material para los lados. Si se sabe que el material para las tapas tiene un costo de 200 pesos por pul^2, encuentre un modelo que exprese el costo total del material como una función del radio de la base del envase.

3. El volumen de un cono es 100 pulg^3. Encuentre una función que modele la altura del cono en términos de su radio.

Lección 44

Modelado mediante ecuaciones III

Ejemplo 44.1

Fontibón queda a 10 km al norte de una carretera abandonada, que va de este a oeste y sale de Guatavita, como se muestra en la figura 44.1. El punto de la carretera abandonada más cercano a Fontibón está a 40 km de Guatavita. Los alcaldes quieren construir una nueva carretera que una los dos pueblos. Calcularon que restaurar la carretera vieja costaría $1 millon por km, y que la construcción de una nueva costaría $2 millones por km. Si pretenden invertir exactamente 68 millones de pesos, ¿cuántos km de la carretera abandonada se podrían aprovechar? ¿Costaría menos que esta cantidad construir una carretera que una en forma directa los pueblos?

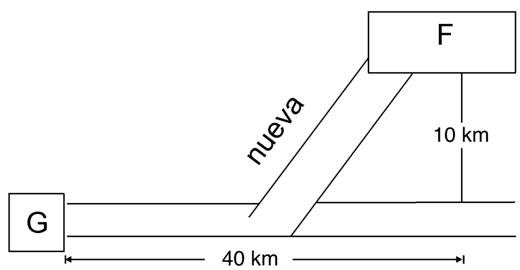


Figura 44.1

Solución

La figura 44.2 ilustra la situación planteada en el problema.

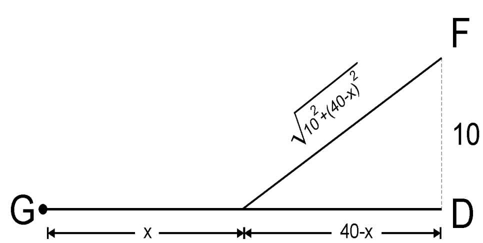


Figura 44.2

Sea x : número de km de carretera vieja que se podrían aprovechar.

Entonces:

$1000000x$: costo, en pesos, para reconstruir el tramo de carretera abandonada.

$2000000\sqrt{100+(40-x)^2}$: costo, en pesos, del tramo de carretera nueva.

Así entonces como el dinero total a invertir es la suma de los costos de cada uno de los dos tramos de carretera, tenemos que

$$(68000000) = 1000000x + 2000000\sqrt{100+(40-x)^2}.$$

Resolvamos esta ecuación para x :

$$\begin{aligned}
(68)(1000000) =& 1000000\left(x + 2\sqrt{100+(40-x)^2}\right)\\
68 =& x + 2\sqrt{1700-80x+x^2}\\
(68-x)^2 =& 4(1700-80x+x^2)\\
4624-136x+x^2 =& 6800-320x+4x^2\\
3x^2-184x+2176 =& 0\\
(3x-136)(x-16) =& 0.
\end{aligned}$$

$$3x-136=0 \quad \text{ó} \quad x-16=0.$$

Luego , las soluciones de la ecuación son $x = \dfrac{136}{3} \approx 45.33$ y $x = 16$.

$x = \dfrac{136}{3} \approx 45.33$ no tiene sentido para el problema ya que la distancia de G a D es de 40 km. Luego, la solución que tiene sentido para el problema es $x = 16$.

Por lo tanto, se pueden aprovechar 16 km de la carretera abandonada.

Para responder a la segunda pregunta, observemos que la carretera que une directamente los pueblos mediría, usando el Teorema de Pitágoras, $\sqrt{40^2+10^2} \approx 41.2\ km$. Su costo, a $2,000,000$ por km, sería de 82.5 millones de pesos, aproximadamente. Luego, costaría más que la cantidad de dinero disponible para la construcción de la carretera.

Nota: Una variable x se dice conjuntamente proporcional a dos variables y y z si existe una constante k, tal que

$$x = kyz.$$

La constante k se denomina constante de proporcionalidad.

Ejemplo 44.2

En una comunidad de 8000 personas, la velocidad con la que se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de personas que lo han escuchado y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste circula con una velocidad de 200 personas por hora. Encuentre un modelo que exprese la velocidad a la que se esparce el rumor en términos del número de personas que lo han escuchado.

Solución

Definición de variables

Sean

v: Velocidad con la que se difunde el rumor.

x: Número de personas que han escuchado el rumor.

Como en la comunidad hay 8000 personas, entonces el número de personas que no han escuchado el rumor puede expresarse como: $8000 - x$.

Según el enunciado:

$$v = kx(8000 - x)$$

Donde k: constante de proporcionalidad.

Hallemos el valor de k:

Cuando $x = 20$ personas tenemos que la velocidad con la que se esparce el rumor es $v = 200$ personas/hora. Por lo tanto

$$200 = 20k(8000 - 20).$$

Podemos entonces despejar k:

$$k = \frac{200}{20(7980)} = \frac{200}{159600} = \frac{1}{798}.$$

Luego, el modelo que expresa la velocidad del rumor en función del número, x, de personas que lo han escuchado es

$$v = \frac{1}{798}x(8000 - x).$$

O equivalentemente

$$v = \frac{8000}{798}x - \frac{1}{798}x^2.$$

Ejemplo 44.3

Una caja abierta (sin tapa) tiene una base cuadrada y un volumen de 4000 pul^3. Encuentre un modelo que exprese el área superficial de la caja como función de la longitud del lado de la base cuadrada.

Solución

Sean:

a: Longitud del lado de la base cuadrada.

b: Altura de la caja.

V: Volumen de la caja.

A_s: Área superficial de la caja.

A_b: Área de la base cuadrada de la caja.

A_l: Área de los lados de la caja.

La figura 44.3 ilustra la situación planteada en el problema.

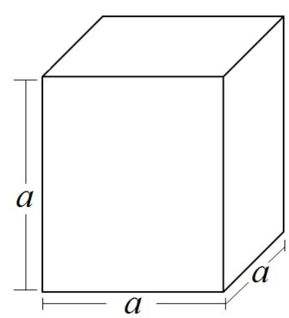


Figura 44.3

Para encontrar el área superficial de la caja, debemos encontrar primero el área de la base y el área de los lados.

$$A_b = a^2.$$

$$A_l = 4ab \text{ (Cuatro rectángulos)}$$

Así, el área superficial de la caja abierta es

$$A_s = a^2 + 4ab.$$

Para encontrar un modelo del área superficial en función del lado de la base, es necesario encontrar una expresión para la altura de la caja. Esto podemos hacerlo utilizando el volumen de la caja.

$$V = a^2b = 4000.$$

Despejando b obtenemos

$$b = \frac{4000}{a^2}.$$

Reemplazando el anterior resultado en la expresión obtenida anteriormente para A_s obtenemos el área superficial de la caja en función de la longitud del lado de la base.

$$A_s = a^2 + 4a\frac{4000}{a^2} = a^2 + \frac{16000}{a}.$$

Ejercicios

1. Una caja rectangular tiene una base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen en términos de su ancho.
2. Considere una esfera de radio 5 cm. Para una constante positiva r en el intervalo $(0, 5]$, considere el cono inscrito en la esfera que tiene una base de radio r y una altura h (h depende de r), $h \geq 5$. Exprese el volumen del cono como función de r.

Lección 45

Desigualdades I

Definición

Una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos cantidades empleando los símbolos $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$. Cuando en una o en las dos cantidades aparece una variable decimos que la desigualdad es **en una variable**.

Ejemplo 45.1

Las siguientes son desigualdades en una variable:

$2x + 7 < 3$,

$4y + 7 \geq 2y - 3$,

$(4z - 1)^{-1} > 0$,

$x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

Resolver una desigualdad en una variable es encontrar todos los valores de la variable que hacen verdadera la desigualdad.

Al conjunto de todas las soluciones de una desigualdad se le llama **conjunto solución de la desigualdad.**

Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Para resolver una desigualdad la transformamos en una desigualdad equivalente, en la que la solución es obvia, y para ello usamos las propiedades de orden de los números reales, las cuales son también válidas para expresiones algebraicas:

Si A, B, C y D son expresiones algebraicas, entonces:

1. Si a los dos lados de una desigualdad sumamos (o restamos) la misma expresión, el símbolo de la desigualdad se conserva. Es decir, si $A \leq B$ entonces $A + C \leq B + C$ y $A - C \leq B - C$.

2. Al multiplicar los dos lados de una desigualdad por una expresión positiva, el símbolo de la desigualdad se conserva. Es decir, si $C > 0$ y $A \leq B$ entonces $CA \leq CB$.
3. Al multiplicar los dos lados de una desigualdad por una expresión negativa, la desigualdad "cambia de sentido". Es decir, si $C < 0$ y $A \leq B$ entonces $CA \geq CB$.
4. Los recíprocos o inversos multiplicativos de dos expresiones positivas cambian el sentido de la desigualdad de las respectivas expresiones. Es decir, si $A > 0$, $B > 0$ y $A \leq B$ entonces $\dfrac{1}{A} \geq \dfrac{1}{B}$.
5. Si se suman dos desigualdades del mismo sentido, el símbolo de la desigualdad se conserva. Es decir, si $A \leq B$ y $C \leq D$ entonces $A + C \leq B + D$.

Estas propiedades son también válidas si en vez de $\leq$ tenemos los símbolos $\geq, <$ ó $>$.

Ejemplo 45.2

Halle los valores de x que satisfacen la desigualdad $2x + 1 \geq 7$.

Solución

$$\begin{aligned}
2x + 1 &\geq 7, \\
2x + 1 + (-1) &\geq 7 + (-1), \\
2x &\geq 6, \\
\frac{1}{2} \cdot 2x &\geq \frac{1}{2} \cdot 6, \\
x &\geq 3.
\end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución de la desigualdad es $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$. Es decir, el intervalo $[3, \infty)$.

Nota:

En general una desigualdad tiene infinitas soluciones, como puede verse en el ejemplo anterior.

Desigualdades lineales

Una desigualdad en una variable se dice **lineal** si el exponente de la variable es 1 y **no lineal** cuando el exponente de la variable es diferente de 1.

Ejemplo 45.3

Resuelva las siguientes desigualdades lineales.

1. $6 - x \leq 2x + 9$.
2. $-3 < 5 - 2x < 7$.
3. $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{4 - 3x}{5} < \dfrac{1}{4}$.

Solución

1. En este caso,

$$\begin{aligned}
6 - x + x \leq & 2x + 9 + x, \\
6 \leq & 3x + 9, \\
6 - 9 \leq & 3x + 9 - 9, \\
-3 \leq & 3x, \\
\left(\frac{1}{3}\right)(-3) \leq & \left(\frac{1}{3}\right)(3x), \\
-1 \leq & x.
\end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$, es decir, el intervalo $[-1, \infty)$.

2. Primera desigualdad: $-3 < 5 - 2x$.

$$\begin{aligned}
-3 < & 5 - 2x, \\
2x < & 5 + 3, \\
2x < & 8, \\
x < & 4.
\end{aligned}$$

Segunda desigualdad: $5 - 2x < 7$.

$$\begin{aligned}
5 - 2x < & 7, \\
5 - 7 < & 2x, \\
-2 < & 2x, \\
-1 < & x.
\end{aligned}$$

Así, el conjunto solución es

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 4 \ \text{ y } \ -1 < x\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 4\}.$$

Es decir, el intervalo

$$(-1, 4).$$

3. Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
5\cdot(-\frac{1}{2}) \leq & 5\cdot(\frac{4-3x}{5}) < 5\cdot(\frac{1}{4}),\\
-\frac{5}{2} \leq & \quad 4-3x \quad < \frac{5}{4},\\
-\frac{5}{2}-4 \leq & \, 4-3x-4 \, < \frac{5}{4}-4,\\
-\frac{13}{2} \leq & \quad -3x \quad < -\frac{11}{4},\\
\frac{1}{-3}\cdot(-\frac{13}{2}) \geq & \frac{1}{-3}\cdot(-3x) > \frac{1}{-3}\cdot(-\frac{11}{4}),\\
\frac{13}{6} \geq & \quad x \quad > \frac{11}{12},
\end{aligned}
$$

es decir
$$\frac{11}{12} < x \leq \frac{13}{6}.$$

Luego, el conjunto solución es el intervalo

$$\left(\frac{11}{12}, \frac{13}{6}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{11}{12} < x \leq \frac{13}{6}\right\}.$$

Ejercicios

Resuelva las siguientes desigualdades

1. $-2 \leq 3 - x < 2.$
2. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x.$
3. $1 < 3x + 4 \leq 16.$
4. $\frac{1}{6} < \frac{2x-13}{12} \leq \frac{2}{3}.$

Lección 46

Desigualdades II

Desigualdades no lineales

Para resolver este tipo de desigualdades procedemos en forma similar a como lo hacemos en ecuaciones, es decir, aplicamos propiedades y realizamos operaciones hasta tener 0 a un lado de la desigualdad, y el otro lado factorizado, y resolvemos la desigualdad teniendo en cuenta las "**leyes de signos**". Sean a, b y c números reales:

- Si ($a < 0$ y $b < 0$), o ($a > 0$ y $b > 0$) entonces $ab > 0$ y $\dfrac{a}{b} > 0$ si b $\neq 0$.
- Si ($a > 0$ y $b < 0$) o ($a < 0$ y $b > 0$) entonces $ab < 0$ y $\dfrac{a}{b} < 0$ si b $\neq 0$.
- $abc > 0$ si los tres factores son positivos, o si uno de ellos es positivo y los otros dos son negativos.
- $abc < 0$ si los tres factores son negativos, o si uno de ellos es negativo y los otros dos positivos.

Ejemplo 46.1

Halle el conjunto solución de la desigualdad $x^2 < x + 2$.

Solución

1. Realizamos operaciones hasta tener 0 a un lado de la desigualdad:

$$x^2 - x - 2 < 0$$

2. Factorizamos el lado izquierdo:

$$(x-2)(x+1) < 0$$

3. Debemos hallar los valores para los cuales el producto de $x - 2$ y $x + 1$ es menor que 0.

   Para ello primero ubicamos sobre la recta real los números para los cuales uno de los factores es 0, en este caso: $x = 2$ y $x = -1$ (ver figura 46.1), que definen los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, \infty)$.

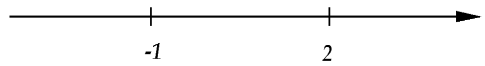


Figura 46.1

Luego analizamos sobre la recta real los signos de cada factor en cada uno de estos intervalos y con base en ellos determinamos el signo del producto y el intervalo donde dicho producto es negativo, como se muestra en la figura 46.2.

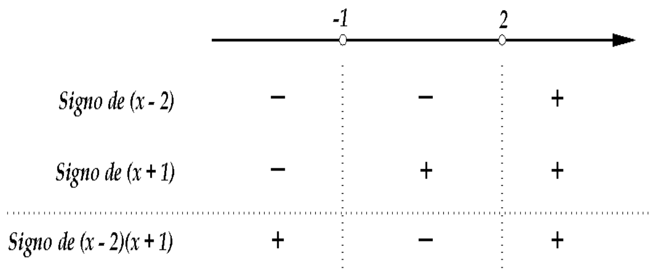


Figura 46.2

4. Finalmente analizamos si los extremos del intervalo satisfacen la desigualdad.

   En este caso $x = 2$ y $x = -1$ no satisfacen la desigualdad ya que hacen cero el producto.

   Luego, el conjunto solución de la desigualdad $x^2 < x + 2$ es $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\}$, que es el intervalo $(-1, 2)$.

Ejemplo 46.2

Resuelva la desigualdad

$$\frac{3+x}{3-x} \geq 1.$$

Solución

1. Realizamos operaciones hasta tener 0 a un lado de la desigualdad.

$$\begin{aligned} \frac{3+x}{3-x} &\geq 1, \\ \frac{3+x}{3-x} - 1 &\geq 0, \\ \frac{2x}{3-x} &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Ubicamos sobre la recta real los números que hacen 0 el numerador o el denominador, es decir $x = 0$ y $x = 3$, que definen los intervalos $(-\infty, 0), (0, 3), (3, \infty)$. Analizamos sobre la recta real el signo del numerador y del denominador en cada uno de estos intervalos y con base en ellos determinamos el signo del cociente y el intervalo donde el cociente es positivo. Como se muestra en la figura 46.3

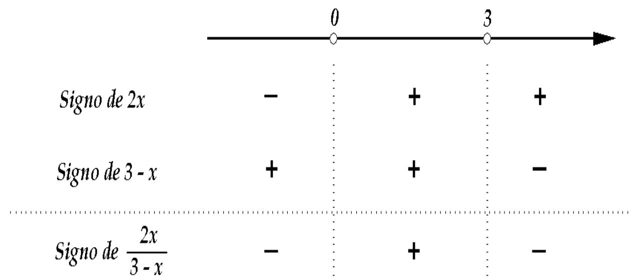


Figura 46.3

3. Analizamos si los extremos satisfacen la desigualdad.

   Si $x = 3$ el cociente no está definido por lo tanto 3 no hace parte del conjunto solución.

   Ahora, si $x = 0$,
   $$\frac{2 \cdot 0}{3 - 0} = 0 \geq 0,$$
   o sea que $x = 0$ satisface la desigualdad.

   Luego, el conjunto solución de la desigualdad es
   $$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 3\}.$$

   Es decir, el intervalo
   $$[0, 3).$$

Sobre la recta, la solución se representa como se muestra en la figura 46.4

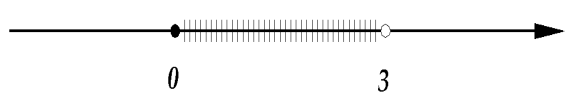


Figura 46.4

Ejemplo 46.3

Encuentre los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{x}{2} \geq \frac{5}{x+1} + 4.$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2}-\frac{5}{x+1}-4 &\geq 0,\\
\frac{x(x+1)-10-8(x+1)}{2(x+1)} &\geq 0,\\
\frac{x^2+x-10-8x-8}{2(x+1)} &\geq 0,\\
\frac{x^2-7x-18}{2(x+1)} &\geq 0,\\
\frac{(x-9)(x+2)}{2(x+1)} &\geq 0.
\end{aligned}$$

$x=9$ y $x=-2$ hacen cero el numerador y $x=-1$ hace cero el denominador. Estos tres números determinan los intervalos

$$(-\infty,-2),(-2,-1),(-1,9) \text{ y } (9,\infty).$$

Con ayuda de la figura 46.5, analizamos sobre la recta real los signos de los factores del numerador y del denominador, y con base en ellos determinamos dónde el cociente es positivo.

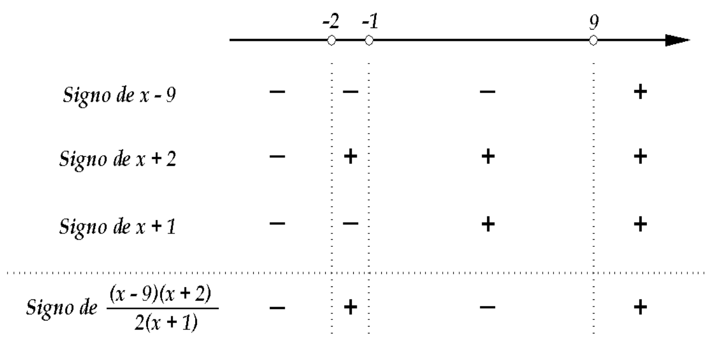


Figura 46.5

Luego, el cociente es positivo si $-2<x<-1$ o si $x>9$.

Veamos si los extremos de los intervalos satisfacen la desigualdad:

Si $x=-2$ el numerador es igual a 0 y el denominador es diferente de 0 entonces $x=-2$ sí satisface la desigualdad.

Similarmente comprobamos que $x=9$ satisface la desigualdad.

Si $x=-1$ el numerador es diferente de 0, pero el denominador es 0, es decir, para $x=-1$ el lado izquierdo de la desigualdad no tendría sentido, luego, este valor de x no satisface la desigualdad.

Entonces x satisface la desigualdad si

$$x \in ([-2,-1) \cup [9,\infty)),$$

es decir,

$$\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < -1 \text{ ó } x \geq 9\} = [-2,-1) \cup [9,\infty)$$

es el conjunto solución de la desigualdad.

Ejercicios

Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $x^2 + 5x + 6 > 0$.
2. $x^3 - 4x > 0$.
3. $\dfrac{2x+6}{x-2} \leq 0$.
4. $x^4 > x^2$.

Lección 47

Desigualdades III

Ejemplo 47.1

Encuentre la solución de la desigualdad

$$2x^2 + x + 10 > 0.$$

Solución

Calculemos el discriminante de la expresión cuadrática del lado izquierdo de la desigualdad.

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -79 < 0.$$

Luego $2x^2 + x + 10$ nunca es cero, lo cual implica que $2x^2 + x + 10$ siempre tiene el mismo signo para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$. En particular, para $x = 0$ vemos que

$$2(0)^2 + (0) + 10 > 0.$$

Por lo tanto, $2x^2 + x + 10 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y así el conjunto solución de la desigualdad dada es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 47.2

Resuelva la siguiente desigualdad.

$$5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2.$$

Solución

Simplifiquemos la expresión de tal forma que en el lado derecho quede solamente 0 y luego factoricemos.

$$\begin{aligned} 5x^2 - 3x^2 + 3x - 2 &\geq 0, \\ 2x^2 + 3x - 2 &\geq 0, \\ (2x-1)(x+2) &\geq 0. \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la desigualdad es cero si $x = \dfrac{1}{2}$ o si $x = -2$. Tales valores determinan los intervalos

$$(-\infty, -2), \left(-2, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Analizamos sobre la recta real (ver figura 47.1) los signos de los factores $2x-1$ y $x+2$ y con base en ello determinamos el signo de la expresión.

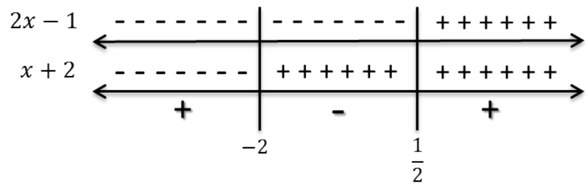


Figura 47.1

Luego, la expresión es positiva si $x < -2$ ó $x > \frac{1}{2}$.

Veamos si los extremos de los intervalos satisfacen la desigualdad.

Si $x = -2$, entonces $(2x-1)(x+2) = 0$.

Si $x = \frac{1}{2}$, entonces $(2x-1)(x+2) = 0$.

Entonces x satisface la desigualdad si

$$(\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Así, el conjunto solución es $(\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Ejemplo 47.3

Resuelva la desigualdad

$$\frac{x+2}{x+3} < \frac{x-1}{x-2}.$$

Solución

Simplifiquemos la expresión de modo que en el lado derecho quede solamente 0.

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x+3}-\frac{x-1}{x-2} &< 0,\\
\frac{(x+2)(x-2)-(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} &< 0,\\
\frac{x^2-4-x^2-3x+x+3}{(x+3)(x-2)} &< 0,\\
\frac{-2x-1}{(x+3)(x-2)} &< 0,\\
\frac{2x+1}{(x+3)(x-2)} &> 0.
\end{aligned}$$

En la expresión anterior $x=-\frac{1}{2}$, $x=-3$ y $x=2$ hacen cero al numerador o al denominador y determinan los intervalos

$$(-\infty,-3),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},2\right),(2,\infty).$$

Analizamos sobre la recta real los signos de los factores del numerador y del denominador y con base en ellos determinamos dónde el cociente es positivo, como se muestra en la figura 47.2.

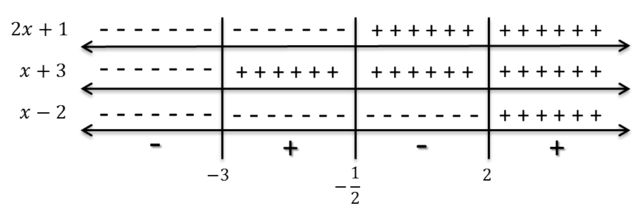


Figura 47.2

Luego, la expresión es positiva si $-3<x<-\frac{1}{2}$ o si $x>2$.

Veamos si los extremos de los intervalos satisfacen la desigualdad.

Si $x=-3$, el numerador es distinto de 0, pero el denominador es 0, es decir, si $x=-3$ el lado izquierdo de la desigualdad no tendría sentido; luego este valor no satisface la desigualdad.

Similarmente se muestra que $x=2$ no satisface la desigualdad.

Si $x=-\frac{1}{2}$, el numerador es 0 y el denominador es diferente de 0, de modo que este valor no satisface la desigualdad.

Entonces x satisface la desigualdad si

$$x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty).$$

Así, el conjunto solución es $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$.

Ejemplo 47.4

Resuelva la desigualdad

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \leq 0.$$

Solución

Simplifiquemos la expresión.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} &\leq 0, \\
\frac{(x+2)+(x+1)}{(x+1)(x+2)} &\leq 0, \\
\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} &\leq 0.
\end{aligned}$$

En la expresión anterior $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$ y $x = -2$ hacen cero al numerador o al denominador y determinan los intervalos

$$(-\infty, -2), \left(-2, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -1\right), (-1, \infty).$$

Analizamos sobre la recta real los signos de los factores del numerador y del denominador y con base en ellos determinamos dónde el cociente es negativo, como se muestra en la figura 47.3.

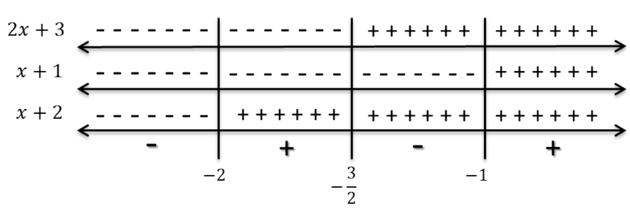


Figura 47.3

Luego, la expresión es negativa si $x < -2$ o si $-\frac{3}{2} < x < -1$.

Veamos si los extremos de los intervalos satisfacen la desigualdad.

Si $x = -2$, el numerador es distinto de 0 pero el denominador es 0. Es decir, si $x = -2$ el lado izquierdo de la desigualdad no tendría sentido; luego este valor no satisface la desigualdad.

Similarmente se muestra que $x = -1$ no satisface la desigualdad.

Si $x = -\frac{3}{2}$ el numerador es 0 y el denominador es diferente de 0, de modo que este valor satisface la desigualdad.

Entonces x satisface la desigualdad si

$$x \in (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{3}{2}, -1\right).$$

Así, el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [-\frac{3}{2}, -1)$.

Ejercicios

Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $-2 < \dfrac{x+1}{x-3}$.
2. $1 + \dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{2}{x}$.
3. $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{6}{x} \geq 1$.
4. $x^5 > x^2$.

Lección 48

Desigualdades que involucran valor absoluto

Con base en la definición de valor absoluto, para $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, podemos concluir lo siguiente.

1. El conjunto solución de la desigualdad $|x| < a$ es el conjunto de todos los valores de x tales que la distancia entre x y cero, en la recta numérica, sea menor que a (ver figura 48.1).

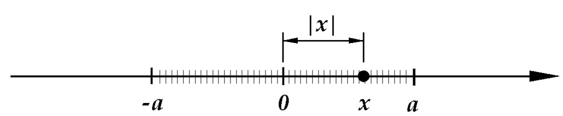


Figura 48.1

Tal conjunto es el conjunto de los x tales que

$$-a < x < a.$$

De esta forma, $|x| < a$ es equivalente a $-a < x < a$.

2. En forma similar al numeral anterior, $|x| \leq a$ es equivalente a $-a \leq x \leq a$.

3. El conjunto solución de $|x| > a$ es el conjunto de todos los valores de x tales que la distancia entre x y cero, en la recta numérica, sea mayor que a (ver figura 48.2).

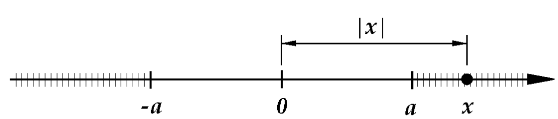


Figura 48.2

Tal conjunto es el conjunto de los x tales que

$$x > a \quad \text{o} \quad x < -a.$$

De esta forma, $|x| > a$ es equivalente a $x > a$ o $x < -a$.

4. En forma similar al numeral anterior $|x| \geq a$ es equivalente a $x \geq a$ ó $x \leq -a$.

Interpretación geométrica

Sean $a, c \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$. Si ubicamos a c en la recta real y tomamos a unidades a la derecha y a la izquierda de c, entonces:

$|x - c| \leq a$ es el conjunto de todos los números reales cuya distancia a c es a lo sumo a, como se ilustra en la figura 48.3

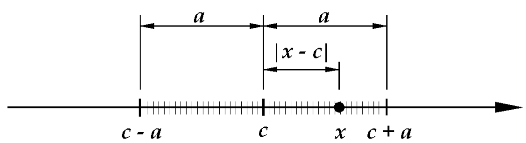


Figura 48.3

$|x - c| \geq a$ es el conjunto de los números reales cuya distancia a c es al menos a, como se muestra en la figura 48.4.

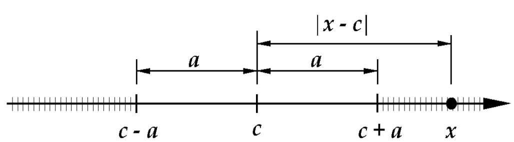


Figura 48.4

Ejemplo 48.1

Resuelva las desigualdades:

1.$|x - 5| \leq 3$. 2. $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| > 4$. 3. $\left|\dfrac{x+2}{x-3}\right| < 5$.

Solución

- Los valores de x que satisfacen $|x - 5| \leq 3$, son todos los números cuya distancia a 5 es a lo sumo 3.

  Si ubicamos 5 en la recta real y luego tomamos 3 unidades tanto a la derecha como a la izquierda de 5, vemos que todos los puntos en el intervalo $[2, 8]$ satisfacen la desigualdad (ver figura 48.5).

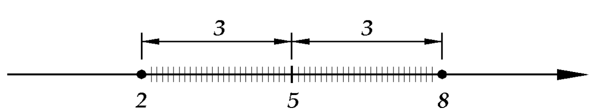


Figura 48.5

Observemos que $|x-5| \leq 3$ es equivalente a

$$-3 \leq x-5 \leq 3$$

y al solucionar esta desigualdad obtenemos

$$2 \leq x \leq 8.$$

Lo cual concuerda con la interpretación geométrica.

- Como $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| = \dfrac{|x+1|}{2}$.

  De esta forma debemos solucionar la desigualdad

$$\frac{|x+1|}{2} > 4$$

la cual, a su vez, es equivalente a

$$|x+1| > 8.$$

Los valores de x que satisfacen esta desigualdad son aquellos cuya distancia a -1 es mayor que 8.

Si ubicamos -1 en la recta real y tomamos 8 unidades a la derecha y a la izquierda de -1, vemos que todos los $x > 7$ o los $x < -9$ satisfacen la desigualdad, como se muestra en la figura 48.6.

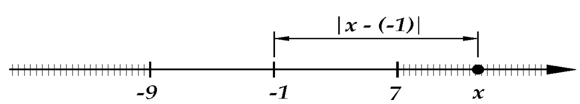


Figura 48.6

Observemos que también podríamos haber concluido esto teniendo en cuenta que $|x+1| > 8$ es equivalente a

$$x+1 < -8 \quad \text{o} \quad x+1 > 8,$$

que tiene por solución $x < -9 \quad \text{o} \quad x > 7$. Por lo tanto el conjunto solución de la desigualdad es

$$(-\infty, -9) \cup (7, \infty) \,.$$

Su representación gráfica puede verse en la figura 48.7.

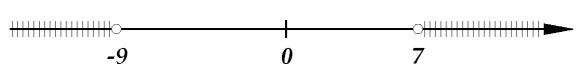


Figura 48.7

- Sabemos que

$$\left|\frac{x+2}{x-3}\right| < 5$$

es equivalente a

$$-5 < \frac{x+2}{x-3} < 5.$$

Por lo tanto se deben satisfacer simultáneamente las desigualdades

$$\frac{x+2}{x-3} > -5 \quad \text{y} \quad \frac{x+2}{x-3} < 5.$$

Resolvamos la primera desigualdad.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-3} &> -\,5, \\ \frac{x+2}{x-3} + 5 &>, 0 \\ \frac{x+2+5x-15}{x-3} &> 0, \\ \frac{6x-13}{x-3} &> 0 \end{aligned}$$

Los valores que hacen cero el numerador o el denominador del lado izquierdo de la desigualdad son $x = \frac{13}{6}$ y $x = 3$. Estos valores determinan los intervalos

$$\left(-\infty, \frac{13}{6}\right), \ \left(\frac{13}{6}, 3\right) \ \text{y} \ (3, \infty).$$

Analizamos sobre la recta real el signo del numerador y del denominador en estos intervalos, y con base en ellos determinamos en cuáles intervalos el cociente es positivo (ver figura 48.8).

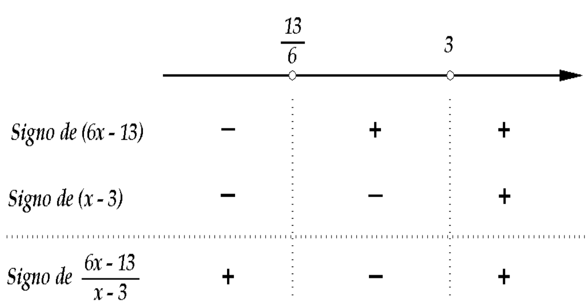


Figura 48.8

Luego, el cociente es positivo si $x > 3$ ó $x < \frac{13}{6}$.

Analizamos los extremos de los intervalos: $x = \frac{13}{6}$ hace 0 el numerador, entonces no es solución de la desigualdad, y $x = 3$ hace cero el denominador y en ese caso la expresión $\frac{6x-13}{x-3}$ no tendría sentido, luego no es solución de la desigualdad.

Entonces el conjunto solución de la desigualdad es

$$\left(-\infty, \frac{13}{6}\right) \cup (3, \infty).$$

Resolvamos ahora la segunda desigualdad.

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x-3} &< 5, \\
\frac{x+2}{x-3} - 5 &< 0, \\
\frac{x+2-5x+15}{x-3} &< 0, \\
\frac{-4x+17}{x-3} &< 0.
\end{aligned}$$

Los valores que hacen cero el numerador o el denominador del lado izquierdo de la desigualdad son $x = 3$ y $x = \dfrac{17}{4}$. Estos valores determinan los intervalos

$$(-\infty, 3), \ \left(3, \frac{17}{4}\right) \ \text{y} \ \left(\frac{17}{4}, \infty\right).$$

Analizamos sobre la recta real el signo del numerador y del denominador en estos intervalos, y con base en ellos determinamos en cuales intervalos el cociente es negativo.

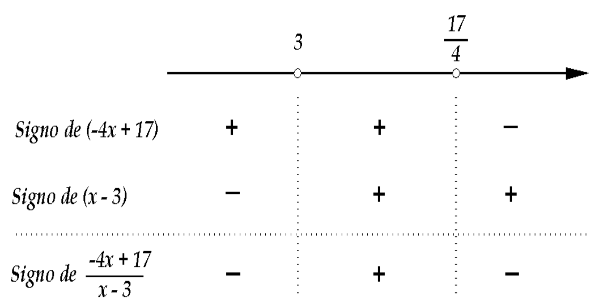


Figura 48.9

Luego, el cociente es negativo si $x < 3$ ó $x > \dfrac{17}{4}$.

Puede verse fácilmente que $x = 3$ y $x = \dfrac{17}{4}$ no son soluciones de la desigualdad.

Entonces el conjunto solución de esta desigualdad es

$$(-\infty, 3) \cup \left(\frac{17}{4}, \infty\right).$$

Debemos ahora analizar cuales valores de x satisfacen simultáneamente las dos desigualdades, es decir, debemos hallar

$$\left[\left(-\infty, \frac{13}{6}\right) \cup (3, \infty)\right] \cap \left[(-\infty, 3) \cup \left(\frac{17}{4}, \infty\right)\right].$$

Como se muestra en la figura 48.10

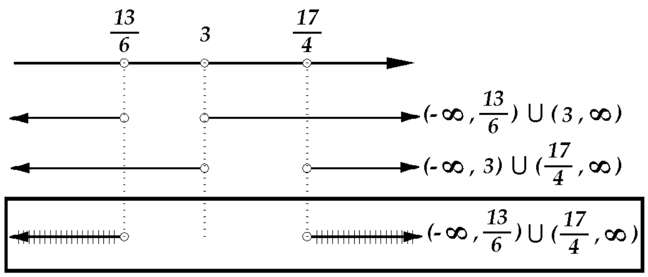


Figura 48.10

Entonces los valores de x que satisfacen simultáneamente están en

$$\left(-\infty, \frac{13}{6}\right) \cup \left(\frac{17}{4}, \infty\right)$$

que es entonces el conjunto solución de la desigualdad inicial.

Ejercicios

Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $|2 - 5x| \leq 7$.
2. $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| \geq 4$.
3. $3 + |2x + 4| \leq 6$.
4. $\left|\dfrac{x}{2x+1}\right| \leq \dfrac{3}{4}$.

Lección 49

Funciones I

Definición

Sean A y B conjuntos. Una **función** f de A en B es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ exactamante un elemento $y \in B$. El elemento $y \in B$, se denota por $f(x)$, y decimos que $f(x)$ es la **imagen** de x **bajo** f, o que $f(x)$ es el **valor de** f **en** x. La variable x se llama **variable independiente** y la variable y se llama **variable dependiente** (puesto que su valor depende de x).

Notación: Si f es una función de A en B, también escribimos $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$, o más explícitamente

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 49.1

Consideremos los siguientes conjuntos:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{10, 20, 30\}$,

$C = \{5, 6, 7, 8\}$, $D = \{40, 50, 60\}$.

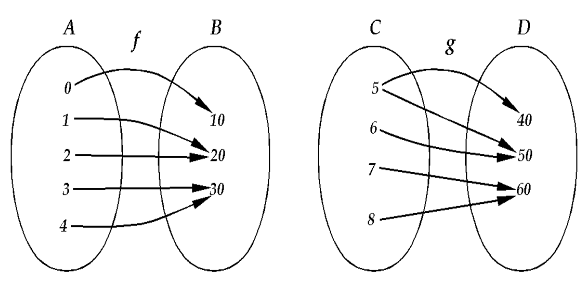


Figura 49.1

Si f y g son las reglas definidas mediante los diagramas de la figura 49.1, tenemos que: f asigna a cada valor del conjunto A un sólo valor del conjunto B, luego f es una función de

A en B, pero como g asigna al número 5 dos valores distintos 40 y 50 del conjunto D, g no es una función de C en D.

Dominio y rango de una función

Si A y B son conjuntos y f es una **función** de A en B, el conjunto A se llama **dominio** de la función y se denota por D_f. El rango de f , denotado por R_f, es el conjunto de todos los valores posibles de $f\,(x)$ cuando x toma todos los valores en el dominio, es decir,

$$R_f = \{f\,(x)\,/\; x \in D_f\}\ .$$

Cuando no se especifica el dominio de una función f, éste se toma como el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$ para el cual la expresión $f(x)$ existe (o tiene sentido).

Una función como una máquina

Podemos interpretar una función f de A en B como una máquina f que recibe elementos x de A y los transforma en elementos $f(x)$ de B, como se ve en la figura 49.2

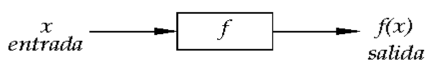


Figura 49.2

Ejemplo 49.2

Sea f la función definida por $f\,(x) = 2x$. Si entra $x = 5$, la máquina f lo multiplica por 2 y arroja $y = f(5) = 10$, como lo ilustra la figura 49.3.

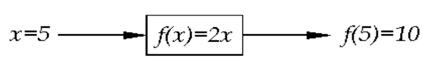


Figura 49.3

$x = 5$ es un elemento del dominio de f y $f\,(5) = 10$ es un elemento del rango, ya que 10 es la imagen de 5 mediante f. Claramente, la "máquina" f acepta cualquier número real como entrada, por lo tanto, el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Un número es elemento del rango si es el doble de un número real, es decir, si es imagen de su mitad. Luego, el rango de f es $\mathbb{R}$.

Si f es una función de A en B, y tanto A como B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, decimos que f es una **función real de variable real.**

En adelante trabajaremos con funciones reales de variable real.

Evaluación de una función

Evaluar una función en un número es hallar el valor de la función en ese número. Para ello se reemplaza la variable independiente por ese punto y se calcula el valor de la variable dependiente, es decir, se encuentra el valor de f en dicho punto.

Ejemplo 49.3

Sea $f(x) = 5x + 1$.

Para evaluar f en 3 escribimos $f(3) = 5 \cdot 3 + 1 = 16$.

Y entonces f de 3 es igual a 16, es decir, 16 es la imagen de 3 bajo la función f.

Claramente el dominio de f es $\mathbb{R}$ ya que la expresión $5x + 1$ está definida para cualquier número real.

Ejemplo 49.4

Sea $f(x) = 4x^2 + 5x$. Calcule $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, si a y h son números reales y $h \neq 0$.

Solución

Primero, evaluemos f en a y en $a + h$, es decir, hallemos $f(a)$ y $f(a+h)$:

$$\begin{aligned}
f(a) &= 4a^2 + 5a\ ; \\
f(a+h) &= 4(a+h)^2 + 5(a+h) \\
&= 4\left(a^2 + 2ah + h^2\right) + 5a + 5h \\
&= 4a^2 + 8ah + 4h^2 + 5a + 5h\ .
\end{aligned}$$

Luego, realizamos las operaciones indicadas:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{4a^2 + 8ah + 4h^2 + 5a + 5h - (4a^2 + 5a)}{h} \\
&= \frac{4a^2 + 8ah + 4h^2 + 5a + 5h - 4a^2 - 5a}{h} \\
&= \frac{8ah + 4h^2 + 5h}{h} \\
&= \frac{h(8a + 4h + 5)}{h} \\
&= 8a + 4h + 5.
\end{aligned}$$

Determinación del dominio de una función

En los ejemplos anteriores fue fácil determinar el dominio de la función, ya que las reglas que definían las funciones tenían sentido para todos los números reales, pero hay otras funciones como las que involucran radicales o cocientes, que no están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Recordemos que las expresiones fraccionarias no están definidas para los valores que hacen 0 el denominador, y las expresiones que involucran raíces pares sólo tienen sentido para los valores que hacen positiva ó 0 la cantidad subradical.

Ejemplo 49.5

Halle el dominio de la función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{9x^2 - 4}.$$

Solución

Para que la expresión tenga sentido, el denominador debe ser diferente de 0. Entonces el dominio de f es

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \ 9x^2 - 4 \neq 0\right\}.$$

Los valores x para los cuales $9x^2 - 4 = 0$ están excluidos del dominio:

$$0 = 9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$$

$$\begin{aligned} 3x + 2 = 0 \quad &\text{ó} \quad 3x - 2 = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \quad &\text{ó} \quad x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio de f es

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x \neq -\frac{2}{3} \text{ y } x \neq \frac{2}{3}\right\} \\ &= \left(-\infty, \ -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \ \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \ \infty\right) \\ &= \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 49.6

Halle el dominio de $f(x) = \sqrt{16 - 4x^2}$.

Solución

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \ 16 - 4x^2 \geqslant 0\right\}.$$

Y estos valores los hallamos resolviendo la desigualdad

$$\begin{aligned} 16 - 4x^2 &\geqslant 0 \\ 4 - x^2 &\geqslant 0 \\ (2+x)(2-x) &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Como se ilustra en la figura 49.4,

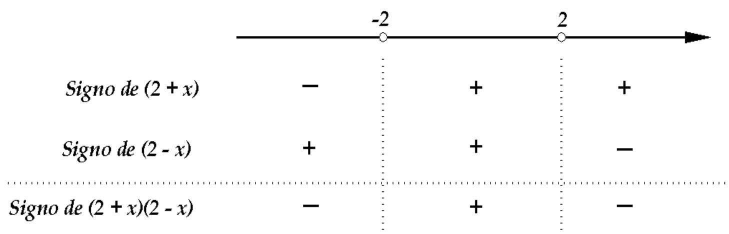


Figura 49.4

Luego,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ -2 \leqslant x \leqslant 2\} = [-2, \ 2].$$

Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones, calcule el valor de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+8}$.

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

2. Encuentre el dominio de las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = \dfrac{x-1}{81x - x^3}$.

   (b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 5x - 14}}$.

Lección 50

Funciones II

Plano cartesiano

Un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, llamado también **plano cartesiano o plano xy**, está formado por **dos rectas** coordenadas **perpendiculares** (rectas reales, usualmente una horizontal y la otra vertical), llamadas **ejes coordenados**, que se interceptan en un punto llamado **origen**.

La recta horizontal se llama $eje\ x$ y la recta vertical $eje\ y$. Generalmente se escoge la dirección positiva del $eje\ x$ hacia la derecha y la dirección positiva del $eje\ y$ hacia arriba.

Los ejes con sus direcciones dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes** (ver figura 50.1).

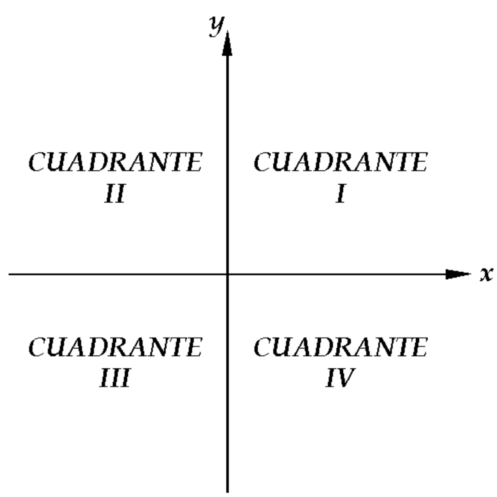


Figura 50.1

A cada punto P del plano le corresponde una pareja de números reales (a, b), donde a es el punto de corte sobre el $eje\ x$ de la recta perpendicular a este eje, que pasa por el punto (a, b), y b es el punto sobre el $eje\ y$ del corte de la perpendicular a este eje, que pasa por (a, b). Los números a y b se llaman **componentes** o **coordenadas** de (a, b) en x y en y respectivamente.

Recíprocamente, todo par ordenado (a, b) se representa mediante un punto P que es la intersección de las rectas perpendiculares a los ejes coordenados que pasan, por a en el *eje* x, y por b en el *eje* y, respectivamente.

Es decir, los elementos de

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

están en correspondencia biunívoca con los puntos del plano cartesiano, y por ello escribimos $P = (a, b)$, en vez de "P es el punto cuyo par de coordenadas es (a, b)".

Ejemplo 50.1

Ubique los puntos $P = (-3, 4)$, $Q = (-1, -2)$, $R = (2, 5)$ y $S = (3, -3)$ en el plano cartesiano.

Solución

Para representar el punto P en el plano debemos movernos tres unidades a la izquierda con respecto al origen y cuatro unidades hacia arriba en forma paralela al eje y. Notemos que el punto P pertenece al segundo cuadrante.

Para representar el punto Q nos movemos una unidad a la izquierda con respecto al origen y dos unidades hacia abajo en forma paralela al eje y; el punto Q pertenece al tercer cuadrante.

Para representar el punto R nos movemos dos unidades a la derecha con respecto al origen y cinco unidades hacia arriba en forma paralela al eje y; el punto R pertenece al primer cuadrante.

Finalmente, para representar el punto S nos movemos tres unidades a la derecha con respecto al origen y tres unidades hacia abajo en forma paralela al eje y; el punto S pertenece al cuarto cuadrante.

La figura 50.2 nos muestra la ubicación de estos puntos en el plano cartesiano.

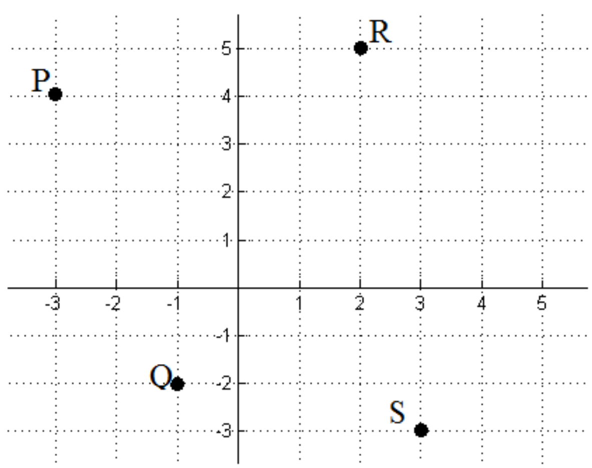


Figura 50.2

Gráfica de una función

Definición

Si f es una función con dominio A, la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x,\ f(x))\ /\ x \in A\}.$$

Se puede interpretar el valor de $f(x)$ (cuando éste es positivo), en la gráfica, como la altura de ésta arriba del punto x, como se ve en la figura 50.3

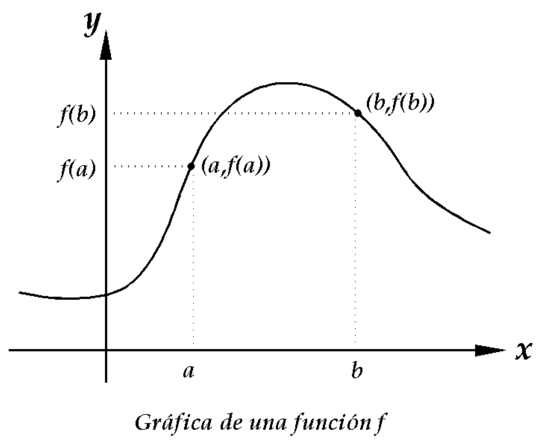


Figura 50.3

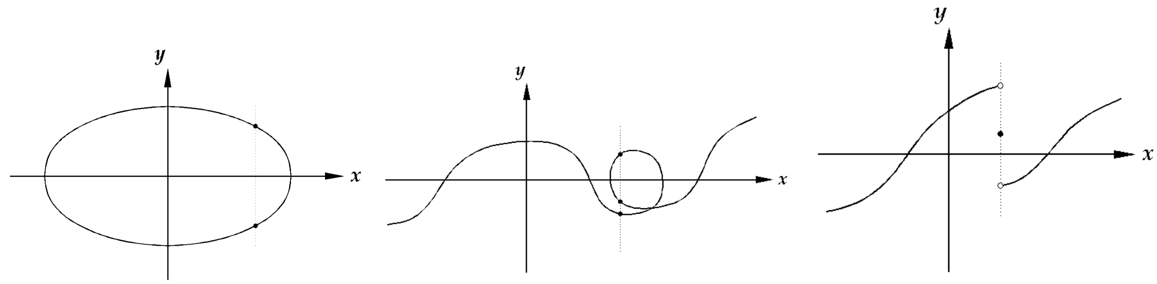
Observamos que la gráfica de f es un subconjunto del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Prueba de la recta vertical

Una curva en el plano xy es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical corta la curva más de una vez.

Ejemplo 50.2

Consideremos las siguientes curvas de la figura 50.4, en el plano xy y veamos si corresponden a gráficas de funciones.



(a) No corresponde a la gráfica de una función ya que existen rectas verticales que cortan la curva en dos puntos distintos

(b) No corresponde a la gráfica de una función ya que existen rectas verticales que cortan la curva en tres puntos distintos.

(c) Sí corresponde a la gráfica de una función ya que cualquier recta vertical corta la gráfica a lo sumo en un punto.

Figura 50.4

Distancia

La distancia entre dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ del plano, denotada por $d(P, Q)$, es la longitud del segmento de recta que los une, y está dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo 50.3

¿Cuál de los puntos $A = (-6, 3)$ ó $B = (3, 0)$ está más cercano al punto $C = (-2, 1)$?

Solución

Calculamos la distancia de los puntos A y B al punto C

$$\begin{aligned} d(A, C) &= \sqrt{\left(-6 - (-2)\right)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}\,, \\ d(B, C) &= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}. \end{aligned}$$

Luego, $d(A, C) < d(B, C)$, entonces el punto A está más cercano al punto C.

Ejercicios

1. Ubique los puntos $P = (2, -3)$, $Q = \left(-\dfrac{3}{5}, 6\right)$ y $S = \left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{3}\right)$ en el plano cartesiano.

2. Dados los puntos en el plano cartesiano, de la figura 50.5, encuentre sus coordenadas.

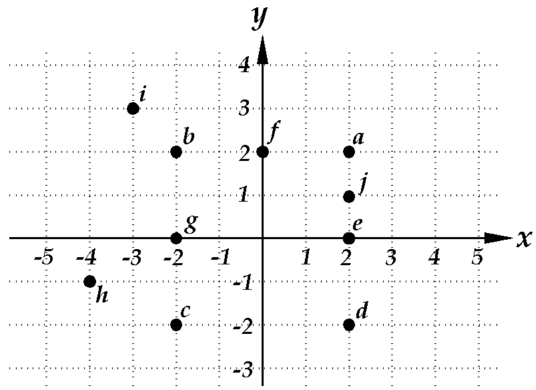
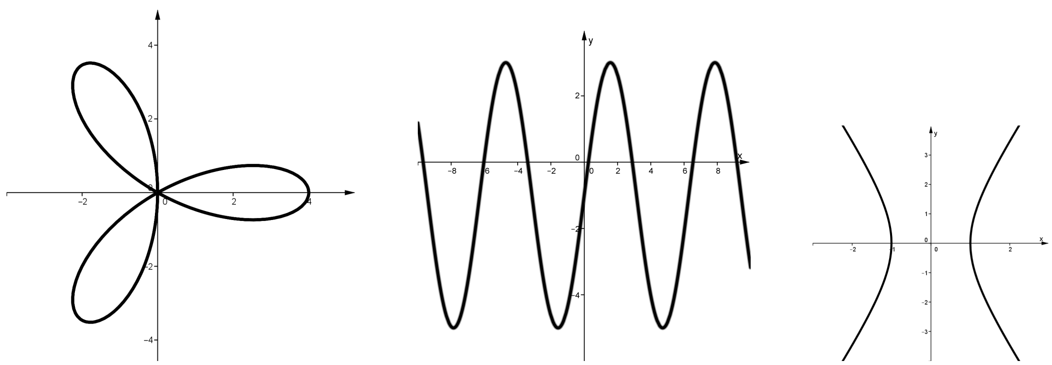


Figura 50.5

3. ¿Cuáles de las curvas de la figura 50.6 representan la gráfica de una función?



(a) (b) (c)

Figura 50.6

4. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $P = (-2, 1)$, $Q = (1, 5)$ y $S = (4, 1)$ es un triángulo isósceles.

Lección 51

Funciones III

Funciones lineales

Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes. Se llama lineal porque su gráfica es una línea recta, en el plano $\mathbb{R}^2$.

La constante m se llama **pendiente** de la recta, y es la tangente del ángulo de inclinación de la recta (ángulo que forma la recta con el *semieje* x positivo, medido en sentido antihorario, desde el *semieje* x positivo hasta encontrar por primera vez la recta). La constante b es la coordenada del punto donde la recta intercepta el *eje* y, que corresponde al punto de la recta para el cual x es 0.

Usualmente, lo anterior se simplifica diciendo que $y = f(x) = mx + b$ es una ecuación de una línea recta con pendiente m, que intercepta al *eje* y en el punto $(0, b)$. Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de la recta en la forma pendiente intercepto.

Sabemos que en el plano una línea recta está completamente determinada por dos puntos distintos.

Si una recta pasa por los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, podemos demostrar que la pendiente m de dicha recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La pendiente es la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal, cuando pasamos de un punto a otro sobre la recta.

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}$$

La figura 51.1 ilustra estos conceptos.

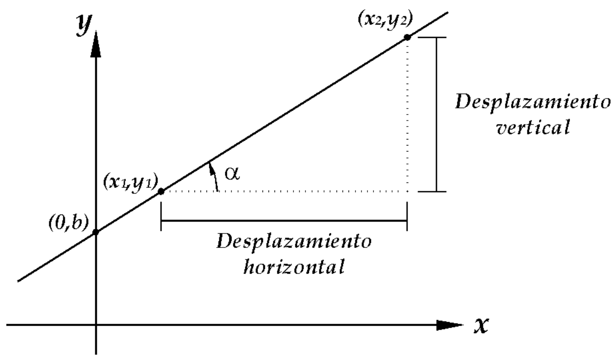


Figura 51.1

$$\text{Recta } y = mx + b$$
$$\text{Pendiente: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$\text{Ángulo de inclinación: } \alpha \quad (m = \tan\alpha)$$
$$\text{Intersección con el eje } y\text{: } (0, b)$$

Si una recta pasa por los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, donde $x_1 \neq x_2$, una ecuación para dicha recta es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

que es equivalente a $y = mx + b$, con $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y $b = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$.

Siempre podemos escribir la ecuación de una línea recta en el plano en la forma

$$ax + by + c = 0, \text{con } a, b \text{ y } c \text{ constantes.}$$

Esta última ecuación se conoce con el nombre de forma general de la ecuación de la recta en el plano.

Notemos que el dominio de la función lineal es el conjunto de los números reales, y su rango será $\mathbb{R}$ ó un número.

Ejemplo 51.1

Consideremos la recta $L : f(x) = 3x - 2$.

La gráfica es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = f(x) = 3x - 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o sea, el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, 3x - 2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta gráfica (ver 51.2) corresponde a una línea recta que tiene pendiente $m = 3$ y corta el eje y en $(0, -2)$.

Como sabemos que la recta pasa por el punto $(0, -2)$, para graficarla necesitamos otro punto que podemos obtener hallando el valor de y para un valor de $x \neq 0$. Si $x = 1$, $y = 3(1) - 2 = 1$ y entonces el punto $(1, 1)$ está sobre la recta y la gráfica es la línea recta que pasa por los puntos $(0, -2)$ y $(1, 1)$.

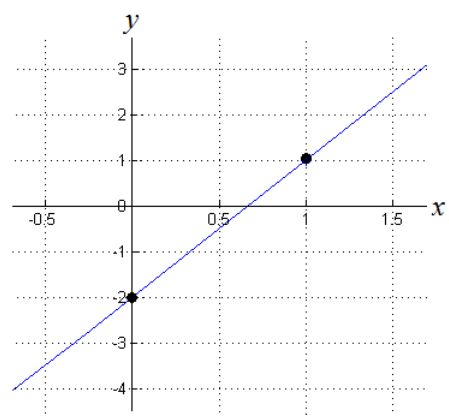


Figura 51.2

Como la pendiente de la recta es 3, si consideramos dos puntos diferentes sobre la gráfica y medimos el desplazamiento vertical entre ellos, éste es el triple del desplazamiento horizontal.

Ejemplo 51.2

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, -1)$ y $(1, 1)$.

Solución

Primero calculamos la pendiente m de la recta $y = mx + b$ empleando los puntos $(x_1, y_1) = (0, -1)$ y $(x_2, y_2) = (1, 1)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2.$$

Para obtener b basta con reemplazar cualquiera de los puntos en la ecuación, es decir, reemplazando (por ejemplo) el punto $(x_1, y_1) = (0, -1)$ en la ecuación $y = 2x + b$, obtenemos que $-1 = 2(0) + b$, $b = -1$. Concluimos que la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos es $y = 2x - 1$. Su gráfica se puede apreciar en la figura 51.3.

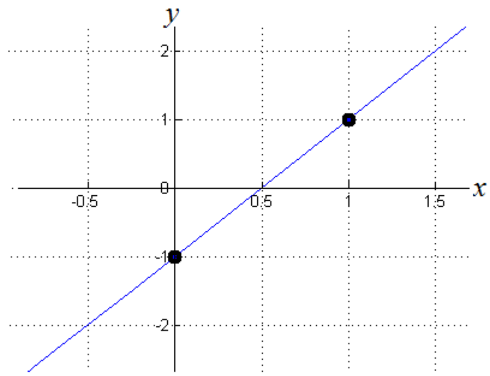


Figura 51.3

Notas

1. La pendiente no está definida para rectas verticales, ya que dos puntos cualesquiera sobre una de estas rectas tienen la misma componente en x. La ecuación de una recta vertical es de la forma $x = b$, donde b es una constante.

2. La pendiente de una recta horizontal es siempre igual a 0. ¿Por qué?

Ejemplo 51.3

La ecuación $y = f(x) = 2$ corresponde a una recta con pendiente $m = 0$ y corta el eje y en el punto $(0, 2)$. Su gráfica (ver figura 51.4) es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tales que $y = 2$, que es una recta horizontal, ya que para cualquier valor de x, $y = 2$.

Claramente, el dominio de la función definida por la ecuación $y = 2$ es $\mathbb{R}$, pero el rango se reduce al conjunto cuyo único elemento es 2.

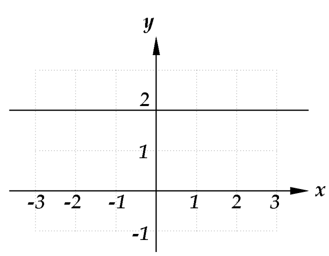


Figura 51.4

Rectas paralelas y perpendiculares

Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas no verticales, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente.

Decimos que L_1 y L_2 son **paralelas** y escribimos $L_1 \parallel L_2$, si tienen el mismo ángulo de inclinación, o, equivalentemente, si tienen la misma pendiente.

$$L_1 \parallel L_2 \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 = m_2.$$

Decimos que L_1 y L_2 son **perpendiculares,** y escribimos $L_1 \perp L_2$, si se cortan formando cuatro ángulos rectos, o equivalentemente, si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$L_1 \perp L_2 \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Para las rectas verticales, el paralelismo y la perpendicularidad, se definen sólo con las relaciones entre ángulos.

Ejemplo 51.4

Halle la ecuación de la recta que pasa por $(2, -12)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5, -1)$.

Solución

Notaremos por m_1 y b_1 la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta que queremos hallar, respectivamente; es decir, $L_1 : m_1\, x + b_1$. Ahora, calculamos la pendiente m_2 de la recta $L_2 : y = m_2\, x + b_2$ empleando los puntos $(x_1, y_1) = (1, 1)$ y $(x_2, y_2) = (5, -1)$:

$$m_2 = \frac{-1-1}{5-1} = -\frac{1}{2}.$$

Sabemos que $L_1 \perp L_2$ si $m_1 \cdot m_2 = -1$, esto es

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2.$$

Así $L_1 : y = 2\, x + b_1$. El valor de intercepto b_1 se obtiene al reemplazar el punto $(2, -12)$ en la recta, es decir $-12 = 2\,(2) + b_1$. Por lo tanto, la ecuación de la recta es $y = 2\, x - 16$.

Ejercicios

Calcule la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas.

1. Pasa por $(-2, 4)$ y tiene pendiente -1.
2. Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$.
3. Cruza el eje y en $y = 6$ y es paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$.
4. Pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y es perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$.

Lección 52

Sistemas de ecuaciones lineales 2x2

Definción

Un sistema de ecuaciones lineales en dos variables es un sistema de la forma

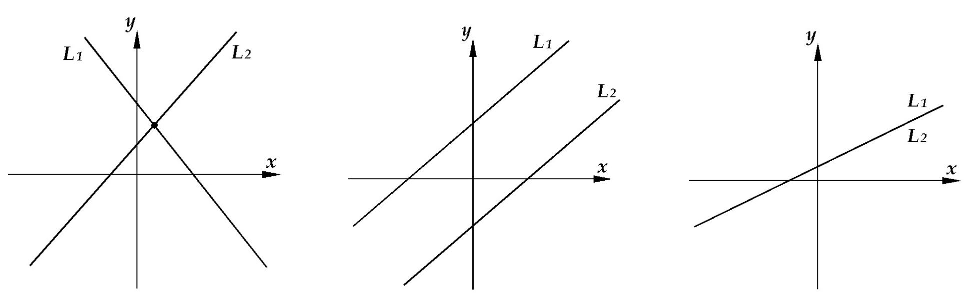
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \tag{52.1}$$

donde $a_{1,}$ b_1, $c_{1,}$ $a_{2,}$ b_2 y c_2 son constantes (cantidades conocidas) y x y y son las variables o incógnitas (cantidades desconocidas).

En este caso, las gráficas de las ecuaciones del sistema son líneas rectas, llamémoslas L_1 y L_2. El conjunto solución del sistema es la intersección de L_1 y L_2.

Para dichas rectas L_1 y L_2 se da una y sólo una de las tres posibilidades siguientes (ilustradas en la figura 52.1):

1. L_1 y L_2 se cortan en un único punto.
2. L_1 y L_2 son paralelas.
3. L_1 y L_2 son coincidentes.



(a) L_1 y L_2 se cortan en un único punto

(b) L_1 y L_2 son paralelas

(c) L_1 y L_2 son coincidentes

Figura 52.1

De lo anterior podemos afirmar que si $a_1 \neq 0$ ó $b_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$ ó $b_2 \neq 0$, para el sistema de ecuaciones lineales (52.1) se da uno y sólo uno de los siguientes casos:

1. El sistema tiene solución única, y es el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene infinitas soluciones, siendo su conjunto solución una línea recta. Cualquiera de las dos ecuaciones del sistema es una ecuación para dicha recta.

Ejemplo 52.1

En el siguiente sistema de ecuaciones en las variables x, y

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + y = 1 \end{cases} \tag{52.2}$$

el par ordenado $(0, 1)$ es una solución del sistema, ya que $(0, 1)$ es solución de cada una de las ecuaciones del sistema porque $3\,(0) - 2\,(1) = -2$ y $5\,(0) + 1 = 1$.

En la figura 52.2 vemos que $(0, 1)$ es el punto de intersección de las rectas que corresponden a las gráficas de las ecuaciones del sistema 52.2.

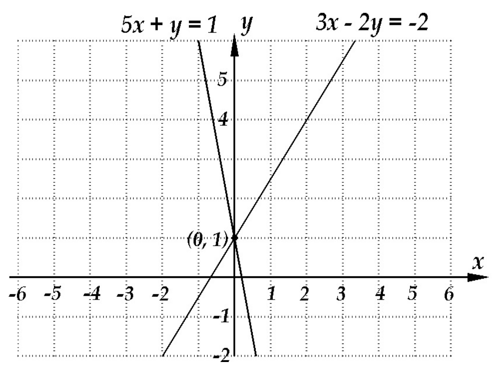


Figura 52.2

Método de Sustitución

Consiste en despejar una de las variables de una de las ecuaciones y sustituirla en la otra obteniendo así una ecuación en una sola variable. Se resuelve esta última ecuación y el valor obtenido se reemplaza en la expresión hallada inicialmente para obtener el valor de la otra variable.

Los pasos a seguir en este procedimiento son:

1. Seleccionar una ecuación y "despejar" una de las variables.
2. Sustituir la expresión hallada en el paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación en una variable. Luego, resolver esta nueva ecuación para hallar el valor de esa variable.

3. Sustituir el valor encontrado en el paso 2 en la expresión hallada en el paso 1, para determinar el valor de la variable faltante, y en consecuencia, la solución del sistema.

Ejemplo 52.2

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 4x + 2y = 9. \end{cases} \tag{52.3}$$

Solución

De la primera ecuación del sistema 52.3 despejamos la variable x:

$$x = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}y. \tag{52.4}$$

Sustituimos el valor de x en la segunda ecuación de 52.3:

$$4\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}y\right) + 2y = 9.$$

Resolvemos esta ecuación en la variable y:

$\frac{8}{3} + \frac{20}{3}y + 2y = 9$, es decir $\frac{26}{3}y = 9 - \frac{8}{3}$ ó $\frac{26}{3}y = \frac{19}{3}$, de donde $y = \frac{19}{26}$.

Reemplazamos el valor de y en la ecuación (52.4) para obtener el respectivo valor de x :

$$x = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{19}{26}\right) = \frac{52+95}{78} = \frac{147}{78}.$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es $x = \frac{147}{78}$, $y = \frac{19}{26}$ o el par ordenado $\left(\frac{147}{78}, \frac{19}{26}\right)$.

Método de Eliminación

Consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones del sistema por constantes apropiadas de tal manera que al sumar ambas ecuaciones se elimine una de las variables del sistema. El procedimiento a seguir es:

1. Multiplicar una o las dos ecuaciones del sistema por las constantes adecuadas de tal manera que al sumar los coeficientes de una de las variables el resultado sea 0.
2. Sumar miembro a miembro ambas ecuaciones para eliminar una variable. Luego, resolver la ecuación resultante para determinar el valor de la variable restante.
3. Sustituir el valor hallado en el paso 2 en una de las ecuaciones originales y resolverla para determinar el valor de la variable eliminada en el paso 2 y obtener así la solución del sistema.

Ejemplo 52.3

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \tag{52.5}$$

Solución

Multiplicamos la primera ecuación 1 de (52.5) por 3 y la segunda ecuación por -2, para que la suma del coeficiente de la variable x en la ecuación 1 y en la ecuación 2 sea 0:

$$\begin{cases} 6x + 15y = 3 \\ -6x + 4y = -4 \end{cases} \tag{52.6}$$

Ahora, sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones del sistema (52.6) y despejamos y:

$$\begin{aligned} 0x + 19y &= -1, \\ y &= -\frac{1}{19}. \end{aligned}$$

Reemplazamos $y = -\dfrac{1}{19}$, por ejemplo, en la seguda ecuación de (52.5) y despejamos x:

$$\begin{aligned} 3x - 2\left(-\frac{1}{19}\right) &= 2, \\ 3x + \frac{2}{19} &= 2, \\ 3x &= 2 - \frac{2}{19}, \\ 3x &= \frac{36}{19}, \\ x &= \frac{12}{19}. \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = \dfrac{12}{19}$, $y = -\dfrac{1}{19}$ o el par ordenado $\left(\dfrac{12}{19}, -\dfrac{1}{19}\right)$.

Casos especiales

Ejemplo 52.4

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 7x - 2y = -1 \\ -14x + 4y = 3 \end{cases} \tag{52.7}$$

Si despejamos y de cada una de las ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2}x + \frac{3}{4} \end{cases} . \tag{52.8}$$

Podemos concluir que las gráficas de las ecuaciones del sistema son dos rectas paralelas, ya que tienen la misma pendiente y los términos independientes son diferentes. Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Ejemplo 52.5

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases} \tag{52.9}$$

Como la segunda ecuación del sistema (52.9) es el resultado de multiplicar la primera ecuación por -2, las dos ecuaciones representan una misma línea recta (rectas coincidentes) y por tanto el sistema tiene infinitas soluciones, que son todos los puntos de la recta $x - y = 1$.

Para encontrar una solución particular del sistema, basta encontrar un punto sobre dicha recta dándole un valor particular a una de las variables y reemplazarlo en la ecuación para obtener el correspondiente valor de la otra variable, así, si $x = 3$, $3 - y = 1$ y entonces $y = 2$ y una solución es $(3, 2)$.

Ejercicios

Resuelva el sistema o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones, exprésela en la forma de par ordenado $(t, y(t))$.

1. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = -7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -7x + 3y = 1 \\ 14x - 6y = -2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ -3x + 15y = 12 \end{cases}$

Lección 53

La circunferencia

Definición

Una **circunferencia** es una curva cerrada formada por todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. A la distancia fija la llamamos **radio** de la circunferencia, y la denotamos por r.

Sea $C = (h, k)$ el centro de una circunferencia de radio r. Si $X = (x, y)$ es cualquier punto de esta circunferencia, entonces

$$d(X, C) = r, \text{ es decir}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad tenemos que

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Esta última ecuación es la ecuación de una circunferencia con centro $C = (h, k)$ y radio r.

Si la circunferencia tiene el centro en el origen de coordenadas, entonces $h = 0$ y $k = 0$ y la ecuación se reduce a

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

La ecuación de la circunferencia puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

con a, b y c constantes.

Ejemplo 53.1

Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-4, 2)$ y radio 2. Grafique esta circunferencia.

Solución

En general, tenemos que la ecuación de la circunferencia de centro (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

En este caso, $h = -4$, $k = 2$ y $r = 2$ y entonces la ecuación de la circunferencia es

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 2^2 = 4.$$

Si realizamos las operaciones indicadas en esta ecuación tenemos que

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 4, \text{ y simplificando}$$
$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0.$$

Luego, la ecuación $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$ también representa la circunferencia de centro en $(-4, 2)$ y radio 2 (ver figura 53.1).

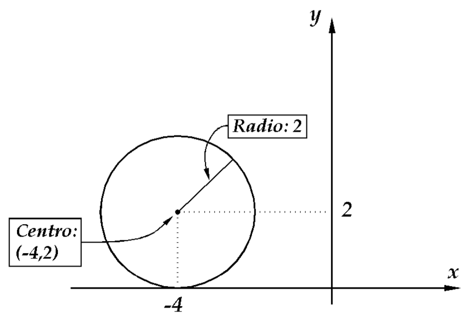


Figura 53.1

Ejemplo 53.2

Muestre que la ecuación

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0$$

representa una circunferencia y determine el centro y el radio de esta circunferencia.

Solución

Debemos expresar la ecuación dada en la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0,$$
$$x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 + 2y = -\frac{1}{16},$$

donde podemos completar dos trinomios cuadrados perfectos, es decir

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\left(y^2+2y+1\right)=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+1,$$

para obtener

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+(y+1)^2=1.$$

Luego, la ecuación representa una circunferencia de centro en $\left(-\frac{1}{4},-1\right)$ y radio 1.

Ejemplo 53.3

Halle la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro con extremos en los puntos $A(-1,-5)$ y $B(5,-3)$. Grafique.

Solución

Como el diámetro de la circunferencia es la distancia entre los puntos A y B, el radio r de dicha circunferencia será la mitad de esta distancia:

$$\begin{aligned} r=\frac{1}{2}d(A,B) &= \frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2+(-5-(-3))^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{36+4}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{40}\\ &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{10}\right)\\ &= \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Ahora determinemos el centro (h,k) de la circunferencia:

En este caso sabemos también que el radio es el punto medio entre los puntos $A(-1,-5)$ y $B(5,-3)$. Asi:

$$\begin{aligned} (h,k)=\frac{1}{2}(A+B) &= \frac{1}{2}[(-1,-5)+(5,-3)]\\ &= \frac{1}{2}[(-1+5,-5-3)]\\ &= \frac{1}{2}(4,-8)\\ &= \left(\frac{1}{2}(4),\frac{1}{2}(-8)\right)\\ &= (2,-4). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia que cumple las propiedades del enunciado es

$$\boxed{(x-2)^2+(y+4)^2=10}.$$

La gráfica se puede apreciar en la figura 53.2

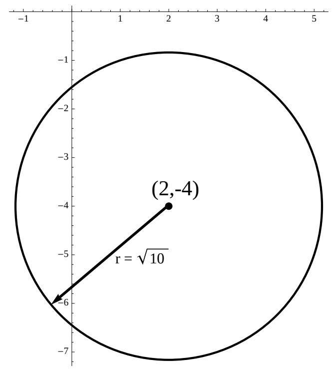


Figura 53.2

Ejemplo 53.4

Halle la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $(-3,2)$, $(4,-1)$ y $(5,2)$.

Solución

Determinemos las coordenadas del centro (h,k) y el valor del radio r de la circunferencia, para escribir su ecuación en la forma

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

Como la circunferencia pasa por los puntos $(-3,2)$, $(4,-1)$ y $(5,2)$, entonces se satisfacen las siguientes tres ecuaciones:

$$(-3-h)^2+(2-k)^2=r^2, \tag{53.1}$$

$$(4-h)^2+(-1-k)^2=r^2, \tag{53.2}$$

$$(5-h)^2+(2-k)^2=r^2. \tag{53.3}$$

De las ecuaciones (53.1) y (53.3), se tiene que:

$$r^2-(2-k)^2=(-3-h)^2, \tag{53.4}$$

$$r^2-(2-k)^2=(5-h)^2. \tag{53.5}$$

Igualando (53.4) y (53.5):

$$\begin{aligned}(-3-h)^2&=(5-h)^2,\\ 9+6h+h^2&=25-10h+h^2,\\ 6h+10h&=25-9,\\ 16h&=16,\\ \therefore h&=1.\end{aligned}$$

Reemplazando h en (53.2) y (53.3):

- $(4-h)^2+(-1-k)^2=r^2$, de donde,
  $(4-1)^2+(-1-k)^2=r^2$,
  $9+(-1-k)^2=r^2$,
$$r^2=9+(-1-k)^2. \tag{53.6}$$

- $(5-h)^2+(2-k)^2=r^2$, de donde,
  $(5-1)^2+(2-k)^2=r^2$,
  $16+(2-k)^2=r^2$,
$$r^2=16+(2-k)^2. \tag{53.7}$$

Igualando (53.6) y (53.7):

$$\begin{aligned}
9+(-1-k)^2 &= 16+(2-k)^2,\\
9+(1+2k+k^2) &= 16+(4-4k+k^2),\\
10+2k+k^2 &= 20-4k+k^2,\\
2k+4k &= 20-10,\\
6k &= 10,\\
k &= \frac{10}{6},\\
\therefore k &= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Reemplazando k en (53.6):

$$\begin{aligned}
r^2 &= 9+(-1-k)^2,\\
r^2 &= 9+\left(-1-\frac{5}{3}\right)^2,\\
r^2 &= 9+\left(\frac{-3-5}{3}\right)^2,\\
r^2 &= 9+\left(\frac{-8}{3}\right)^2,\\
r^2 &= 9+\frac{64}{9},\\
r^2 &= \frac{81+64}{9},\\
r^2 &= \frac{145}{9},\\
\therefore r &= \frac{\sqrt{145}}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia que cumple las propiedades del enunciado es

$$\boxed{(x-1)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{145}{9}}$$

y su gráfica es como en la figura 53.3.

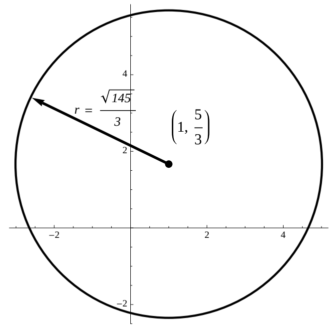


Figura 53.3

Ejercicios

1. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el punto $C(3, -1)$ y que contiene al punto $(-1, 0)$. Grafique.
2. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro con extremos en los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -3)$. Grafique.
3. Halle la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $(0, 2)$, $(2, 0)$ y $(-1, \sqrt{3})$.
4. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el punto $C(1, 1)$ y que contiene al punto $(2, 0)$. Grafique.
5. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro mide 10cm y tiene centro en el punto $(-1, 0)$. Grafique.

Lección 54

Funciones definidas por tramos y función valor absoluto

Funciones definidas por tramos

Se dice que una función está definida por tramos, si está definida mediante expresiones distintas en diferentes subconjuntos de su dominio.

Ejemplo 54.1

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si} \quad x \leq -2, \\ 3 & \text{si} \quad -2 < x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad x = 1, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, -2]$, la gráfica de f es la línea recta $y = -x-3$, con pendiente $m = -1$; además, para $x = -2$, $y = -1$.

En el intervalo $(-2, 1)$, la gráfica de f es la recta horizontal $y = 3$, que corta el eje y en el punto $(0, 3)$.

En el intervalo $(1, \infty)$, la gráfica de f es la línea recta $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$, con pendiente $m = \dfrac{1}{2}$; además, para $x = 1, y = 1$, pero el punto $(1, 1)$ no está en la gráfica, ya que por definición de la función, $f(1) = 2$. Por lo tanto, el punto $(1, 2)$ está en la gráfica de f.

Entonces la gráfica de f es

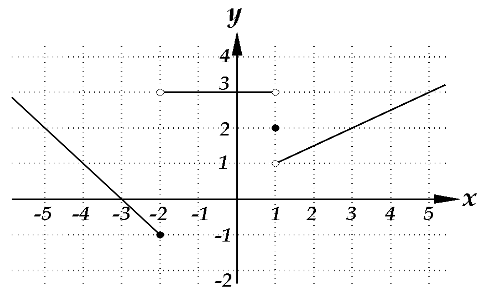


Figura 54.1

Como la función f está definida para cualquier número real, el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Además, de la gráfica es claro que el conjunto de los posibles valores para $y = f(x)$ es $\{y \in \mathbb{R}/\ y \geqslant -1\}$. Por lo tanto, el rango de f es el intervalo $[-1, \infty)$.

Función valor absoluto

Recordemos que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

Por lo tanto, la función $f(x) = |x|$ es una función definida por tramos.

Si $x < 0$, la gráfica de f es la línea recta $y = -x$.

Si $x \geqslant 0$, la gráfica de f es la línea recta $y = x$.

Por lo tanto la gráfica de $f(x) = |x|$ es

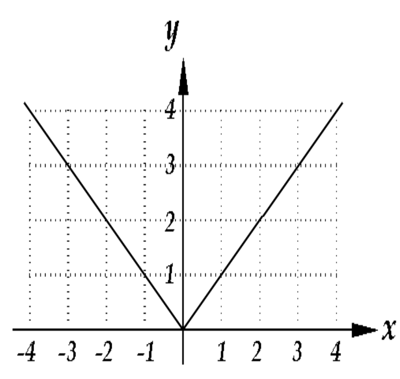


Figura 54.2

De la figura 54.2, es claro que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el rango de f es $[0, \infty)$.

Ejemplo 54.2

Empleando la definición de valor absoluto trace la gráfica de

$$g(x) = ||x| - 3|.$$

Solución

Observemos que empleando la definición de valor absoluto tenemos que

$$g(x) = \begin{cases} |x| - 3 & \text{si} \quad |x| - 3 \geq 0, \\ -(|x| - 3) & \text{si} \quad |x| - 3 < 0. \end{cases}$$

Es decir,

$$g(x) = \begin{cases} |x| - 3 & \text{si} \quad |x| \geq 3, \\ -|x| + 3 & \text{si} \quad |x| < 3. \end{cases}$$

Analicemos entonces por separado qué ocurre cuando $|x| \geq 3$ y cuando $|x| < 3$.

- $|x| \geq 3$ es equivalente a $x \leq -3$ ó $x \geq 3$.

  Si $x \leq -3$ tenemos que
  $$g(x) = |x| - 3 = -x - 3,$$
  y si $x \geq 3$ tenemos que
  $$g(x) = |x| - 3 = x - 3.$$

- $|x| < 3$ es equivalente a $-3 < x < 3$.

  Si $-3 < x < 0$ tenemos que
  $$g(x) = -|x| + 3 = -(-x) + 3 = x + 3,$$
  y si $0 \leq x < 3$ tenemos que
  $$g(x) = -|x| + 3 = -x + 3.$$

Reuniendo los resultados obtenidos podemos escribir a g como la siguiente función definida por tramos:

$$g(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si} \quad x \leq -3, \\ x + 3 & \text{si} \quad -3 < x < 0, \\ -x + 3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3, \\ x - 3 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

De esta forma, la gráfica de g es como se observa en la figura 54.3.

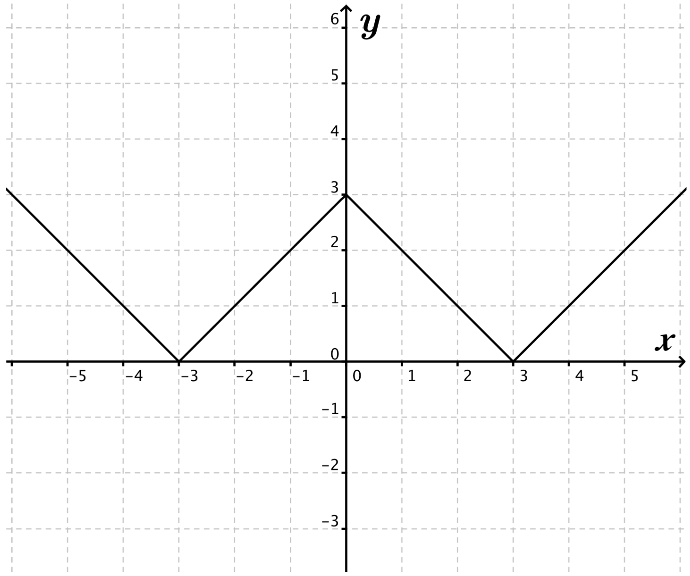


Figura 54.3

Ejercicios

1. Trace la gráfica de las siguientes funciones definidas por tramos.

   (a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq -2, \\ -x-1 & \text{si} \quad -2 < x \leq 0, \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x < -2, \\ 2 & \text{si} \quad x = -2, \\ -1 & \text{si} \quad -2 < x \leq 1, \\ -x+2 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

2. Empleando la definición de valor absoluto trace la gráfica de las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = ||x| + 2|$.

   (b) $f(x) = |1 - |x||$.

Lección 55

Funciones de la forma x^n y $x^{1/n}$ para $n \in \mathbb{N}$

Funciones de la forma $f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$

Si $n = 1$, la gráfica corresponde a una línea recta que pasa por el origen y tiene pendiente $m = 1$.

Veamos cómo es la gráfica cuando $n = 2$:

Una primera aproximación a la gráfica de la función se obtiene ubicando en el plano cartesiano los puntos $(x, f(x))$, correspondientes a distintos valores de x del dominio, que luego se unen por medio de una curva "suave".

Construimos una tabla de valores, ubicamos los correspondientes puntos en el plano cartesiano y los unimos mediante una curva suave, como se muestra en la figura 55.1.

x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

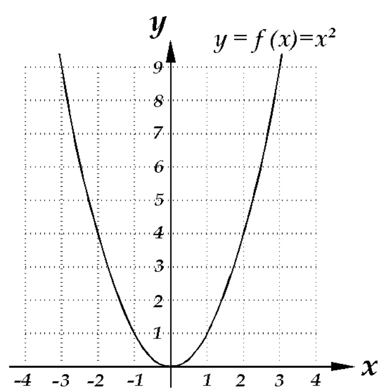


Figura 55.1

La gráfica obtenida es la gráfica de una parábola.

Siguiendo el mismo procedimiento podemos trazar las gráficas de $f(x) = x^n$ cuando $n = 3$, 4 y 5, que se ven en la figura 55.2.

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $g(x) = x^4$ $\qquad$ $h(x) = x^5$

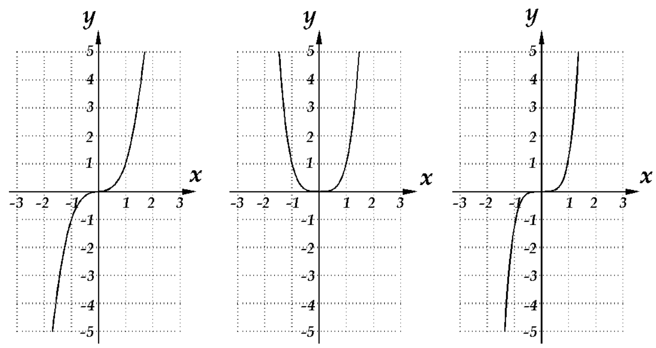


Figura 55.2

En general, cuando n es par, las gráficas son similares a la gráfica de $y = x^2$, todas pasan por los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Si n es impar, las gráficas son similares a la gráfica de $y = x^3$; todas pasan por los puntos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En ambos casos, a medida que n crece, la gráfica se vuelve más horizontal para $-1 < x < 1$ y más vertical o "empinada" cuando $|x| \geq 1$.

Funciones de la forma $f(x) = x^{1/n}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Si n es un número par, el dominio de la función es $[0, \infty)$, mientras que, si n es un número impar, el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Tracemos la gráfica para $n = 2$, es decir, $f(x) = \sqrt{x}$, y para ello construyamos una tabla de valores y construyamos la gráfica de la figura 55.3.

x	$y = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2} \approx 1.41$
3	$\sqrt{3} \approx 1.73$
4	2
:	:
:	:
9	3

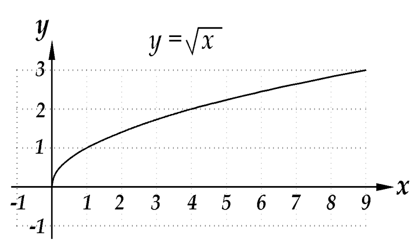
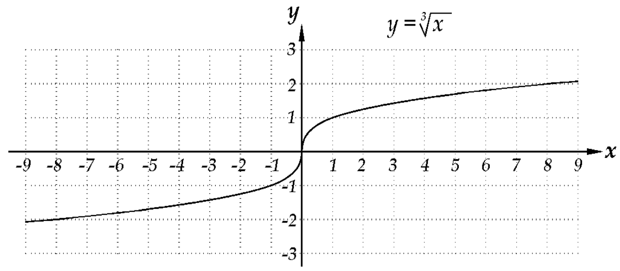
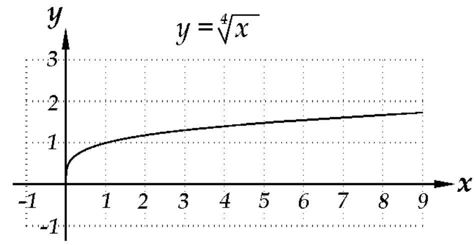


Figura 55.3

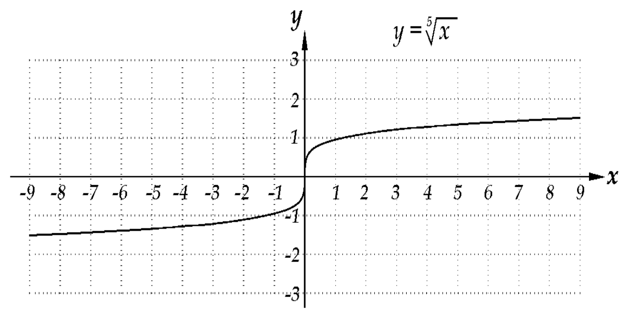
En forma similar podemos trazar las gráficas para $n = 3$, 4 y 5, como se ven en la figura 55.4



(a) $n = 3$



(b) $n = 4$



(c) $n = 5$

Figura 55.4

En general, cuando n es par, las gráficas son similares a la gráfica de $y = \sqrt{x}$, todas contienen los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Si n es impar, las gráficas son similares a la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$, todas pasan por los puntos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Ejercicios

1. Elabore una tabla de valores de x y y para las funciones $y = x^2$, $y = x^4$ y $y = x^6$ y trace las gráficas de estas tres funciones en un mismo plano cartesiano.
2. Elabore una tabla de valores de x y y para las funciones $y = x^3$, $y = x^5$ y $y = x^7$ y trace las gráficas de estas tres funciones en un mismo plano cartesiano.
3. Elabore una tabla de valores de x y y para las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[6]{x}$ y trace las gráficas de estas tres funciones en un mismo plano cartesiano.
4. Elabore una tabla de valores de x y y para las funciones $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$ y $y = \sqrt[7]{x}$ y trace las gráficas de estas tres funciones en un mismo plano cartesiano.

Lección 56

Transformaciones de funciones I

Traslaciones verticales de gráficas

Sea $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

Si los puntos de la gráfica de la función $y = f(x)$ son de la forma (x, y) entonces

- Para graficar $y = f(x) + c$, trazamos la gráfica de $y = f(x)$ y la desplazamos c unidades hacia arriba, ya que los puntos de la gráfica de $y = f(x) + c$ son de la forma $(x, y + c)$, donde (x, y) es un punto de la gráfica de $y = f(x)$.

- Para graficar $y = f(x) - c$, trazamos la gráfica de $y = f(x)$ y la desplazamos c unidades hacia abajo, ya que los puntos de la gráfica de la nueva función son de la forma $(x, y - c)$, donde (x, y) es un punto de la gráfica de $y = f(x)$.

Este procedimiento se puede apreciar en la figura 56.1.

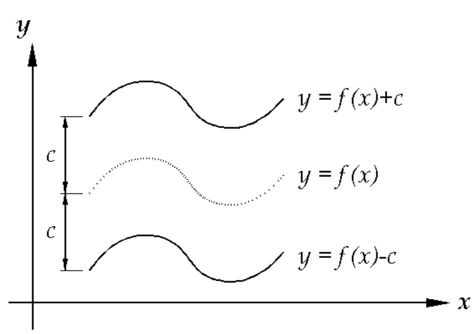


Figura 56.1

Ejemplo 56.1

Consideremos la función f cuya gráfica se muestra en la figura 56.2

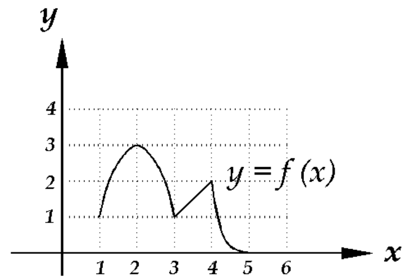


Figura 56.2

Tracemos la gráfica de $y = f\,(x) + 2$

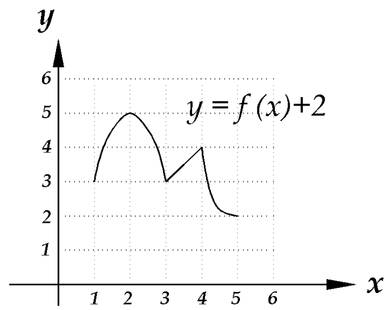


Figura 56.3

El tamaño y la forma de las gráficas $y = f\,(x)$ y $y = f\,(x) + 2$ son los mismos, sólo que la gráfica de la última está desplazada 2 unidades hacia arriba.

Traslaciones horizontales de gráficas

Sea $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

- Para graficar $y = f\,(x - c)$, partimos de la gráfica $y = f\,(x)$ y la desplazamos c unidades hacia la derecha.

  En efecto, si f es una función cuyo dominio D_f es $[a, b]$, para comprobar que la gráfica de $f(x-c)$ es la gráfica de $f(x)$ desplazada c unidades a la derecha, definamos la función h por $h(x) = f(x-c)$ y veamos que la gráfica de h es la gráfica de f desplazada c unidades a la derecha.

  Para encontrar el dominio de h, usamos el hecho de que la función h está definida si $x - c$ está en el dominio de f, es decir, si $(x - c) \in [a, b] \iff a \leq x - c \leq b \iff a + c \leq x \leq b + c$. Luego, $D_h = [a + c, b + c]$.

Si $w \in D_f$, entonces $(w + c) \in D_h$ y así

$$h(w + c) = f(w + c - c) = f(w).$$

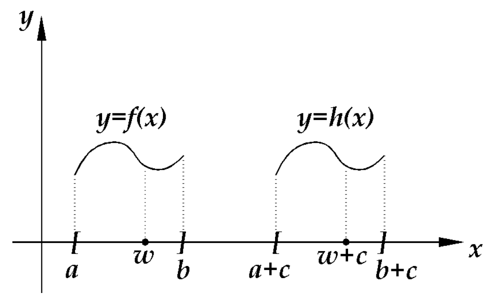


Figura 56.4

Luego, la gráfica de h es la gráfica de f desplazada c unidades a la derecha, como se muestra en la figura 56.4.

- Para graficar $y = f\,(x + c)$, partimos de la gráfica de $y = f\,(x)$ y la desplazamos c unidades hacia la izquierda.

Usando un argumento similar al anterior podemos mostrar el efecto de esta transformación, en la figura 56.5.

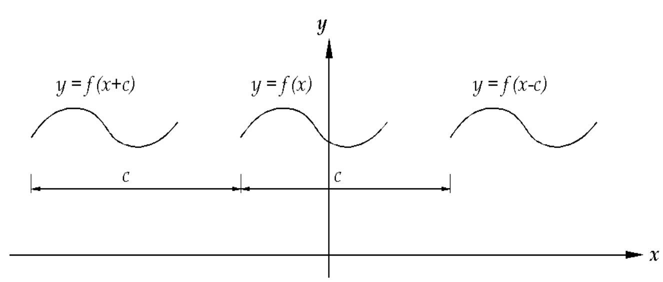


Figura 56.5

Ejemplo 56.2

Consideremos la gráfica de la función f que se muestra en la figura 56.6

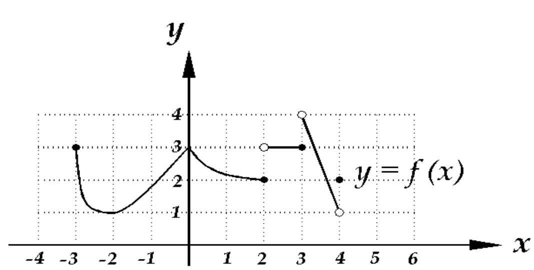


Figura 56.6

Tracemos la gráfica $y = f(x+3)$ (figura 56.7)

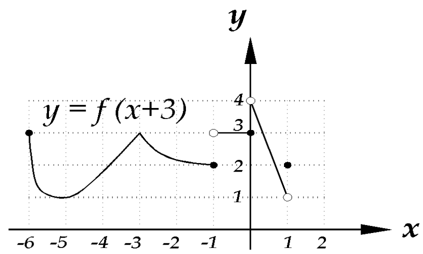


Figura 56.7

El tamaño y la forma de las gráficas de $y = f(x)$ y de $y = f(x+3)$ son los mismos, pero la última está desplazada 3 unidades hacia la izquierda.

Ejemplo 56.3

Con base en la gráfica de $y = f(x) = x^2$ (figura 56.8), trazar las gráficas de $y = (x+1)^2$ y $y = x^2 + 1$.

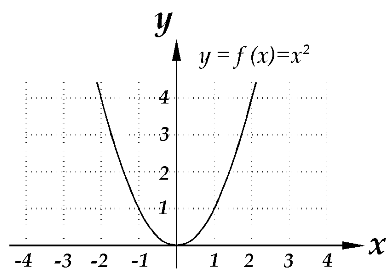


Figura 56.8

Como $(x+1)^2 = f(x+1)$, la gráfica de $y = (x+1)^2$, será la de $f(x) = x^2$ desplazada 1 unidad hacia la izquierda, y como $x^2 + 1 = f(x) + 1$, la gráfica de $y = x^2 + 1$ es la de $f(x) = x^2$ desplazada 1 unidad hacia arriba (ver figuras 56.9 y 56.10).

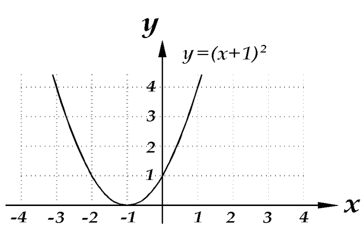


Figura 56.9

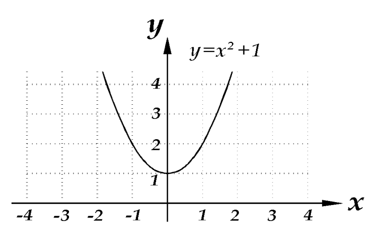


Figura 56.10

Ejercicios

1. Trace la gráfica de las siguientes funciones, iniciando con la gráfica de una función conocida h, y luego aplicando traslaciones.

   (a) $f(x) = (x-1)^2 + 3$. $\quad (h(x) = x^2)$.

(b) $f(x) = -2 + \sqrt{x+1}$. $\quad (h(x) = \sqrt{x})$.

(c) $f(x) = |x-2| + 3$. $\quad (h(x) = |x|)$.

2. Considere la función g cuya gráfica se muestra en la figura 56.11.

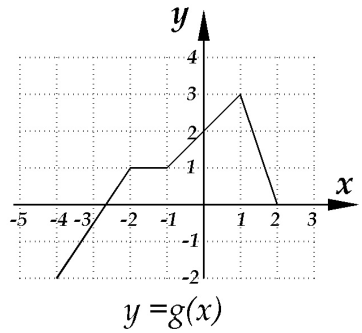


Figura 56.11

Trace la gráfica de $y = g(x+3) - 2$.

Lección 57

Transformaciones de funciones: Reflexión de gráficas

Reflexión de Gráficas

Sea $P = (x, y)$ un punto en el plano cartesiano. Decimos que

P' es la reflexión de P con respecto al *eje* x si $P' = (x, -y)$.

P'' es la reflexión de P con respecto al *eje* y si $P'' = (-x, y)$.

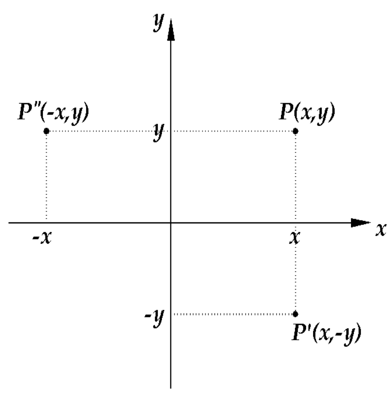


Figura 57.1

Si los puntos de la gráfica de la función $y = f(x)$, son de la forma (x, y), entonces:

- La gráfica de $y = -f(x)$, se obtiene al reflejar todos los puntos de la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje x, ya que los puntos de $y = -f(x)$, son de la forma $(x, -y)$
- Para graficar $y = f(-x)$, reflejamos la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje y, ya que sus puntos son de la forma $(-x, y)$. (ver figura 57.2)

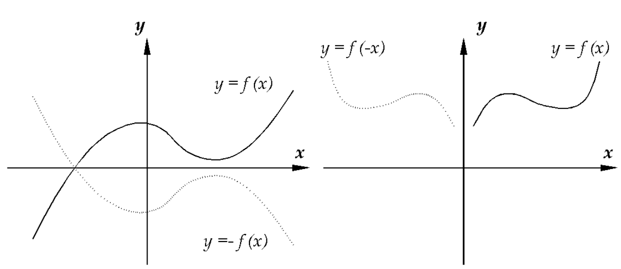


Figura 57.2

Ejemplo 57.1

Consideremos la gráfica de la función f que se muestra en la figura 57.4.

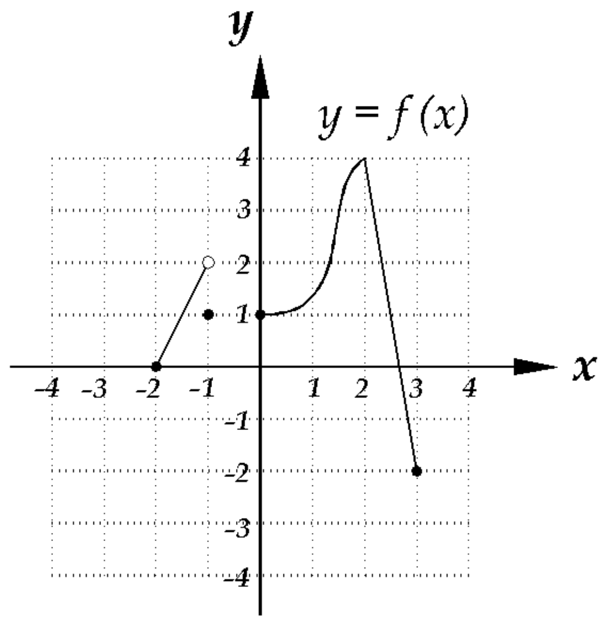


Figura 57.3

Tracemos las gráficas de $y = -f(x)$ y $y = f(-x)$ (figura 57.4).

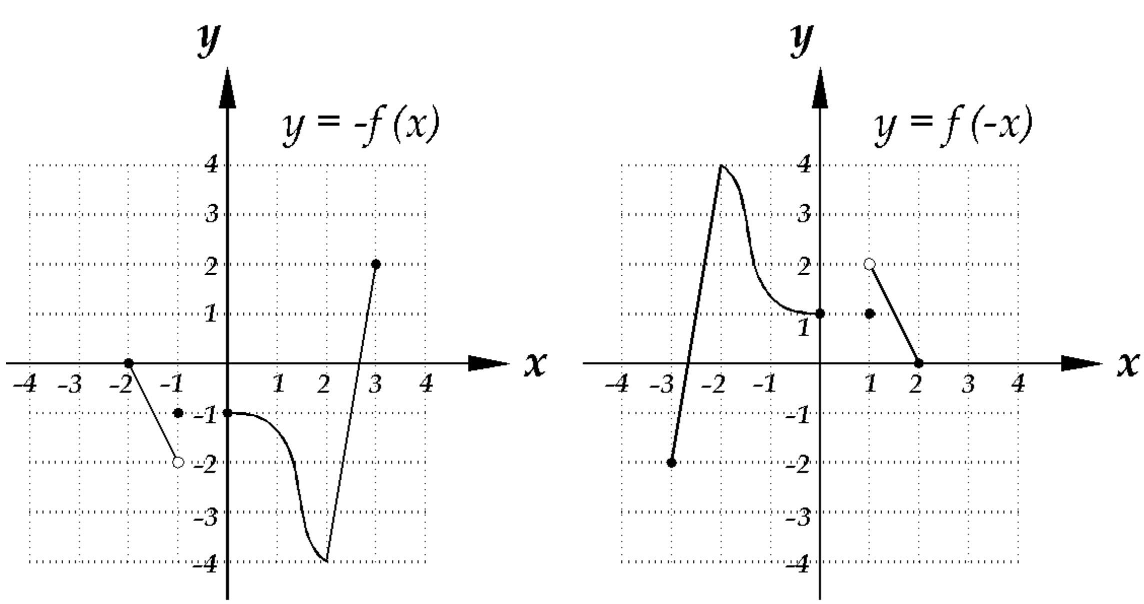


Figura 57.4

Gráfica de $|f(x)|$

De la definición de valor absoluto, tenemos que

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto, la gráfica de $|f(x)|$ es la misma gráfica de $f(x)$ si ésta se encuentra por encima del eje x, y es la reflexión en el eje x si se encuentra por debajo de éste. De esta forma, la gráfica de $|f(x)|$ siempre está por encima del eje x (ver figura 57.5).

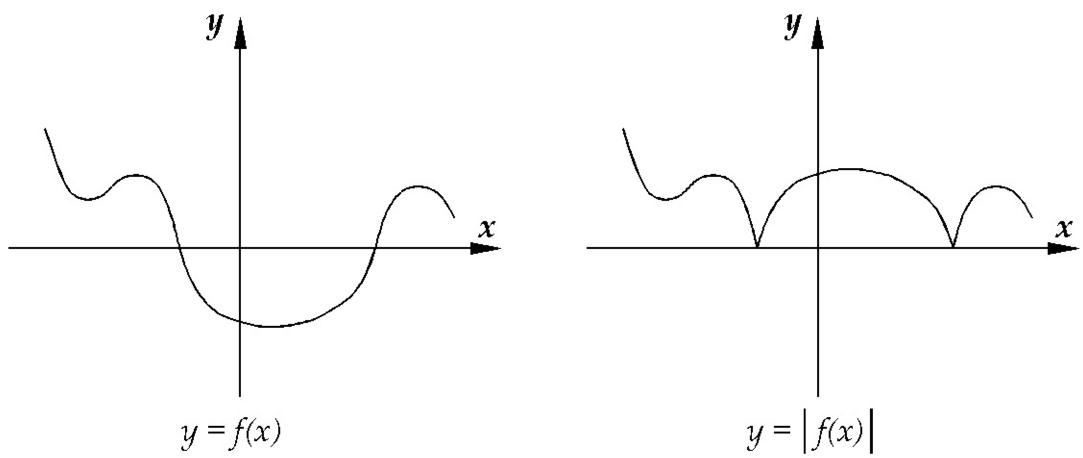


Figura 57.5

Ejemplo 57.2

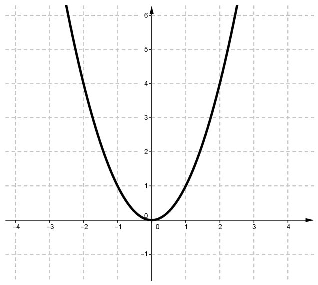
Trace la gráfica de $g(x) = -|x^2 - 1| + 1$, a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$:

Solución

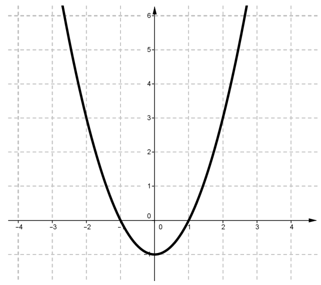
La transformación podemos hacerla en los siguientes pasos:

1. Graficamos $y = x^2$.
2. Graficamos $y = x^2 - 1$, que corresponde a la traslación de la gráfica anterior una unidad hacia abajo.
3. Graficamos $y = |x^2 - 1|$, que corresponde al valor absoluto de la gráfica anterior y para lo cual usamos la propiedad enuncida mas arriba.
4. Graficamos $y = -|x^2 - 1|$, que corresponde a la reflexión de la gráfica anterior con respecto al eje x.
5. Graficamos $y = -|x^2 - 1| + 1$, que es la traslación de la gráfica anterior una unidad hacia arriba.

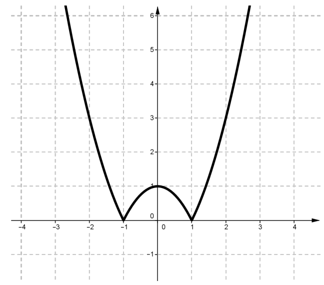
Estos pasos están ilustrados en la figura 57.6.



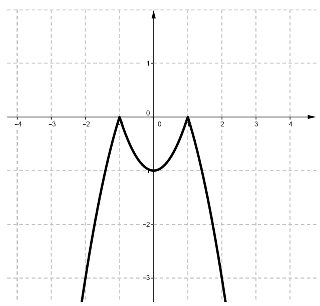
(a) $y = x^2$



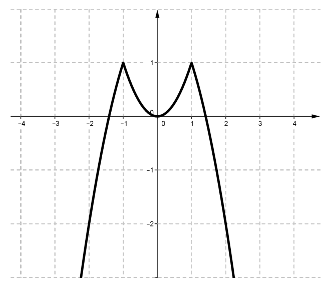
(b) $y = x^2 - 1$



(c) $y = |x^2 - 1|$



(d) $y = -|x^2 - 1|$



(e) $y = -|x^2 - 1| + 1$

Figura 57.6

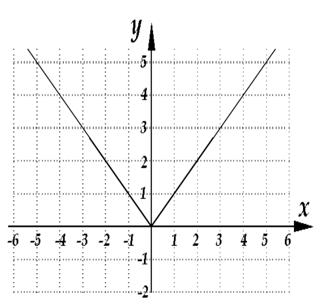
Ejemplo 57.3

Trazar la gráfica de $y = |-x + 1| - 2$ a partir de la gráfica de $y = |x|$,

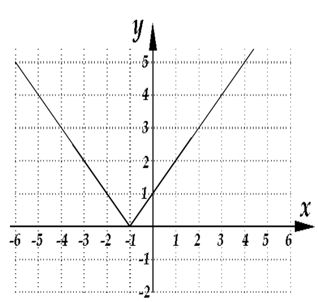
Solución

Debemos elegir adecuadamente el orden de las transformaciones:

1. Graficamos $y = |x|$.
2. Graficamos $y = |x + 1|$. (Traslación de la gráfica anterior, 1 unidad hacia la izquierda).
3. Graficamos $y = |-x + 1|$. (Reflexión de la gráfica anterior respecto al eje y).
4. Graficamos $y = |-x + 1| - 2$. (Traslación de la gráfica anterior, 2 unidades hacia abajo).



$y = |x|$



$y = |x+1|$

Figura 57.7

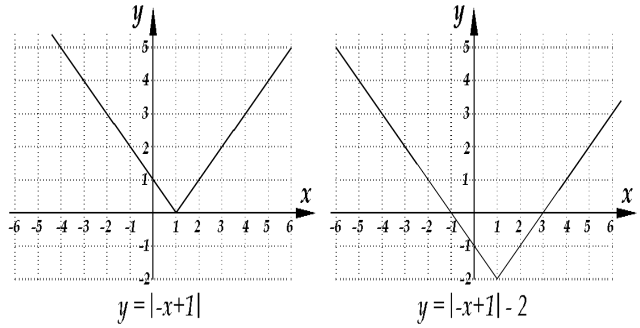


Figura 57.8

Los pasos están ilustrados en las figuras 57.7 y 57.9.

Observación

En el ejemplo anterior, se debe tener cuidado con la secuencia que se utilice al trazar la gráfica de la función: no es lo mismo trasladar hacia la izquierda y luego reflejar con respecto al eje y que primero reflejar con respecto al eje y y luego trasladar hacia la izquierda. En este último caso, como

$$f\,(-x+1) = f\,(-(x-1)),$$

si realizamos primero la reflexión de la gráfica $y = |x|$ respecto al eje y, el siguiente paso sería **trasladar la gráfica resultante 1 unidad hacia la derecha** (y no hacia la izquierda) y finalmente trasladarla 2 unidades hacia abajo. En este caso, la secuencia correcta sería:

1. $y = f\,(x)$.
2. $y = f\,(-x)$. (Reflexión respecto el eje y).
3. $y = f\,(-\,(x-1))$. (Traslación hacia la derecha)
4. $y = f(-(x-1)) - 2$. (Traslación 2 unidades hacia abajo).

Ejercicios

1. Trace la gráfica de las siguientes funciones, iniciando con la gráfica de una función conocida h, y luego aplicando traslaciones y reflexiones cuando sea necesario.

   (a) $f(x) = -\,(x-2)^2 + 1$. $\quad (h(x) = x^2)$.

   (b) $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$. $\quad (h(x) = \sqrt{x})$.

   (c) $f(x) = |2-x| - 3$. $\quad (h(x) = |x|)$.

2. Considere la función g cuya gráfica se muestra en la figura 57.9.

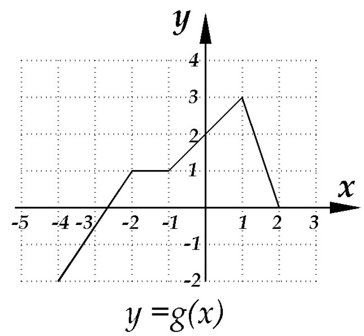


Figura 57.9

Trace la gráfica de $y = g(-x+3) - 2$ y $y = -g(-x+1) + 3$

Lección 58

Transformaciones de funciones: Alargamiento y compresión de gráficas

Alargamiento y compresión vertical de gráficas

Sea $c \in \mathbb{R}, c > 1$.

Si los puntos de la gráfica de la función $y = f(x)$, son de la forma (x, y), entonces:

- Para graficar $y = cf(x)$, trazamos la gráfica de $y = f(x)$ y la alargamos o estiramos verticalmente en un factor de c, ya que los puntos de la gráfica $y = cf(x)$, son de la forma (x, cy).

- Para graficar $y = \frac{1}{c}f(x)$, trazamos la gráfica de $y = f(x)$ y la comprimimos verticalmente en un factor de c ya que los puntos de la nueva función son de la forma $(x, \frac{1}{c}y)$.

Este procedimiento se ilustra en la figura 58.1.

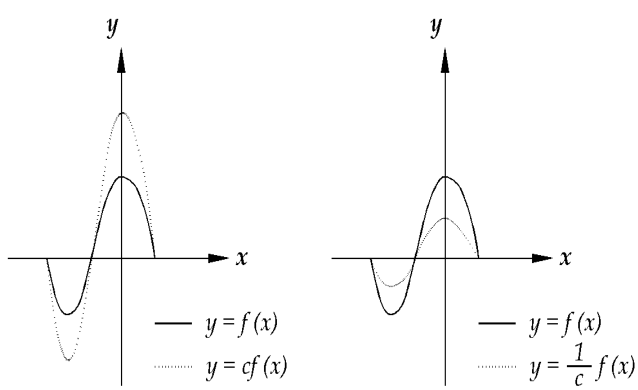


Figura 58.1

Ejemplo 58.1

Consideremos la gráfica de la función f, ilustrada en la figura 58.2.

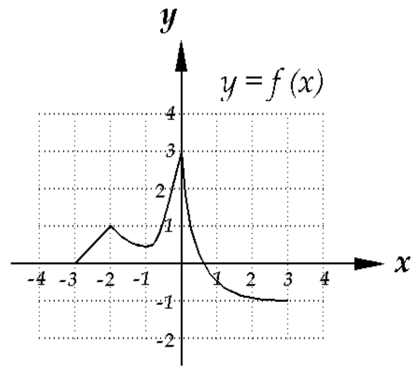


Figura 58.2

Tracemos la grafica de $y = 2f\,(x)$ (figura 58.3)

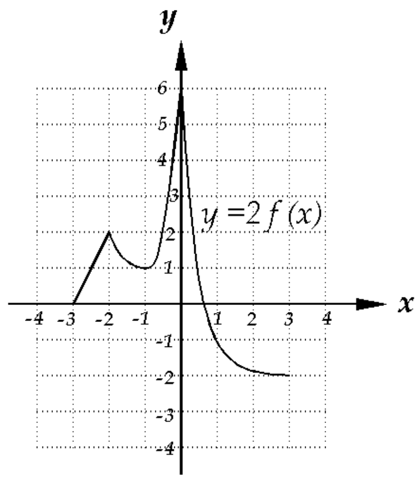


Figura 58.3

que se puede ver que corresponde al alargamiento vertical de la gráfica de la función $f(x)$ por un factor de 2 unidades y se puede comprobar tomando puntos arbitrarios en la gráfica de la función $f(x)$ y hallando los correspondientes puntos en la gráfica de $2f(x)$.

El proceso anterior es la manera estándar de desarrollar este tipo de problemas y puede ser extendido a situaciones mas generales como las ilustradas en los siguientes ejemplos, donde además podemos ver que los diferentes tipos de transformaciones vistos hasta el momento, pueden ser mezclados en una misma función.

Ejemplo 58.2

Trace la gráfica de la función $f(x) = 2 - 3(x-2)^2$, a partir de la grfica de $y = x^2$.

Solución

Consideremos los pasos ilustrados en la figura 58.4. Comenzando con la gráfica de $y = x^2$ (A), se traslada primero a la derecha 2 unidades para obtener la gráfica de $y = (x-2)^2$

(B); luego se refleja con respecto al eje x para obtener la $y = -(x-2)^2$ (C) y esta se alarga por un factor de 3 para obtener la gráfica de $y = -3(x-2)^2$ (D). Finalmente se traslada dos unidades hacia arriba para obtener la gráfica de la función $f(x)$ pedida (E). Todos estos procesos pueden ser visualizados en la siguiente gráfica.

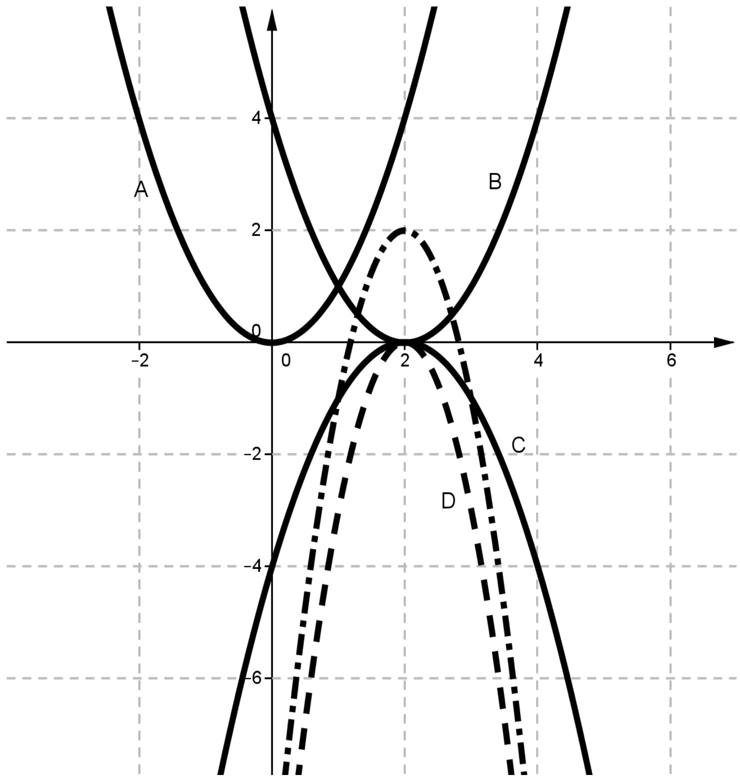


Figura 58.4

Alargamiento y compresión horizontal de gráficas

Sea $c \in \mathbb{R}, c > 1$.

- La gráfica de $y = f(cx)$ se obtiene comprimiendo horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ en un factor de c.

  En efecto, si f es una función cuyo dominio D_f es $[a, b]$, para comprobar que la gráfica de $f(cx)$ es la gráfica de $f(x)$ comprimida horizontalmente en un factor de c, definamos una función h por $h(x) = f(cx)$ y veamos que la gráfica de h es la gráfica de f comprimida horizontalmente en un factor de c.

  Para encontrar el dominio de h, usamos el hecho de que la función h está definida si cx está en el dominio de f, es decir, si $cx \in [a, b] \iff a \leq cx \leq b \iff \dfrac{a}{c} \leq x \leq \dfrac{b}{c}$. Como $c > 1$, $\dfrac{1}{c} < 1$ entonces x está en un intervalo comprimido horizontalmente en un factor de c. Luego, $D_h = [\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}]$. (figura 58.5)

Si $w \in D_f$, entonces $\dfrac{1}{c}w \in D_h$ y así $h\left(\dfrac{1}{c}w\right) = f\left(c\dfrac{1}{c}w\right) = f(w)$.

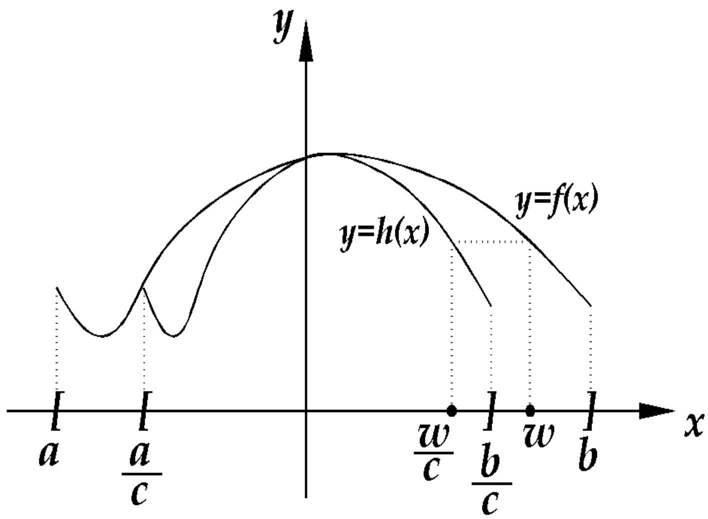


Figura 58.5

Luego, la gráfica de h es la gráfica de f comprimida horizontalmente en un factor de c y la gráfica de h es la gráfica de $f(cx)$.

- Usando un argumento similar podemos mostrar que la gráfica de $f\left(\dfrac{1}{c}w\right)$ es la gráfica de f alargada o estirada horizontalmente en un factor de c (ver figura 58.6).

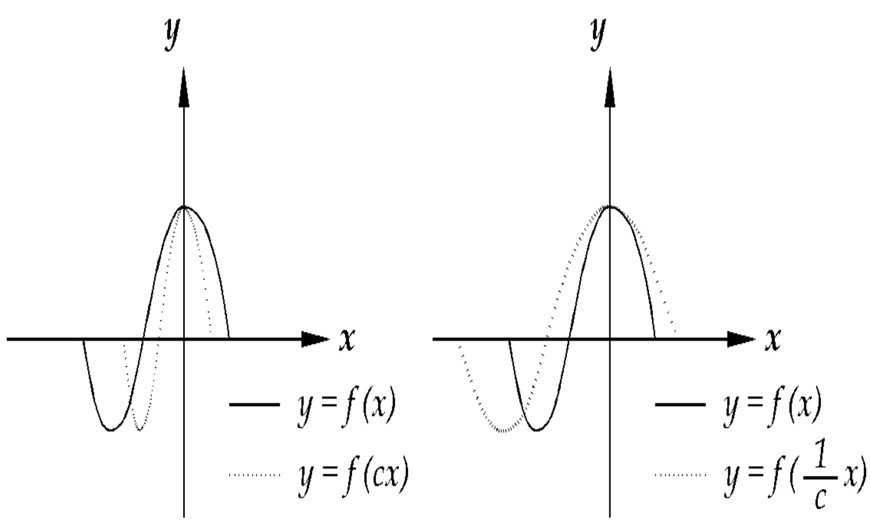


Figura 58.6

Ejemplo 58.3

Consideremos la gráfica de la función f en la figura 58.7

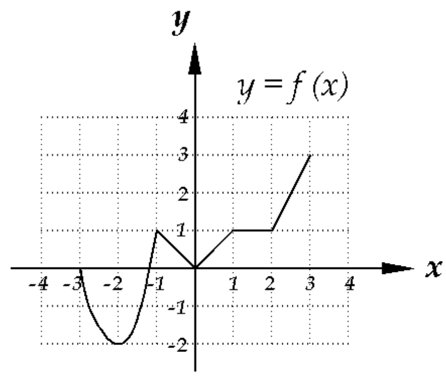


Figura 58.7

Tracemos la gráfica de $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ (figura 58.8)

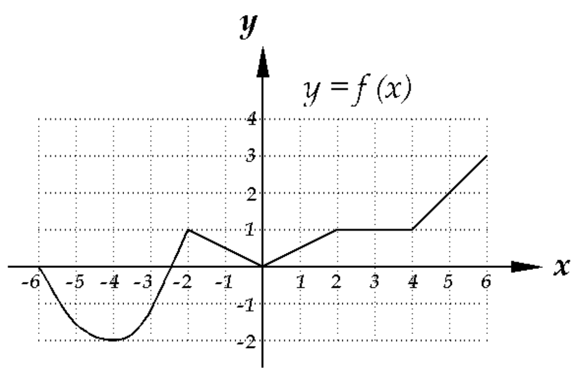


Figura 58.8

Importante: En general, cuando se trabaja con varias transformaciones horizontales o con varias transformaciones verticales, se debe tener especial cuidado en la secuencia a utilizar para trazar la gráfica de la función. Se sugiere:

- **Transformaciones Horizontales:** Realizar primero la *traslación* y luego las demás.
- **Transformaciones Verticales:** Realizar la *traslación* de última.

Ejercicios

1. Trace la gráfica de $y = \frac{1}{2}f\,(x)$ a partir de $f(x) = x^3$.
2. Trace la gráfica de $y = f\,(2x)$ a partir de $f(x) = x^3$.
3. Trace la gráfica de las siguientes funciones, iniciando con la gráfica de una función conocida h, y luego aplicando traslaciones, reflexiones y compresiones o alargamientos según sea necesario.
   (a) $f(x) = (2x+1)^2 + 3. \quad (h(x) = x^2).$

(b) $f(x) = -4 - \sqrt{\frac{1}{3}x}$. $(h(x) = \sqrt{x})$.

(c) $f(x) = -|2x - 1| + 3$. $(h(x) = |x|)$.

4. Considere la función g cuya gráfica se muestra en la figura 58.9.

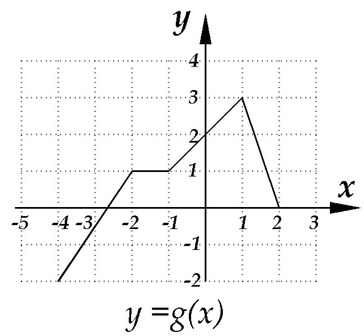


Figura 58.9

Trace la gráfica de $y = \frac{1}{4}g(2x) - 1$.

Lección 59

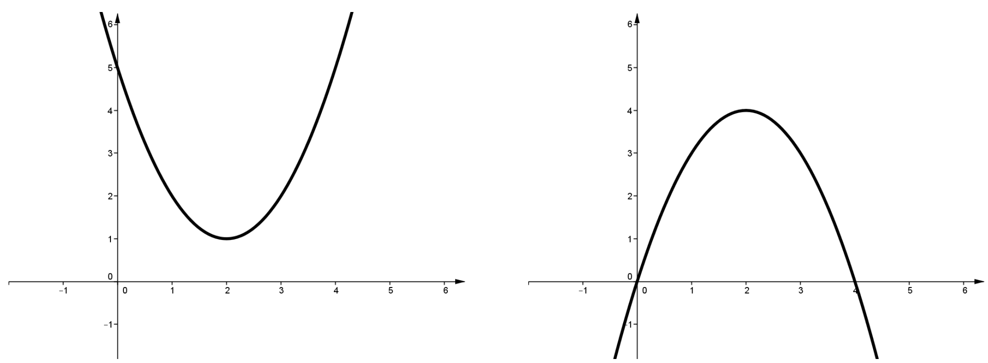
Transformaciones de funciones: Funciones cuadráticas

Funciones cuadráticas

Una función cuadrática es una función polinómica de grado 2, es decir una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{con } a \neq 0$$

y su gráfica es una **parábola vertical** que se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ (como se ilustra en la figura 59.1).



(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Figura 59.1

Usando procedimientos algebraicos podemos mostrar que cualquier función cuadrática pueden escribirse en la forma

$$y - k = a(x-h)^2,$$

que es la ecuación de una parábola vertical con vértice en el punto (h, k).

Para graficar cualquier función cuadrática trazamos la parábola $y = x^2$ que tiene el vértice en $(0, 0)$ y la transformamos de acuerdo con las especificidades de la función.

Ejemplo 59.1

Trace la gráfica de $y = -2x^2 - 4x + 1$.

Solución

Usando procedimientos algebraicos vistos en sesiones anteriores, podemos obtener

$$\begin{aligned} y &= -2\left(x^2+2x\right)+1 \\ y-2 &= -2\left(x^2+2x+1\right)+1 \\ y-3 &= -2\left(x^2+2x+1\right) \\ y-3 &= -2\left(x+1\right)^2. \end{aligned}$$

Así que a partir de la ecuación general, podemos concluir que la ecuación cuadrática representa una parábola con vértice en el punto $(-1,3)$ y como $a=-2<0$ la parábola se "abre" hacia abajo.

Veamos cómo trazar la gráfica de $y=-2x^2-4x+1$ a partir de la gráfica de $y=x^2$ (figura 59.2)

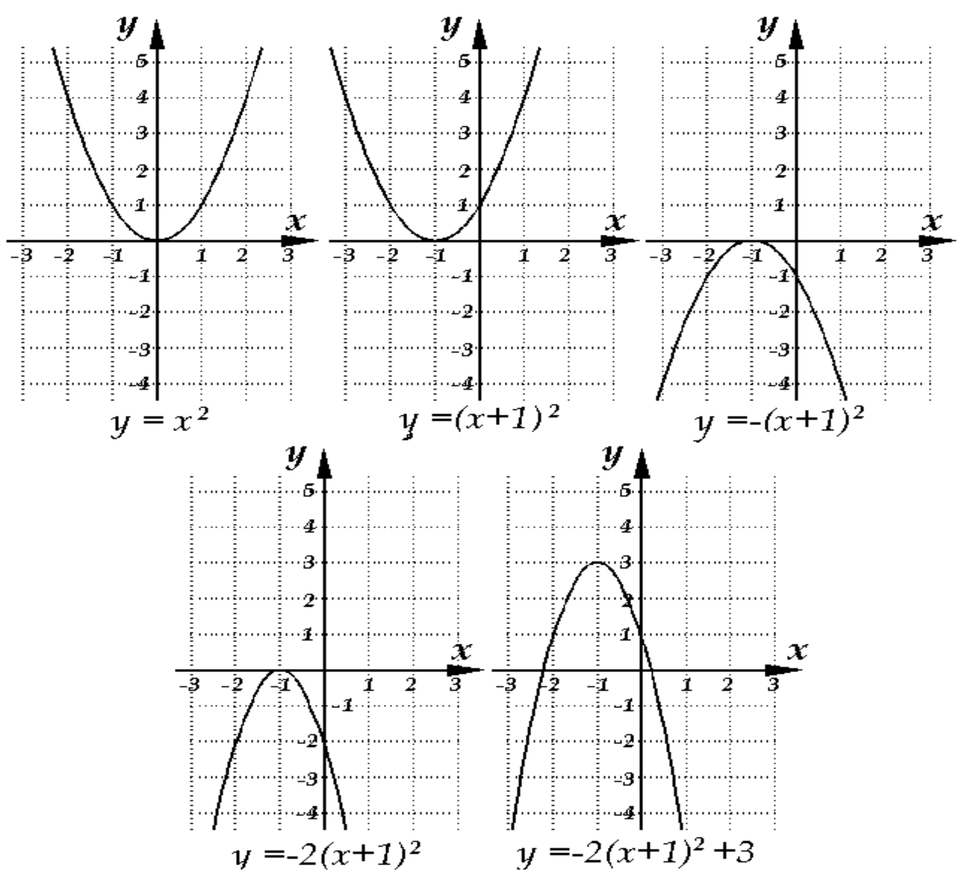


Figura 59.2

1. Graficamos $y=x^2$.

2. Graficamos $y = (x+1)^2$. (Traslación de la gráfica anterior, 1 unidad hacia la izquierda)
3. Graficamos $y = -(x+1)^2$. (Reflexión de la gráfica anterior con respecto al $eje\ x$)
4. Graficamos $y = -2(x+1)^2$. (Alargamiento vertical de la gráfica anterior, en un factor de 2)
5. Graficamos $y = -2(x+1)^2 + 3$. (Traslación de la gráfica anterior, 3 unidades hacia arriba)

Valores máximos y mínimos

Una valor máximo o mínimo de una función es el valor más grande o más pequeño de la función en un intervalo. Las ecuaciones cuadráticas a menudo modelan situaciones de la vida real y, por lo tanto, es de interés encontrar valores máximos y mínimos de esta función. Estos valores pueden representar, por ejemplo, la máxima ganancia en un negocio, el mínimo material necesario en un proceso de manufactura, etc.

A partir de las gráficas de las parábolas, vistas anteriormente, es posible concluir que si una función cuadrática tiene vértice (h,k), entonces la función tiene un mínimo en el vértice si abre hacia arriba y un valor máximo en el vértice si abre hacia abajo. Es decir, tenemos:

Sea f una función cuadrática con la forma estándar

$$f(x) = a(x-h)^2 + k,$$

el valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$ y además:

- Si $a > 0$, el valor mínimo de f es $f(h) = k$.

- Si $a < 0$, el valor máximo de f es $f(h) = k$.

Ejemplo 59.2

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 10x + 12$.

1. Exprese f en la forma estándar.
2. Bosqueje la gráfica de f.
3. Halle el valor mínimo de f.

Solución

1. Para expresar la función en la forma estándar usamos el proceso de completar el cuadrado

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 10x + 12 \\ &= 5(x^2 - 2x) + 12 \\ &= 5(x^2 - 2x + 1) + 12 - 5 \\ &= 5(x-1)^2 + 7. \end{aligned}$$

2. Para bosquejar la gráfica de f podemos partir de la gráfica de la función $y = x^2$ y usar los procesos de traslación, reflexión, compresión y alargamiento vistos anteriormente. En este caso el proceso sería:

   (a) Trasladar horizontalmente la gráfica de $y = x^2$ una unidad a la derecha, para obtener la gráfica de $y = (x-1)^2$.

   (b) Alargar la gráfica anterior en un factor de 5, para obtener la gráfica de $y = 5(x-1)^2$.

   (c) Trasladar la gráfica anterior 7 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x)$.

   De manera alternativa y más rapida, simplemente identificamos la forma estándar de la ecuación cuadrática, como la ecuación de una parábola con vértice en el punto $(1, 7)$ y que se abre hacia arriba pasando, por ejemplo, por el punto $x = 0, y = 5(1)^2 + 7 = 12$ (ver figura 59.3).

3. Puesto que el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene una valor mínimo. Este valor es $f(1) = 7$.

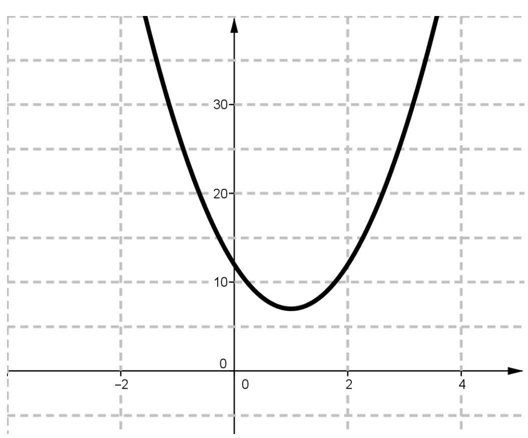


Figura 59.3

Ejemplo 59.3

La mayor parte de los automóviles obtienen su mejor rendimiento de combustible cuando viajan a una velocidad determinada. El kilómetraje por galón, de cierto automóvil, puede ser modelado por medio de la función

$$K(v) = -\frac{1}{28}v^2 + 3v - 31,$$

donde v es la velocidad del automóvil en km/h y K se mide en km/gal. Cuál es el mejor rendimiento (km/gal) que puede obtener este automóvil y a que velocidad se presenta?

Solución

La función K es una función cuadrática que puede ser llevada a la forma estándar, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
K(v) &= -\frac{1}{28}v^2 + 3v - 31, \\
&= -\frac{1}{28}(v^2 - 84v) - 31 \\
&= -\frac{1}{28}(v^2 - 84v + 42^2) - 31 + \frac{42^2}{28} \\
&= -\frac{1}{28}(v - 42)^2 + 32.
\end{aligned}$$

Así que tenemos el caso de una parábola con vértice en el punto $(42, 32)$ y que se abre hacia abajo. Por esta razón podemos concluir que el máximo rendimiento se obtiene cuando se viaja a $42km/h$ y es de $32km/gal$.

Ejercicios

1. Considere la función cuadrática $f(x) = -3x^2 + 12x + 5$.
   (a) Exprese f en la forma estándar.
   (b) Bosqueje la gráfica de f.
   (c) Halle el valor máximo de f.
2. Si se lanza una bola directamente hacia arriba con una velocidad de $40m/s$, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

Lección 60

Funciones pares e impares

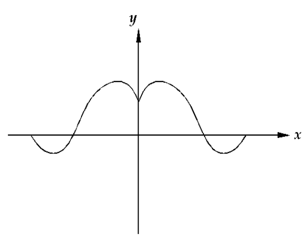
Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que

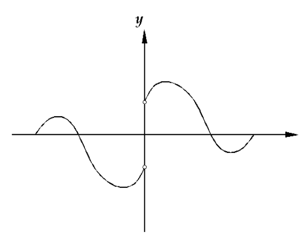
f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f.

f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f.

La gráfica de una función par es **simétrica con respecto al eje** y, mientras que la gráfica de una función impar es **simétrica con respecto al origen** (ver figura 60.1).



(a) Gráfica de una función par



(b) Gráfica de una función impar

Figura 60.1

Ejemplo 60.1

Determine si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos.

1. $f(x) = (x^2 + x^4)^2$,
2. $f(x) = 1 - x^7 + x^3$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^9} + 5x + 10x^7$,
4. $f(x) = x^2 + |x|$,
5. $f(x) = \dfrac{1 - x^4}{|x|}$,

6. $f(x) = \sqrt[5]{x} + 13x^7 - x$,

7. $f(x) = x^4 + \dfrac{3 + 2x^2 - x^6}{3x}$.

Solución

Debemos, en cada caso, evaluar $f(-x)$ y compararlo con $f(x)$.

1. $f(x) = \left(x^2 + x^4\right)^2$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \left((-x)^2 + (-x)^4\right)^2 \\ &= \left(x^2 + x^4\right)^2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

   Como $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in Df$, entonces f es par.

2. $f(x) = 1 - x^7 + x^3$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 - (-x)^7 + (-x)^3 \\ &= 1 + x^7 - x^3 \\ &\neq f(x). \end{aligned}$$

   Como $f(-x) \neq f(x)$, $\forall x \in Df$ y $f(-x) \neq -f(x)$, $\forall x \in Df$, entonces f no es ni par ni impar.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^9} + 5x + 10x^7$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{(-x)^3 - (-x)^9} + 5(-x) + 10(-x)^7 \\ &= \frac{1}{-x^3 + x^9} - 5x - 10x^7 \\ &= -\left(\frac{1}{x^3 - x^9} + 5x + 10x^7\right) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

   Como $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in Df$, entonces f es impar.

4. $f(x) = x^2 + |x|$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + |-x| \\ &= x^2 + |x| \\ &= f(x). \end{aligned}$$

   Como $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in Df$, entonces f es par.

5. Como $f\,(x) = \dfrac{1-x^4}{|x|}$, entonces

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1-(-x)^4}{|(-x)|} \\ &= \frac{1-x^4}{|x|} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

así que en este caso podemos concluir que la función f es par.

6. En este caso, $f\,(x) = \sqrt[5]{x} + 13x^7 - x$ así que

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt[5]{(-x)} + 13(-x)^7 - (-x) \\ &= -\sqrt[5]{x} - 13x^7 + x. \end{aligned}$$

Como $f\,(-x) \neq f\,(x)$, $\forall x \in Df$ y $f\,(-x) \neq -f\,(x)$, $\forall x \in Df$, entonces f no es ni par ni impar.

7. Como $f\,(x) = x^4 + \dfrac{3+2x^2-x^6}{3x}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + \frac{3+2(-x)^2-(-x)^6}{3(-x)} \\ &= x^4 + \frac{3+2x^2-x^6}{-3x} \\ &= x^4 - \frac{3+2x^2-x^6}{3x}. \end{aligned}$$

Como $f\,(-x) \neq f\,(x)$, $\forall x \in Df$ y $f\,(-x) \neq -f\,(x)$, $\forall x \in Df$, entonces f no es ni par ni impar.

Ejemplo 60.2

La figura 60.2 muestra la gráfica de una función definida para $0 \leq x \leq 4$. Complete la gráfica para $-4 \leq x \leq 0$ para construir

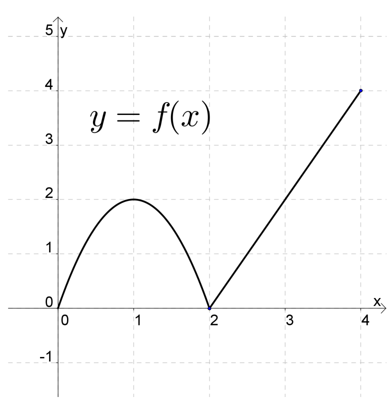


Figura 60.2

1. Una función par.
2. Una función impar.

Solución

1. Si queremos que la función sea par, entonces se debe cumplir que $f(-x) = f(x)$, es decir la gráfica debe ser simétrica con respecto al eje y y obtenemos la figura 60.3

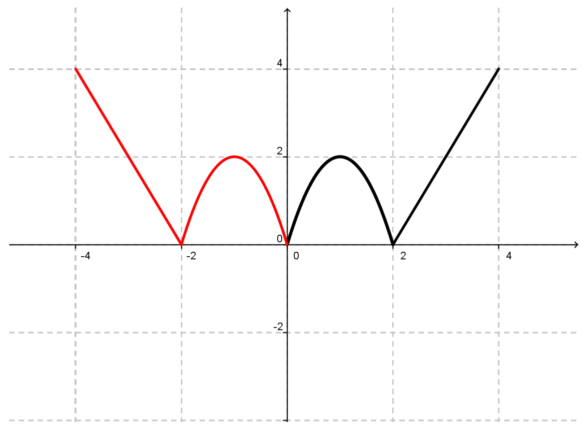


Figura 60.3

2. Del mismo modo, para que la gráfica de la función sea impar, debemos extenderla al intervalo $[-4, 0]$ de tal manera que $f(-x) = -f(x)$, es decir, la gráfica debe ser simétrica con respecto al origen. Obtenemos la figura 60.4.

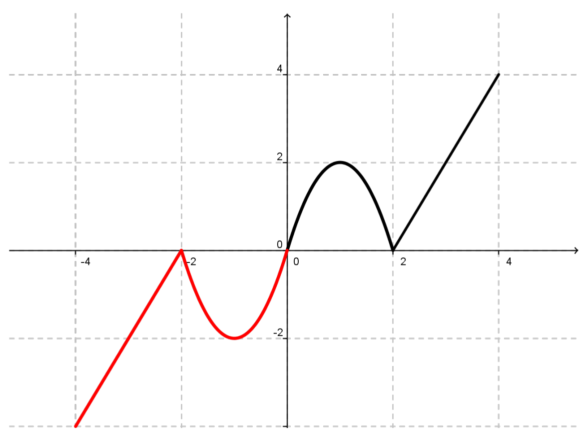


Figura 60.4

Ejercicio

Determine si la función f es par, impar o ninguna de las dos.

1. $f(x) = x^{-2}$,
2. $f(x) = x^3 - x$,

3. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$,

4. $f(x) = x + \frac{x^3}{|x|}$.

Lección 61

Álgebra de funciones

A partir de dos funciones f y g, podemos definir las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y de esta manera obtener nuevas funciones.

Suma, Resta, Multiplicación o Producto y División o Cociente de Funciones

Sean f y g funciones y D_f y D_g sus respectivos dominios. Definimos las funciones $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ así:

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. Su dominio es
$$D_{f\pm g} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R}/x \in D_f \text{ y } x \in D_g\}.$$
2. $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Su dominio es
$$D_{fg} = D_f \cap D_g.$$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Su dominio es
$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \in \mathbb{R}/g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}/x \in D_f \cap D_g \text{ y } g(x) \neq 0\}.$$

Ejemplo 61.1

Sean $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$.

a) Encuentre las funciones $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.

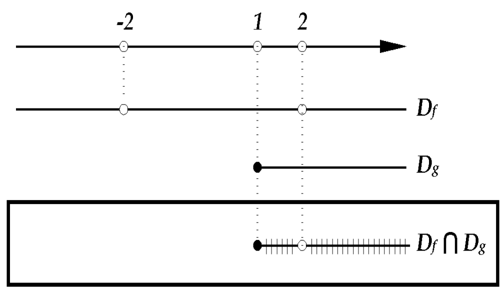
b) Calcule $(f+g)(5)$, $(f-g)(3)$, $(fg)(10)$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)(4)$.

Solución

a) En primer lugar, busquemos los dominios de f y g:

$$
\begin{aligned}
D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (x+2)(x-2) \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \ \wedge \ x \neq 2\} \\
&= \mathbb{R} - \{2, 2\}. \\
D_g &= \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}.
\end{aligned}
$$

Representemos $D_f \cap D_g$:



$D_f \cap D_g = [1, 2) \cup (2, \infty)$.

Figura 61.1

Ahora, encontremos $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ y sus respectivos dominios:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{5x}{x^2-4} + \sqrt{x-1}$,

  $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, 2) \cup (2, \infty)$.

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{5x}{x^2-4} - \sqrt{x-1}$,

  $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [1, 2) \cup (2, \infty)$.

- $(fg)(x) = f(x)g(x) = \dfrac{5x\sqrt{x-1}}{x^2-4}$,

  $D_{fg} = D_f \cap D_g = [1, 2) \cup (2, \infty)$.

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{5x}{(x^2-4)\sqrt{x-1}}$,

$$
\begin{aligned}
D_{f/g} &= D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} \\
&= ([1, 2) \cup (2, \infty)) - \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x-1} = 0\right\} \\
&= ([1, 2) \cup (2, \infty)) - \{x \in \mathbb{R} : x - 1 = 0\} \\
&= ([1, 2) \cup (2, \infty)) - \{x \in \mathbb{R} : x = 1\} \\
&= (1, 2) \cup (2, \infty).
\end{aligned}
$$

b) Calculemos $(f+g)(5)$, $(f-g)(3)$, $(fg)(10)$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)(4)$:

$$\begin{aligned}
(f+g)(5) &= \frac{5\times 5}{5^2-4}+\sqrt{5-1}\\
&= \frac{25}{21}+2=\frac{25+42}{21}=\frac{67}{21}.\\
(f-g)(3) &= \frac{5\times 3}{3^2-4}-\sqrt{3-1}\\
&= \frac{15}{5}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(fg)(10) &= \frac{5\times 10\times\sqrt{10-1}}{10^2-4}=\frac{50\times 3}{96}\\
&= \frac{25\times 3}{48}=\frac{25}{16}.\\
\left(\frac{f}{g}\right)(4) &= \frac{5\times 4}{(4^2-4)\sqrt{4-1}}=\frac{20}{12\times\sqrt{3}}\\
&= \frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

A partir de las funciones f y g, encuentre las funciones $f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.

1. $f(x)=\sqrt{-x}$, $\qquad g(x)=x^2+1$.
2. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $\qquad g(x)=\sqrt{x^2-4}$.
3. $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$, $\qquad g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.
4. $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$, $\qquad g(x)=\dfrac{1}{2x-5}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$.
5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}}{x+1}$, $\qquad g(x)=\dfrac{3x-5}{x^3-1}$.

Lección 62

Álgebra de funciones: composición I

Composición de funciones

Sean f y g funciones y D_f y D_g sus respectivos dominios. La **función compuesta de f y g**, denotada $f \circ g$, se define por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Mediante la representación de funciones como "máquinas" (ver figura 62.1), podemos ilustrar el efecto de la función compuesta $f \circ g$ sobre un elemento x:

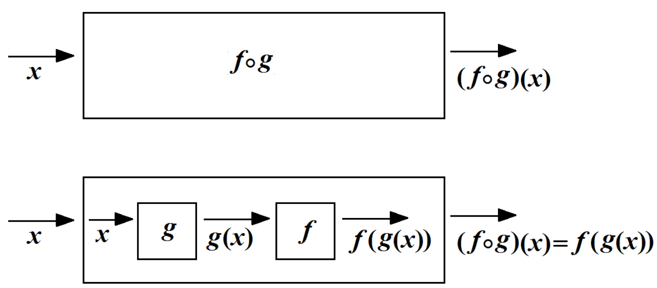


Figura 62.1

o mediante un diagrama de flechas:

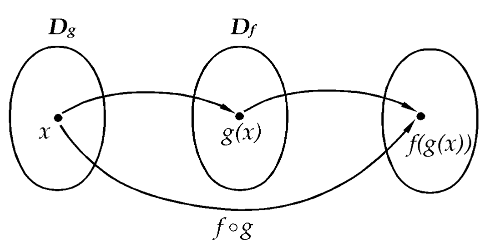


Figura 62.2

Para hallar $(f \circ g)(x)$, se toma un elemento x en el dominio de D_g y se le aplica la función g obteniendo $g(x)$. Si $g(x) \in D_f$ entonces aplicamos f a $g(x)$ obteniendo así $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

Para que la función compuesta $f \circ g$ esté bien definida, se requiere que

$$x \in D_g \text{ y que } g(x) \in D_f.$$

Luego

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \ \text{ y } \ g(x) \in D_f\}.$$

Ejemplo 62.1

Consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{ y } \quad g(x) = \sqrt{x+1},$$

respectivamente.

a) Halle las funciones $f \circ g$, $g \circ f$ y sus dominios.

b) Calcule $(f \circ g)(4)$ y $(g \circ f)(4)$.

Solución

a) Hallemos la función $f \circ g$ y su dominio:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+1}\right) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1.$$

Ahora bien, $D_f = \mathbb{R}$ y

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, \infty),$$

Entonces

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \text{ y } \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \text{ y } x+1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \text{ y } x \geq -1\} \\ &= [-1, \infty). \end{aligned}$$

Hallemos ahora la función $g \circ f$ y su dominio:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \text{ y } x^2 \geq -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 0\} \\ &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f\left(\sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5,$

$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(16) = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$

Observación

En el ejemplo anterior $(f \circ g)(x) = x+1$, sin embargo, no podemos decir que $(f \circ g)(-2) = -2+1 = -1$ ya que $-2 \notin D_{f \circ g} = [-1, \infty)$.

Ejemplo 62.2

Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, halle $f \circ f$ y su dominio.

Solución

Calculemos $(f \circ f)(x)$:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2} = x^4.$$

Hallemos ahora $D_{f \circ f}$:

$$\begin{aligned} D_{f \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \ \text{ y } \ f(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ y } \frac{1}{x^2} \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \\ &= (-\infty, 0) \cup (0, \infty). \end{aligned}$$

Aunque $(f \circ f)(x) = x^2$, no podemos evaluar $(f \circ f)$ en $x = 0$, ya que $0 \notin D_f$.

Ejemplo 62.3

Si $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$, halle $g \circ g$ y encuentre su dominio.

Solución

Calculemos $(g \circ g)(x)$:

$$\begin{aligned} (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x^2-1}{x}\right) &= \frac{\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^2 - 1}{\dfrac{x^2-1}{x}} \\ &= \frac{\dfrac{(x^2+x-1)(x^2-x-1)}{x^2}}{\dfrac{x^2-1}{x}} = \frac{(x^2+x-1)(x^2-x-1)}{x(x^2-1)}, \end{aligned}$$

donde en la segunda línea se uso factorización por diferencia de cuadrados.

Hallemos $D_{g\circ g}$:

$$\begin{aligned} D_{g\circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ y } \frac{x^2-1}{x} \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ y } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1\} \\ &= (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty) \\ &= \mathbb{R} - \{-1,0,1\} \,. \end{aligned}$$

Ejemplo 62.4

Si $F(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$, exprese F como la composición de 3 funciones: $F(x) = (f\circ g\circ h)(x)$.

Solución

Para evaluar la función F en un número dado necesitamos hacer los tres pasos siguientes:

I) Sumar una unidad al número.

II) Dividir 1 por el resultado obtenido en I).

III) Calcular la raíz cuadrada del resultado obtenido en II).

Usemos la representación de funciones como "máquinas" para describir el procedimiento anterior:

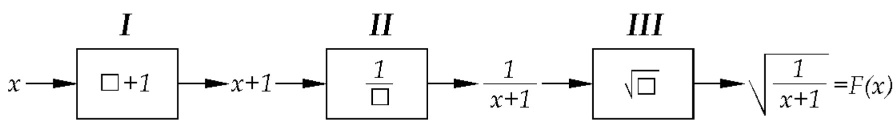


Figura 62.3

De esta forma, si llamamos h a la función representada por la máquina I), g a la función representada por la máquina II) y f a la función representada por la máquina III), tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) &= x+1 \ , \\ g(x) &= \frac{1}{x} \ , \\ f(x) &= \sqrt{x} \ . \end{aligned}$$

Y entonces,

$$F(x) = f\left(g\left(h(x)\right)\right) = f(g(x+1)) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}.$$

Lección 63

Álgebra de funciones: composición II

Ejemplos adicionales

Ejemplo 63.1 *Problema de Aplicación*

Se está inflando un globo esférico de tal forma que su radio crece a una razón de 2 cm/s. Se sabe que en el tiempo inicial $t = 0$ el radio del globo es 0 cm.

a) Encuentre una función $r(t)$ que exprese el radio como una función del tiempo t.

b) Encuentre una función $v(r)$ que exprese el volumen como una función del radio r.

c) Encuentre $v \circ r$. ¿Qué representa esta función?

Solución

a) Como el radio del globo crece a razón de 2 cm/s, la función pedida es

$$r(t) = 2t.$$

b) Sabemos que

$$v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

c) Calculemos $v \circ r$:

$$(v \circ r)(t) = v(r(t)) = v(2t) = \frac{4}{3}\pi (2t)^3 = \frac{32\pi t^3}{3}.$$

Entonces la función $v \circ r$ representa el volumen del globo en función del tiempo t y por tanto permite calcular el volumen del globo en cualquier tiempo t.

Ejemplo 63.2

Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ y sus respectivos dominios.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \,,$$
$$g(x) = x^2 - 4x \,.$$

Solución

Primero hallemos $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2 - 4x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}.$$

Claramente tenemos que $D_g = \mathbb{R}$ y $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \text{ y } x^2 - 4x > 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \ x(x-4) > 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \ (x > 0 \text{ y } x - 4 > 0) \text{ ó } (x < 0 \text{ y } x - 4 < 0)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \ x > 4 \text{ ó } x < 0\} \\
&= (-\infty, 0) \cup (4, \infty).
\end{aligned}$$

Ahora hallemos $(g \circ f)$ y su dominio

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 4\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - 4\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Además:

$$\begin{aligned}
D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_g\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ y } \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ y } x > 0\} \\
&= (0, \infty).
\end{aligned}$$

Ejemplo 63.3

En la figura 63.1 se muestran las gráficas de las funciones f y g.

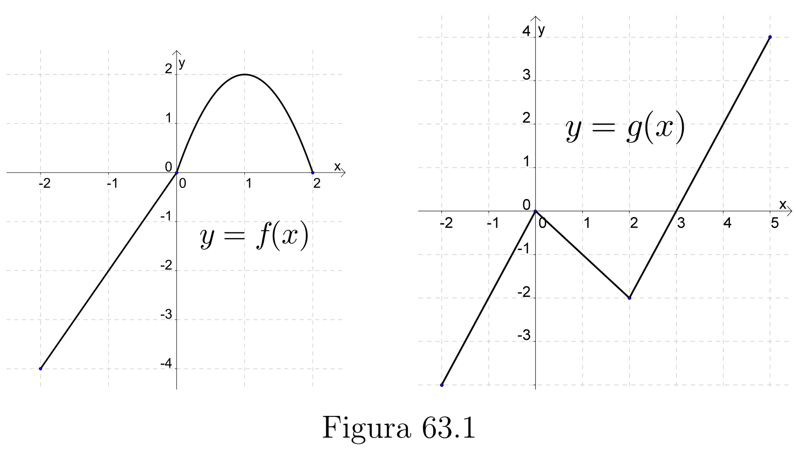


Figura 63.1

1. Calcule $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(1)$, $(f \circ f)(1)$ y $(g \circ g)(4)$.
2. Encuentre los dominios de las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

Solución

1. A partir de la información en las gráficas podemos obtener:

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-2) = -4.$$
$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = -2.$$
$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 0.$$
$$(g \circ g)(4) = g(g(4)) = g(2) = -2.$$

2. Supongamos que las gráficas de f y g son sólo las mostradas en las figuras, entonces

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2,5] \text{ y } g(x) \in [-2,2]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2,5] \text{ y } x \in [-1,4]\} \\ &= [-2,5] \cap [-1,4] \\ &= [-1,4]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2,2] \text{ y } f(x) \in [-2,5]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2,2] \text{ y } x \in [-1,2]\} \\ &= [-2,2] \cap [-1,2] \\ &= [-1,2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{f \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2,2] \text{ y } f(x) \in [-2,2]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2,2] \text{ y } x \in [-1,2]\} \\ &= [-2,2] \cap [-1,2] \\ &= [-1,2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{g \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2,5] \text{ y } g(x) \in [-2,5]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [-2,5] \text{ y } x \in [-1,5]\} \\ &= [-2,5] \cap [-1,5] \\ &= [-1,5]. \end{aligned}$$

Ejemplo 63.4

Exprese $y = G(x) = \dfrac{2}{(3+\sqrt{x})^2}$ como una composición de tres funciones. Es decir, de la forma: $G = f \circ g \circ h$.

Para evaluar la función G en un número dado necesitamos hacer los tres pasos siguientes:

I) Sacar raíz cuadrada al número.

II) Sumar 3 al resultado de I y elevar al cuadrado.

III) Dividir 2 entre el resultado de II.

De esta forma, si llamamos h a la función del paso I), g a la función del paso II) y f a la función del paso III), tenemos que

$$h(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = (3+x)^2$$
$$f(x) = \frac{2}{x}.$$

Y entonces,

$$G(x) = f\left(g\left(h(x)\right)\right) = f(g(\sqrt{x})) = f\left((3+\sqrt{x})^2\right) = \frac{2}{(3+\sqrt{x})^2}.$$

Ejercicios

1. Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ y sus respectivos dominios.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{x}.$

   (b) $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x+2}.$

   (c) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x-3}.$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}, \quad g(x) = \dfrac{3x^2+5}{7x+1}.$

2. Se deja caer una piedra en un lago, que crea una onda circular que viaja hacia afuera a una velocidad de 60 cm/s.

   (a) Encuentre una función g que modele el radio como una función del tiempo.

   (b) Encuentre una función f que modele el área del círculo como una función del radio.

   (c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

Lección 64

Funciones inyectivas e inversa de una función I

Funciones inyectivas

Una función f con dominio D_f, se dice **uno a uno** (1-1) o **inyectiva** si no hay dos elementos distintos en D_f que tengan la misma imagen. Es decir, si dados dos elementos x_1 y x_2 del dominio D_f tales que $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. O equivalentemente, f es uno a uno si dados x_1 y x_2 del dominio D_f tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

Ejemplo 64.1

La función f representada mediante el siguiente diagrama de flechas (ver figura 64.1), no es uno a uno, ya que $f(4) = -1 = f(6)$.

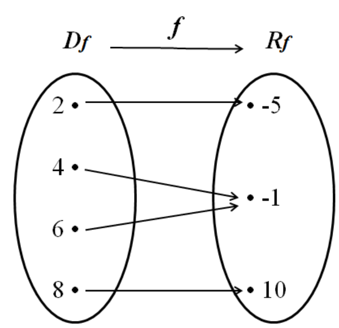


Figura 64.1

Ejemplo 64.2

La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno, ya que hay al menos dos elementos -2 y 2 del dominio de f, diferentes, que tienen la misma imagen $f(-2) = f(2) = 4$. A partir de la gráfica de una función se puede saber si la función es o no uno a uno.

Prueba de la recta horizontal

Una función f es uno a uno si y sólo si ninguna recta horizontal (paralela al *eje* x) corta su gráfica en más de un punto. En efecto, consideremos la gráfica de una función f

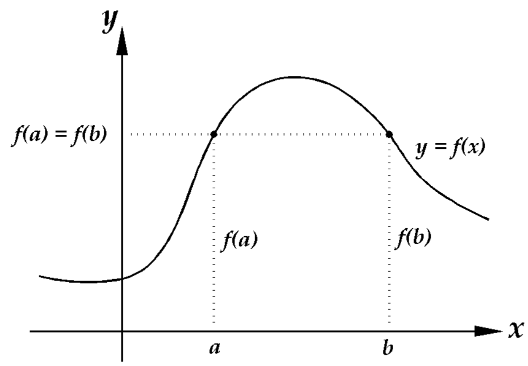


Figura 64.2

Si hay al menos una recta horizontal que intercepta a la gráfica de f en dos puntos distintos, entonces existen al menos dos elementos distintos a y b del dominio de f tales que $f(a) = f(b)$. Por lo tanto f no es uno a uno. Recíprocamente, si f no es uno a uno, es fácil ver que hay al menos una recta horizontal que intercepta a la gráfica de f en dos puntos distintos.

Ejemplo 64.3

Usando la prueba de la recta horizontal, determine si las siguientes funciones son uno a uno:

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$.

b) $g(x) = |x| - 3$.

c) $h(x) = (x+1)^3$.

Solución

a) La gráfica de f se obtiene trasladando 2 unidades a la derecha la gráfica de $y = \sqrt{x}$:

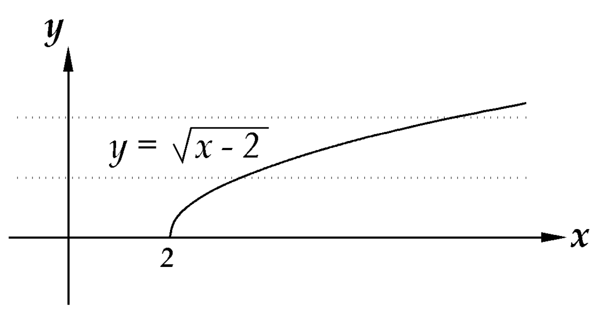


Figura 64.3

Como ninguna recta horizontal corta la gráfica de f en más de un punto, entonces f es uno a uno.

b) La gráfica de g se obtiene trasladando 3 unidades hacia abajo la gráfica de $y = |x|$:

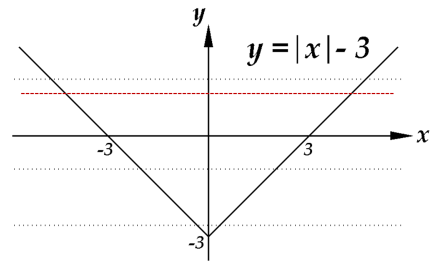


Figura 64.4

Existe al menos una recta horizontal que corta la gráfica de g en dos puntos distintos. Luego g no es uno a uno.

c) La gráfica de h se obtiene trasladando 1 unidad a la izquierda la gráfica de $y = x^3$:

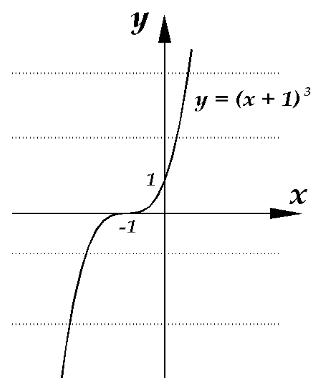


Figura 64.5

Observemos que ninguna recta horizontal corta a la gráfica de h en más de un punto. Luego, h es uno a uno.

Inversa de una función

Sea f una función uno a uno, con dominio D_f y rango R_f. La función g con dominio R_f y rango D_f, tal que

$$g(y) = x \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) = y, \text{ para todo } y \in R_f,$$

se llama la **función inversa** de f y se denota por f^{-1}.

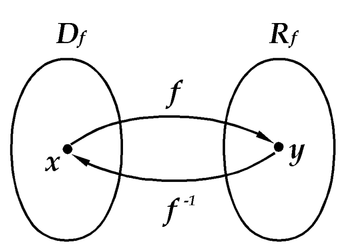


Figura 64.6

Entonces f^{-1} es la inversa de f si para todo $y \in R_f$,

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) = y.$$

De acuerdo con la definición, si f envía a x en y entonces f^{-1} envía a y en x (lo devuelve al valor inicial - ver figura 64.6).

Ejemplo 64.4

Sea g una función con $D_g = \{2, 3, 4\}$ y

$$g(2) = 10, \quad g(3) = 20 \quad \text{y} \quad g(4) = -15.$$

Entonces g es uno a uno y

$$g^{-1}(10) = 2, \quad g^{-1}(20) = 3 \quad \text{y} \quad g^{-1}(-15) = 4.$$

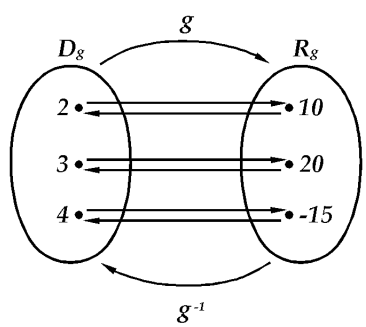


Figura 64.7

Ejercicios

Trace las gráficas de las siguientes funciones y determine si son uno a uno.

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = |x - 4|$
3. $f(x) = x^3 + 1$
4. $f(x) = 2x^4 - 2$
5. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$

Lección 65

Funciones inyectivas e inversa de una función II

Propiedades de la función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio D_f y rango R_f. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ para todo } x \in D_f \quad (\text{ó } (f^{-1} \circ f)(x) = x, \text{ para todo } x \in D_f \text{ }).$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \text{ para todo } y \in R_f \quad (\text{ó } (f \circ f^{-1})(y) = y, \text{ para todo } y \in R_f \text{ }).$$

Además, si dos funciones g y h son tales que

$$g(h(x)) = x, \text{ para todo } x \in D_h \quad (\text{ó } (g \circ h)(x) = x, \text{ para todo } x \in D_h \text{ })$$

y

$$h(g(x)) = x, \text{ para todo } x \in D_g \quad (\text{ó } (h \circ g)(x) = x, \text{ para todo } x \in D_g \text{ })$$

entonces, h es la inversa de g y g es la inversa de h (en otras palabras, g y h son inversas entre sí).

Ejemplo 65.1

Compruebe que las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x-5}$ y $g(x) = x^3 + 5$ son inversas entre sí.

Solución

Los dominios de f y g son ambos $\mathbb{R}$. Calculemos $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 5) = \sqrt[3]{(x^3 + 5) - 5} = \sqrt[3]{x^3} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x-5}\right) = \left(\sqrt[3]{x-5}\right)^3 + 5 = (x-5) + 5 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Por la propiedad anterior de las funciones inversas, concluimos que las funciones f y g son inversas entre sí, esto es,

$$f^{-1}(x) = g(x) = x^3 + 5 \text{ y } g^{-1}(x) = f(x) = \sqrt[3]{x-5}.$$

¿Cómo hallar la función inversa de una función uno a uno?

Si $y = f\ (x)$ es una función uno a uno, para hallar su inversa f^{-1} se procede así:

1. Se escribe $y = f(x)$.
2. Si es posible, se despeja x en términos de y, obteniéndose así
$$x = f^{-1}(y).$$
3. Se intercambian x y y en la ecuación anterior para obtener $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo 65.2

Calcule la inversa de las siguientes funciones uno a uno.

a) $f(x) = \dfrac{x^7}{3} + 1.$

b) $g(x) = \dfrac{1+3x}{5-2x}.$

Solución

a) Escribimos $y = f(x)$ y despejamos x:

$$\begin{aligned} y &= f(x)\ , \\ y &= \frac{x^7}{3} + 1\ , \\ y &= \frac{x^7+3}{3}\ , \\ 3y &= x^7 + 3\ , \\ 3y - 3 &= x^7\ , \\ x &= \sqrt[7]{3y-3}\ . \end{aligned}$$

Intercambiamos x y y y la ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[7]{3x-3}\ , \\ f^{-1}(x) &= \sqrt[7]{3x-3}. \end{aligned}$$

b) Escribimos $y = g(x)$ y despejamos x:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1+3x}{5-2x}\ , \\ 5y - 2xy &= 1 + 3x\ , \\ 5y - 1 &= 3x + 2xy\ , \\ 5y - 1 &= (3+2y)\, x\ , \\ x &= \frac{5y-1}{3+2y}\ . \end{aligned}$$

Intercambiamos x y y y la ecuación resultante es $y = g^{-1}(x)$.

$$y = \frac{5x-1}{3+2x} \ ,$$
$$g^{-1}(x) = \frac{5x-1}{3+2x} \ .$$

Gráfica de la función inversa

Consideremos una función f uno a uno. Si un punto (a, b) pertenece a la gráfica de f entonces $f(a) = b$ y, por definición de función inversa, $f^{-1}(b) = a$. Es decir, el punto (b, a) pertenece a la gráfica de f^{-1}.

$$\begin{aligned}(a,b) \in \text{gráfica de } f \quad &\Longleftrightarrow \quad b = f(a) \\ &\Longleftrightarrow \quad f^{-1}(b) = a \\ &\Longleftrightarrow \quad (b,a) \in \text{gráfica de } f^{-1}.\end{aligned}$$

Además, los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a la recta $y = x$. Esto es, el punto (b, a) se obtiene al reflejar el punto (a, b) con respecto a la recta $y = x$ (ver figura 65.1).

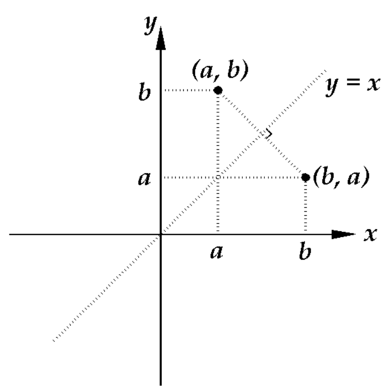


Figura 65.1

Luego, **la gráfica de** $y = f^{-1}(x)$ se obtiene al **reflejar la gráfica de** $y = f(x)$ **con respecto a la recta** $y = x$.

Ejemplo 65.3

La siguiente es la gráfica de una función h uno a uno. Trace la gráfica de h^{-1}.

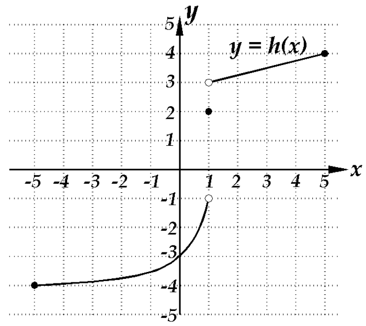


Figura 65.2

Solución

Trazamos la recta $y = x$ y reflejamos la gráfica de h con respecto a esta recta. La gráfica que se obtiene en ese caso es la gráfica de h^{-1}.

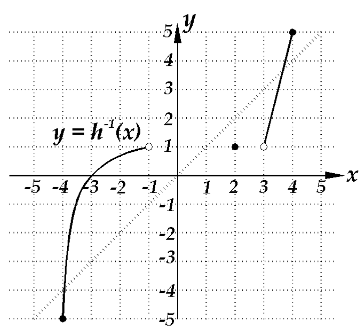


Figura 65.3

Ejercicios

1. Use la propiedad de la función inversa para demostrar que f y g son inversas entre sí.

   (a) $f(x) = x^3 + 1, \qquad g(x) = (x-1)^{1/3}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ x \neq 1, \qquad g\,(x) = \dfrac{1}{x} + 1,\ x \neq 0$.

   (c) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2;$

   $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$

2. Sabiendo que f es una función uno a uno, encuentre la función inversa de f.

   (a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$.

   (b) $f(x) = 5 - 4x^3$.

   (c) $f(x) = (2 - x^3)^5$.

3. Sea $f(x) = 16 - x^2$, $x \geq 0$. Trace la gráfica de f y empléela para trazar la gráfica de f^{-1}. Halle f^{-1} y su dominio.

4. A continuación se muestra la gráfica de una función f.

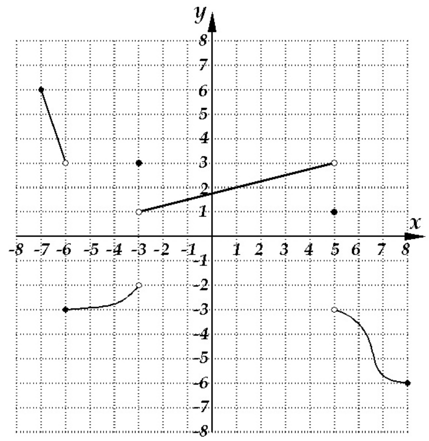


Figura 65.4

(a) ¿Es f una función uno a uno? (justifique).

(b) En caso afirmativo, utilice la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1} y halle su dominio.

Lección 66

Funciones inyectivas e inversa de una función III

Ejemplos adicionales

Ejemplo 66.1

Sea f la función definida por $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

1. Usando la prueba de la recta horizontal, determine si f es o no una función uno a uno.
2. En caso afirmativo, halle la función f^{-1}, su dominio y rango.
3. En el mismo plano cartesiano trace las gráficas de f y su inversa.

Solución

1. Sea $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}/2x+1 \geq 0\} = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right).$$

A partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$, y usando transformaciones de funciones, obtenemos la gráfica de f :

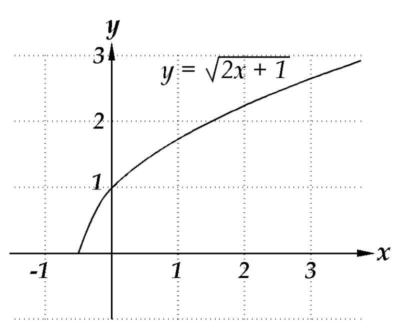


Figura 66.1

De la gráfica de f observamos que $R_f = [0, \infty)$ y además, por prueba de la recta horizontal, concluimos que f es una función uno a uno (ver figura 66.1). Luego, f tiene una función inversa f^{-1}.

2. Hallemos la función f^{-1} :

   Sea $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$. Despejemos x en términos de y :

$$\begin{aligned} y = \sqrt{2x+1} \iff & \quad y^2 = 2x+1,\ y \geq 0 \\ \iff & \quad \frac{y^2-1}{2} = x,\ y \geq 0 \\ \iff & \quad x = \frac{y^2-1}{2} = f^{-1}(y),\ y \geq 0. \end{aligned}$$

   Intercambiando x y y en la ecuación anterior obtenemos:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2},\ x \geq 0.$$

   Además $D_{f^{-1}} = R_f = [0, \infty)$ y $R_{f^{-1}} = D_f = [-\frac{1}{2}, \infty)$.

3. Recordemos que la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = f(x)$ respecto a la recta $y = x$ (ver figura 66.2).

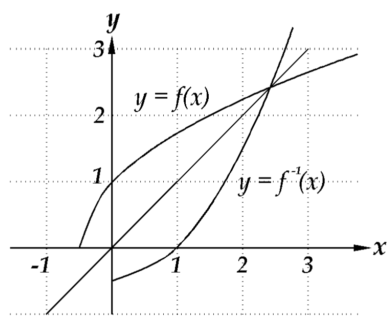


Figura 66.2

Ejemplo 66.2

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x \leq -1, \\ (x+1)^2+2 & \text{si} \quad x > -1. \end{cases}$$

1. Trace la gráfica de f y, a partir de la misma, concluya que f es invertible.
2. Grafique en el mismo sistema cartesiano las funciones $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$.
3. Exprese $f^{-1}(x)$ como una función definida por tramos.

Solución

1. Si $x \leq -1$, entonces $y = 2x+4$, la cual corresponde a una línea recta. La gráfica de este tramo la podemos construir dándole dos valores a x.

x	-2	-1
y	0	2

Si $x > -1$, $y = (x+1)^2 + 2$. Esta última corresponde a dos traslaciones de la parábola $y = x^2$. La primera una unidad a la izquierda, y la segunda dos unidades hacia arriba.

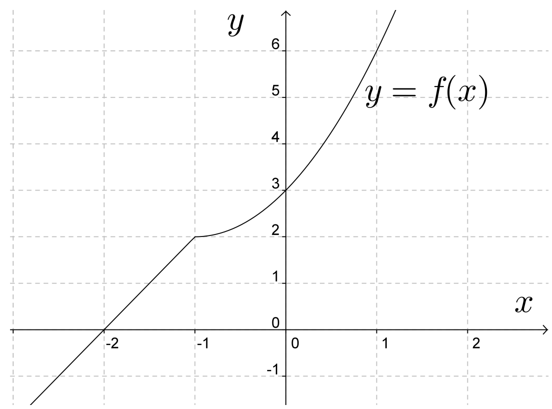


Figura 66.3

Mediante la prueba de la recta horizontal, vemos que f es inyectiva y por lo tanto invertible (ver figura 66.3).

2. La gráfica de $y = f^{-1}(x)$ la construimos reflejando la gráfica de $y = f(x)$, con respecto a la recta $y = x$ (ver figura 66.4).

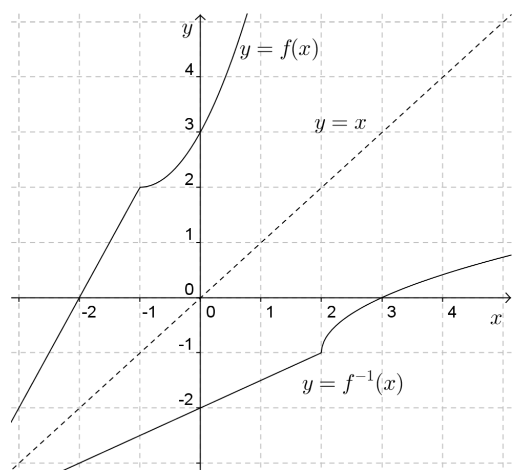


Figura 66.4

3. Para $x \leq -1$, $y = 2x + 4$ y $y \leq 2$. Despejamos x en términos de y:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 4, & y \leq 2 \\ y - 4 &= 2x, & y \leq 2 \\ x &= \frac{y-4}{2}, & y \leq 2. \end{aligned}$$

Intercambiamos x y y, obteniéndose así $y = f^{-1}(x)$:

$$y = \frac{x-4}{2}, \quad x \leq 2$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}, \quad x \leq 2.$$

Para $x > -1$, $y = (x+1)^2 + 2$ y $y > 2$. Despejamos x en términos de y:

$$\begin{aligned}
y &= (x+1)^2 + 2, && y > 2 \\
y - 2 &= (x+1)^2, && y > 2 \\
\sqrt{y-2} &= x + 1, && y > 2 \\
x &= \sqrt{y-2} - 1, && y > 2.
\end{aligned}$$

Tomamos la raíz positiva ya que $x > -1$, y así $x+1 > 0$. A continuación intercambiamos x y y, obteniéndose de esta manera $y = f^{-1}(x)$:

$$y = \sqrt{x-2} - 1, \quad x > 2$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} - 1, \quad x > 2.$$

Por lo tango, la función f^{-1} está dada por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{2} & \text{si} \quad x \leq 2, \\ \sqrt{x-2} - 1 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Ejercicios

1. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 + 2 & \text{si} \quad x < 1, \\ (x-1)^2 + 2 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Trace la gráfica de f.

   (b) ¿Es f una función inyectiva? Justifique.

   (c) En caso afirmativo en (b), grafique en el mismo sistema cartesiano las funciones $y = f(x) \quad$ y $\quad y = f^{-1}(x)$.

   (d) En caso afirmativo en (b), exprese $f^{-1}(x)$ como una función definida por tramos.

2. Sea f la función definida por $f(x) = x\,|x|$.

   (a) Grafique f y concluya que es una función uno a uno.

   (b) Encuentre f^{-1} y trace su gráfica.

Lección 67

Función exponencial I

Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Durante las sesiones de exponenciación y radicación, le dimos sentido a la expresión a^r, donde r es un número racional. Nuestro interés ahora es darle sentido a a^x, donde x en un número real cualquiera. Pare este fin, sólo resta definir el caso cuando x es un número irracional.

El caso x irracional hace parte de los cursos de Cálculo Avanzado y por lo tanto está fuera del alcance de un curso de Precálculo. Nosostros nos limitaremos a decir que la idea detrás de este proceso, es construir una sucesión de números racionales que se acerca cada vez más al número irracional x, y mediante esta sucesión es que definimos a^x.

Función exponencial

Sea a una constante real, $a > 0$ y $a \neq 1$. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

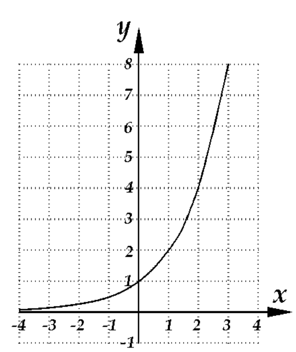
$$f(x) = a^x,$$

se llama **función exponencial con base** a.

Gráfica de una función exponencial

Tracemos las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ (ver figura 67.1) y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (ver figura 67.2).

x	$y = 2^x$
-3	$1/8$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4
3	8



$y = 2^x$

Figura 67.1

x	$y = (1/2)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8

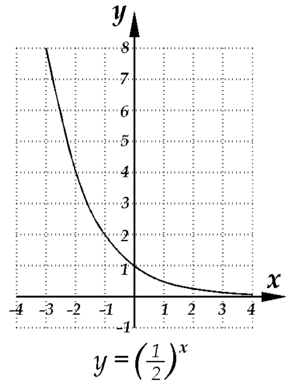


Figura 67.2

Como $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x} = 2^{-x} = f(-x)$, entonces la gráfica de g es la reflexión respecto al eje y de la gráfica de f.

En general, si $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, se tiene:

- El domino D_f de la función f es $\mathbb{R}$.
- $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, el rango R_f de la función f es el intervalo $(0, \infty)$.
- La gráfica de $f(x) = a^x$ pasa por el punto $(0, 1)$, pues $f(0) = a^0 = 1$.
- Si $a > 1$, la gráfica de $f(x) = a^x$ tiene la siguiente forma:

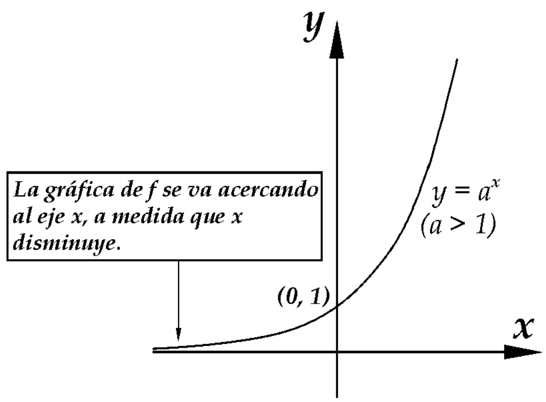


Figura 67.3

Además, a medida que la base a aumenta, la gráfica de f es "más empinada" ("está más cerca al eje y", ó "crece más rápido") para $x > 0$ y está más cerca del eje x ("crece más lentamente") para $x < 0$ (ver figuras 67.3 y 67.4).

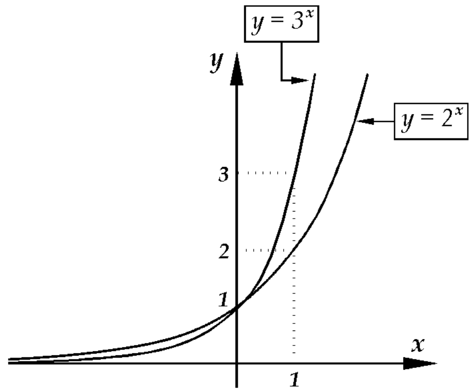


Figura 67.4

- Si $0 < a < 1$, la gráfica de $f(x) = a^x$ tiene la siguiente forma:

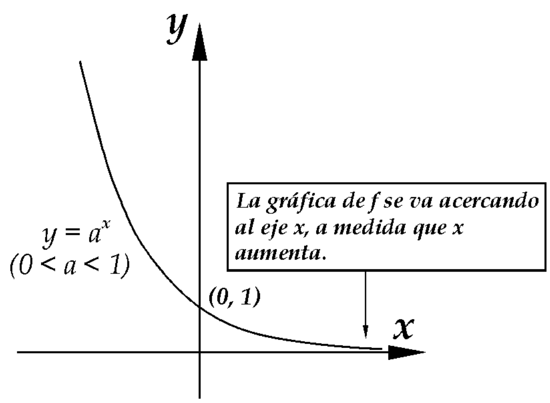


Figura 67.5

Además, a medida que la base a disminuye, la gráfica de f es más "empinada" ("está más cerca al eje y", ó "decrece más rápido") para $x < 0$ y está más cerca del eje x ("decrece más lentamente") para $x > 0$ (ver figuras 67.5 y 67.6).

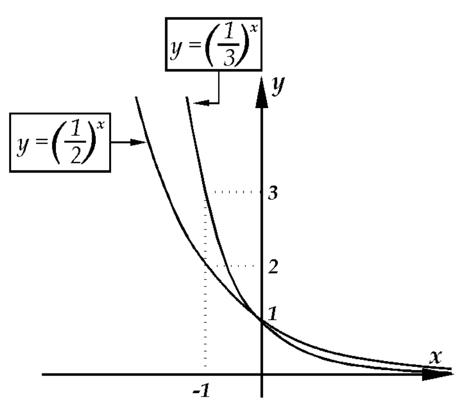


Figura 67.6

- Las gráficas de $y = a^x$ y $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ para $a > 1$, son simétricas con respecto al eje y (ver figura 67.7).

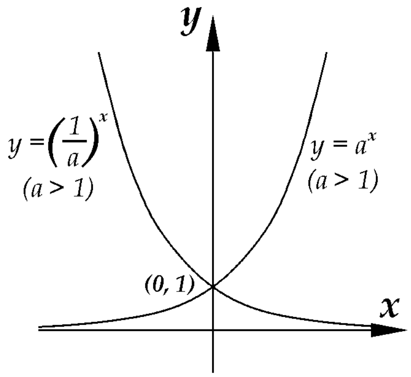


Figura 67.7

- Excluimos el caso $a = 1$ ya que $1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, obtendríamos la función constante $f(x) = 1$, la cual se aleja completamente del comportamiento de la función exponencial de los otros casos.

Ejercicios

1. Trace la gráfica de $f(x) = 3^x$ y a partir de ella, en el mismo plano cartesiano, trace la gráfica de la función $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

2. Considere las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^2$.

   (a) Trace las gráficas de f y g, y compare su crecimiento a medida que x aumenta.

   (b) Evalúe ambas funciones en $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 10$, $x = 20$ y $x = 30$ y compare las tasas de crecimiento de f y g.

3. Encuentre la función de la forma $f(x) = Ca^x$ cuya gráfica es la siguiente.

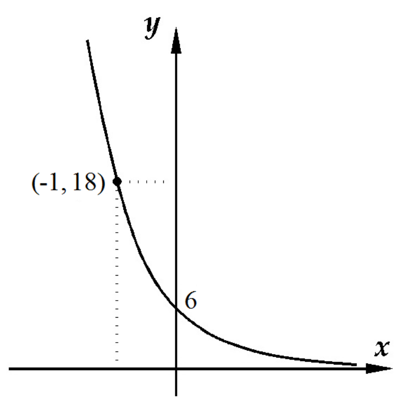


Figura 67.8

4. Si $f(x) = 8^x$, pruebe que $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 8^x \left(\dfrac{8^h - 1}{h}\right)$.

Lección 68

Función exponencial II

Ejemplo 68.1

Trace la gráfica de $h(x) = -2^{-x} + 1$ a partir de la gráfica de $y = 2^x$, utilizando transformaciones de funciones.

Solución

Partiendo de la gráfica de $y = 2^x$, una secuencia para trazar la gráfica de h es:

1. $y = 2^x$.
2. $y = 2^{-x}$ (Reflexión de la gráfica anterior con respecto al eje y).
3. $y = -2^{-x}$ (Reflexión de la gráfica anterior con respecto al eje x).
4. $y = -2^{-x} + 1$ (Traslación de la gráfica anterior, 1 unidad hacia arriba).

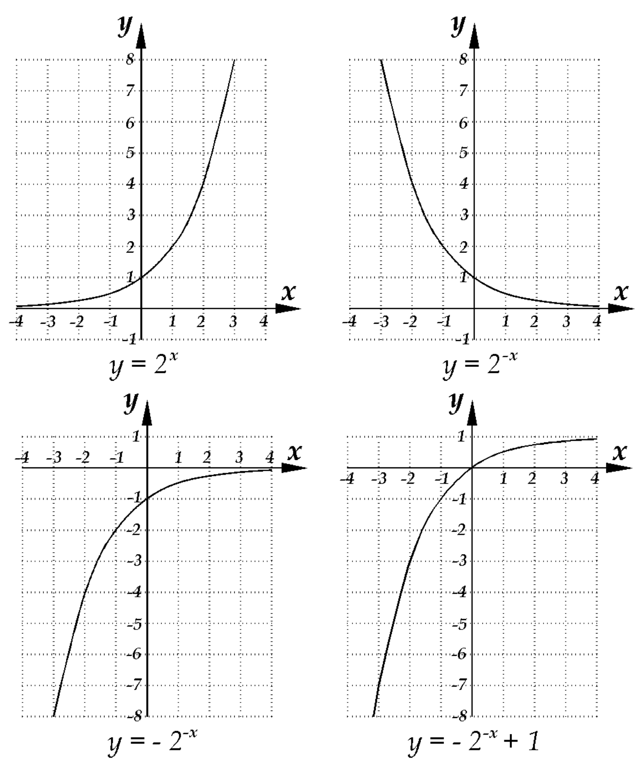


Figura 68.1

Cualquier número positivo a se puede usar como base de la función exponencial. Una base muy importante, que se usa en muchas aplicaciones, es el número irracional

$$e = 2.71828182845904523536028747135 27\ldots,$$

que se conoce como el número de Euler. Este número se puede definir de muchas maneras. Una muy usada, es que e es el número al que se acerca la expresión

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

cuando n se hace cada vez más grande. La siguiente tabla muestra este comportamiento.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1,000	2.716923932
10,000	2.718145927
100,000	2.718268237
1,000,000	2.718280469
10,000,000	2.718281694

Función exponencial natural

La **función exponencial natural** es la función exponencial con base e

$$f(x) = e^x.$$

Como $2 < e < 3$, la gráfica de $f(x) = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ (ver figura 68.2).

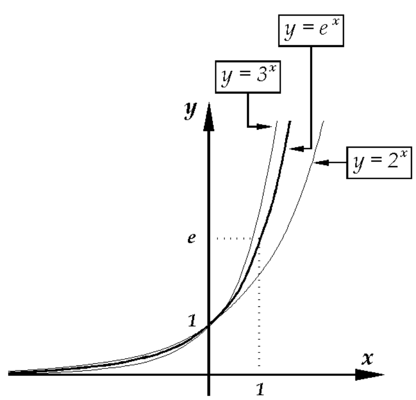


Figura 68.2

Observación

- Algunas aplicaciones en las que aparecen las funciones exponenciales son: crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, cálculo de interés compuesto, entre otras.
- Se puede demostrar que las leyes de los exponentes ya estudiadas, son también válidas cuando los exponentes son números reales.

Modelo de crecimiento exponencial

Si una población presenta una tasa de crecimiento que es proporcional al tamaño de la población en cada instante, entonces ésta experimenta un crecimiento exponencial y su tamaño puede ser modelado por la función

$$P(t) = P_0\, e^{rt}, \tag{68.1}$$

donde

t: tiempo,

$P(t)$: población en el tiempo t,

P_0: población inicial (en $t = 0$),

r: tasa relativa de crecimiento (porcentaje).

La tasa de crecimiento es r (por ciento) de la población en el instante t.

La función (68.1) también se puede usar para modelar la masa restante de una sustancia radiactiva, con masa inicial P_0, que se desintegra a una tasa relativa de decaimiento r ($r < 0$).

Ejemplo 68.2 *Aplicación*

La población de cierta ciudad fue $230,000$ habitantes en el año 2000, y la tasa relativa de crecimiento observada es 3% por año.

1. Halle una función que modele la población de esta ciudad después de t años.
2. Calcule la población proyectada en el año 2015.

Solución

1. En este caso $r = 3\% = 0.03$. Sea t el número de años transcurridos a partir del año 2000. De esta manera $P_0 = 230,000$ habitantes, y así la población de la ciudad después de t años es
$$P(t) = 230,000\, e^{0.03t}.$$
2. En el 2015, tenemos $t = 15$ años. Entonces $P(15) = 230,000\, e^{0.03(15)} \approx 360711.8027$. Por lo tanto, la población proyectada de esta ciudad para el año 2015 es aproximadamente $360,712$ habitantes.

Ejemplo 68.3 *Aplicación*

Cierta sustancia radiactiva se desintegra de tal forma que la cantidad de masa que permanece después de t días se expresa mediante la función

$$m\,(t) = 15\; e^{-0.023t},$$

donde $m\,(t)$ se mide en kilogramos. En este caso la masa inicial es 15 kilogramos y la tasa relativa de decaimiento es -2.3%.

1. Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.
2. ¿Cuánta masa permanece después de 60 días?

Solución

1. Evaluemos la función m en $t = 0$:

$$m(0) = 15\; e^{-0.023(0)} = 15.$$

   Luego, la masa en el tiempo $t = 0$ es 15 kilogramos.

2. En este caso calculamos

$$m\,(60) = 15\; e^{-0.023(60)} \approx 3.773678296.$$

   Por lo tanto, después de 60 días permanecen aproximadamente 3.77 kilogramos.

Ejercicios

1. Utilizando transformaciones de funciones, trace la gráfica de las siguientes funciones y para cada una de ellas halle su dominio y rango:
   (a) $f(x) = 2^{x-3}$.
   (b) $f(x) = 6 - 3^{x}$.
   (c) $f(x) = e^{x-3} + 4$.
   (d) $f(x) = -2 - e^{-x}$.
   (e) $f(x) = |1 - e^{x}|$.
   (f) $g\,(x) = \pi^{-x} - 2$.
   (g) $h\,(x) = 2 - 3(4^{x})$.
2. La poblacion de conejos en cierta región tiene una tasa de crecimiento relativa de 7% por año. Se estima que la población en 2002 era de 5 000 conejos.
   (a) Encuentre una función que modele la población de conejos t años después del año 2002.
   (b) Estime la población de conejos en el año 2019.

Lección 69

Función Logarítmica I

Función Logarítmica

Sea $a > 0$, $a \neq 1$. En las sesiones anteriores estudiamos la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$, cuando $a > 1$ y también cuando $0 < a < 1$ (ver figura 69.1).

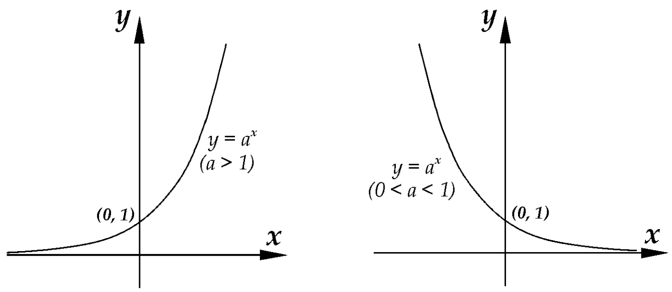


Figura 69.1

En ambos casos, por la prueba de la recta horizontal, la función exponencial $f(x) = a^x$ es una función uno a uno y por lo tanto existe su inversa f^{-1}, que llamaremos **función logarítmica con base** a y la denotaremos por $\log_a$.

Más precisamente, la función **logarítmica con base a**, denotada por $\log_a$, está definida por

$$\log_a x = y \quad \text{si y sólo si} \quad a^y = x, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$\log_a x$ es el exponente y al que se debe elevar la base a para obtener x.

Ejemplo 69.1

- $\log_{10} 100 = 2$, porque $10^2 = 100$.
- $\log_2 8 = 3$, porque $2^3 = 8$.
- $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$, porque $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.
- $\log_{36} 6 = \dfrac{1}{2}$, porque $(36)^{1/2} = \sqrt{36} = 6$.

Propiedades de los logaritmos

Sea $a > 0$, $a \neq 1$.

1. $\boxed{\log_a 1 = 0}$, porque $a^0 = 1$.
2. $\boxed{\log_a a = 1}$, porque $a^1 = a$.
3. $\boxed{\log_a a^x = x,\ x \in \mathbb{R}}$, porque $a^x = a^x$.
4. $\boxed{a^{\log_a x} = x,\ x > 0}$, porque $\log_a x$ es el exponente al cual se debe elevar a para obtener x.

Las propiedades 3. y 4. resultan también de aplicar las propiedades de una función f y su inversa f^{-1}.

En efecto, si $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x,\ x \in \mathbb{R}.$$
$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x,\ x > 0.$$

Ejemplo 69.2

- $\log_3 1 = 0$, porque $3^0 = 1$.
- $\log_2 2 = 1$, porque $2^1 = 2$.
- $\log_7 7^{-2} = -2$ porque $7^{-2} = 7^{-2}$.
- $5^{\log_5 \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ porque $\log_5 \sqrt{3}$ es el exponente al que debemos elevar a 5 para obtener $\sqrt{3}$.

Gráfica de la función logarítmica

Como la función logarítmica con base a es la inversa de $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, entonces

$$D_{\log_a} = R_f = (0, \infty)$$
$$R_{\log_a} = D_f = \mathbb{R}.$$

Además, su gráfica se obtiene reflejando la gráfica de $f(x) = a^x$ con respecto a la recta $y = x$.

En la figura 69.2 se muestra la gráfica de $y = f^{-1}(x) = \log_a x$, en el caso $a > 1$.

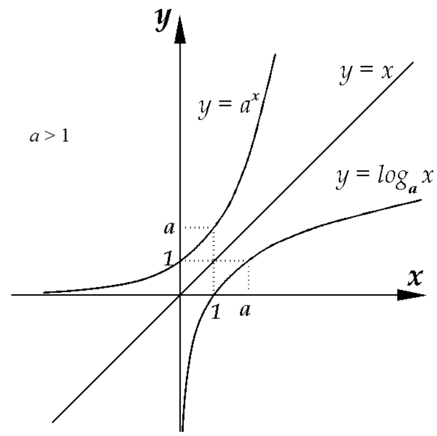


Figura 69.2

Logaritmos especiales

- El logaritmo con base $a = 10$, se llama **logaritmo común** y se denota log.

$$\log x = \log_{10} x.$$

- El logaritmo con base $a = e$, se llama **logaritmo natural** y se denota ln.

$$\ln x = \log_e x.$$

Si en las propiedades de los logaritmos hacemos $a = e$, obtenemos:

$$\boxed{\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1; \quad \ln e^x = x,\ x \in \mathbb{R}; \quad e^{\ln x} = x, x > 0.}$$

Ejemplo 69.3

- $\log 100 = 2$, porque $10^2 = 100$.
- $\log 0.1 = -1$, porque $10^{-1} = 0.1$.
- $\ln e^2 = 2$, porque $e^2 = e^2$.
- $e^{\ln 15} = 15$, porque $\ln 15$ es el exponente al que debemos elevar a e para obtener 15.

Ejercicios

1. Trace la gráfica de $y = \log_a x$ para el caso $0 < a < 1$.
2. En el mismo plano cartesiano, trace las gráficas de $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ y $y = \log_4 x$. ¿Cómo se comportan entre ellas?
3. Trace la gráfica de las siguientes funciones por medio de transformaciones sobre la gráfica de una función logarítmica conocida. Además, diga cuál es el dominio y el rango de la función.

(a) $f(x) = \log_5(x+2) - 1$.

(b) $g(x) = |\ln x|$.

(c) $h(x) = \ln|x|$.

4. Encuentre el dominio de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \log_2(x+3)$.

(b) $g(x) = \log(x+2) + \ln(5-x)$.

(c) $h(x) = \sqrt{x-3} + \log_8(9-x) - \dfrac{1}{x-5}$.

Lección 70

Función Logarítmica II

Leyes de los logaritmos

Las siguientes propiedades, llamadas leyes de los logaritmos, se deducen fácilmente de las leyes de los exponentes.

Sean $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ y $y > 0$.

1. $\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.}$
2. $\boxed{\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.}$
3. $\boxed{\log_a (x^r) = r \log_a x, \text{ para todo } r \in \mathbb{R}.}$

Demostración

1. Usando las leyes de los exponentes tenemos que

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Vemos entonces que $\log_a x + \log_a y$ es el exponente al que hay que elevar a a para obtener xy. Por lo tanto $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$. Las otras dos leyes se dejan como ejercicio.

Importante: Al trabajar con logaritmos debe tenerse en cuenta que:

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y \ ,$$

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a \left(\frac{x}{y}\right) \ ,$$

$$(\log_a x)^r \neq r \log_a x \ .$$

Cambio de base

En muchas ocasiones requerimos pasar de un logaritmo con base b a uno con base a, donde a y b son constantes positivas. Más precisamente, si $y = \log_b x$, queremos expresar y en términos de $\log_a x$. Esto lo logramos usando la definición y la ley 3. de los logaritmos:

$$\begin{array}{llll} y = \log_b x & \Longleftrightarrow b^y = x & & \text{Definición.} \\ & \Longleftrightarrow \log_a b^y = \log_a x & & \text{Tomamos } \log_a \text{ en ambos lados.} \\ & \Longleftrightarrow y \log_a b = \log_a x & & \text{Ley 3.} \\ & \Longleftrightarrow y = \frac{\log_a x}{\log_a b}. & & \end{array}$$

Y así,

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.}$$

Ejemplo 70.1

Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones:

1. $\log_6 3 + \log_6 12$.
2. $\log_3 162 - \log_3 2$.
3. $\log_5 10 + \log_5 20 - 3 \log_5 2$.
4. $\dfrac{\log_5 32}{\log_5 4} + 2 \log_4 6 - \log_4 18$.

Solución

1. $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6(3 \cdot 12) = \log_6 36 = 2$.
2. $\log_3 162 - \log_3 2 = \log_3 \left(\dfrac{162}{2}\right) = \log_3 81 = 4$.
3. $$\begin{aligned} \log_5 10 + \log_5 20 - 3 \log_5 2 &= \log_5 (10 \cdot 20) - \log_5 2^3 \\ &= \log_5 \left(\frac{10 \cdot 20}{2^3}\right) = \log_5 \left(\frac{200}{8}\right) \\ &= \log_5 25 \\ &= 2. \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} \frac{\log_5 32}{\log_5 4} + 2 \log_4 6 - \log_4 18 &= \log_4 32 + \log_4 (6^2) - \log_4 18 \\ &= \log_4 \left(\frac{32 \cdot 36}{18}\right) \\ &= \log_4 (32 \cdot 2) = \log_4 64 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 70.2

Escriba los siguientes logaritmos como un cociente de logaritmos naturales:

1. $\log_5 8$.
2. $\log_3 10$.

Solución Usando cambio de base obtenemos:

1. $\log_5 8 = \dfrac{\log_e 8}{\log_e 5} = \dfrac{\ln 8}{\ln 5}$.
2. $\log_3 10 = \dfrac{\log_e 10}{\log_e 3} = \dfrac{\ln 10}{\ln 3}$.

Ejemplo 70.3

Escriba la siguiente expresión como un solo logaritmo

$$\frac{1}{3}\ln(2x+1) + \frac{1}{2}\left[\ln(x-4) - \ln\left(x^2+5\right)\right].$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\ln(2x+1) + \frac{1}{2}\left[\ln(x-4) - \ln\left(x^2+5\right)\right] &= \ln(2x+1)^{1/3} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x-4}{x^2+5}\right)\right] \\
&= \ln(2x+1)^{1/3} + \ln\left(\frac{x-4}{x^2+5}\right)^{1/2} \\
&= \ln\left[(2x+1)^{1/3}\left(\frac{x-4}{x^2+5}\right)^{1/2}\right] \\
&= \ln\left[\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt{\frac{x-4}{x^2+5}}\right].
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Demuestre las leyes 2. y 3. de los logaritmos.
2. Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones.
   (a) $\log_8 8^{17}$.
   (b) $\log_9 \sqrt{3}$.
   (c) $e^{2\ln\pi}$.
   (d) $\log_4\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   (e) $\log_4 8$.
   (f) $\log 25 + \dfrac{1}{2}\log 16$.
   (g) $2\log_3 10 - \log_3 6 - \log_3 150$.
   (h) $\log_3\left(\ln e^{9^{500}}\right)$.
3. Use las leyes de los logaritmos para escribir la expresión como un solo logaritmo.

(a) $\log_3\left(x^2-16\right)-\log_3\left(x-4\right)$.

(b) $\ln\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\ln\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-3\ln\sqrt[3]{c}$.

(c) $2\log(x+5)-\dfrac{1}{3}\log(x^2+1)+2\log(x-5)$.

(d) $\dfrac{\log_7 x}{\log_7 5}+\log_5(x+1)-3\log_5(x^2+5)$.

4. Pruebe que

$$-\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right).$$

5. Sean $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$ y $g(x)=\ln(x-2)$. Encuentre $f\circ g$ y su dominio.

Lección 71

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En varias de las sesiones de este curso, hemos visto distintos tipos de ecuaciones y cómo resoverlas. Nuestro interés ahora son las ecuaciones que involucran funciones exponenciales o logarítmicas. Todas las técnicas vistas hasta ahora para solucionar ecuaciones, también son válidas para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En muchos casos, una estrategia a tener en cuenta es la siguiente:

1. En cada lado de la ecuación, usando sus propiedades, agrupe todos los términos en una sola función exponencial o logarítmica.

2. Aplique la función inversa adecuada (exponencial o logarítmica) en ambos lados de la ecuación.

3. Despeje la variable, usando las técnicas ya aprendidas.

4. Verifique estas posibles soluciones en la ecuación original.

Ejemplo 71.1

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $e^{3-5x} = 16$.

2. $7^x = 3^{x+1}$.

3. $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$.

4. $\log_2 7 + \log_2 x = \log_2 11 + \log_2(x-4)$.

5. $\ln(x-2) + \ln(x-3) = \ln 2$.

Solución

1. $$\begin{aligned} e^{3-5x} = 16 &\iff \ln e^{3-5x} = \ln 16 \quad \text{Tomamos ln en ambos lados} \\ &\iff 3 - 5x = \ln 16 \\ &\iff x = \frac{3 - \ln 16}{5}. \end{aligned}$$

   Se comprueba fácilmente que esta solución satisface la ecuación original (ejercicio).

2. $$\begin{aligned} 7^x = 3^{x+1} &\iff \ln 7^x = \ln 3^{x+1} && \text{Tomamos ln en ambos lados} \\ &\iff x\ln 7 = (x+1)\ln 3 \\ &\iff x\ln 7 = x\ln 3 + \ln 3 \\ &\iff x\ln 7 - x\ln 3 = \ln 3 \\ &\iff x = \frac{\ln 3}{\ln 7 - \ln 3} = \frac{\ln 3}{\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de cambio de base, podemos ver que

$$x = \log_{\frac{7}{3}} 3.$$

Para verificar la validez de esta solución, debemos notar que la ecuación original es equivalente a $7^x = 3^x 3^1$, es decir, $\left(\frac{7}{3}\right)^x = 3$. De esta manera

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{\log_{\frac{7}{3}} 3} = 3,$$

y por lo tanto la solución es válida.

3. $$\begin{aligned} e^{2x} - 2e^x - 15 = 0 &\iff (e^x)^2 - 2(e^x) - 15 = 0 \\ &\iff (e^x - 5)(e^x + 3) = 0 && \text{Factorizamos con } u^2 - 2u - 15 = (u-5)(u+3) \text{ donde } u = e^x \\ &\iff e^x - 5 = 0 \quad \text{ó} \quad e^x + 3 = 0 \\ &\iff e^x = 5 \quad \text{ó} \quad e^x = -3 \\ &\iff e^x = 5 && e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \\ &\iff x = \ln 5. \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que est a solución satisface la ecuación original (ejercicio).

4. $$\begin{aligned} \log_2 7 + \log_2 x = \log_2 11 + \log_2(x-4) &\iff \log_2(7x) = \log_2[11(x-4)] && \text{Propiedad.} \\ &\iff 2^{\log_2(7x)} = 2^{\log_2[11(x-4)]} && \text{Aplicamos función exponencial base 2 en ambos lados.} \\ &\iff 7x = 11x - 44 \\ &\iff x = 11. \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que esta solución satisface la ecuación original (ejercicio).

5. $\ln(x-2)+\ln(x-3)=\ln 2 \iff \ln\left[(x-2)(x-3)\right]=\ln 2$ Propiedad.

$\iff e^{\ln[(x-2)(x-3)]}=e^{\ln 2}$ Aplicamos función exponencial base e en ambos lados.

$$
\begin{aligned}
&\iff x^2-5x+6=2\\
&\iff x^2-5x+4=0\\
&\iff (x-4)(x-1)=0\\
&\iff x=4 \quad \text{ó} \quad x=1.
\end{aligned}
$$

$x=1$ no es solución ya que

$$\ln(1-2)+\ln(1-3)=\ln(-1)+\ln(-2)\notin\mathbb{R}.$$

Por otro lado,

$$\ln(4-2)+\ln(4-3)=\ln 2+\ln 1=\ln 2.$$

Luego, la única solución de la ecuación es $x=4$.

Ejemplo 71.2

Cierta sustancia radiactiva se desintegra de tal forma que la cantidad de masa que permanece después de t días se expresa mediante la función

$$m\left(t\right)=15\ e^{-0.023t},$$

donde $m\left(t\right)$ se mide en kilogramos. En este caso la masa inicial es 15 kilogramos y la tasa relativa de decaimiento es -2.3%. Encuentre la vida media de esta sustancia.

Solución

La vida media de una sustancia es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de su masa inicial. En este caso para hallar la vida media, debemos resolver la ecuación

$$15\ e^{-0.023t}=\frac{15}{2}.$$

Veamos,

$$
\begin{aligned}
15\ e^{-0.023t}=\frac{15}{2} &\iff e^{-0.023t}=\frac{1}{2}\\
&\iff e^{0.023t}=2\\
&\iff 0.023t=\ln 2\\
&\iff t=\frac{\ln 2}{0.023}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la vida media de la sustancia es

$$t=\frac{\ln 2}{0.023}\approx 30.14 \text{ días}.$$

Ejercicios

1. Verifique las soluciones de los numerales 1., 3. y 4. del Ejemplo 71.1.
2. Resuelva las siguientes ecuaciones.
   (a) $e^{9x-1} = 5$.
   (b) $8^{2x+1} = 2^{x-2}$.
   (c) $3^{x+1} = 7^{x-2}$.
   (d) $e^{2x} - 9 = 0$.
   (e) $2^{3x} + 5 \cdot 2^{2x} - 24 \cdot 2^{x} = 0$.
   (f) $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 4$.
   (g) $|2^{3x} - 7| = 3$.
   (h) $\log_5 x = 4$.
   (i) $\ln(x + 1) = 8$.
   (j) $\ln(x + 5) = \ln x + \ln 5$.
   (k) $\log_2 (x^2 - 4) + 3 \log_2 \sqrt[3]{x + 1} - \log_2(x + 2) = 2$.
   (l) $3^{(\ln x)^2 - 1} = 27$.
3. Para la sustancia radiactiva del Ejemplo 71.2, determine el tiempo que se demora en desintegrarse el 80% de su masa inicial.

Lección 72

Ángulos

Un ángulo es la abertura formada por dos rayos que tienen un punto común llamado **vértice**. En realidad, dos rayos dan lugar a dos ángulos, y en cada caso particular quedará claro de cuál de los dos ángulos se está hablando.

Cualquier ángulo es congruente con algún ángulo ubicado en el plano xy, cuyo vértice está en el origen y tiene un lado, denominado **lado inicial**, coincidiendo con la dirección positiva del eje x; el otro lado del ángulo se llama **lado terminal**. De este último ángulo se dice que está en **posición estándar**.

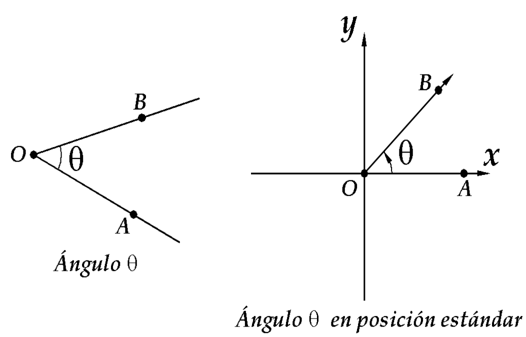


Figura 72.1

En el ángulo $\measuredangle AOB$ de la figura 72.1, el lado OA es el lado inicial y el lado OB es el lado terminal. El ángulo $\measuredangle AOB$ puede generarse al rotar el lado OA alrededor de O hasta el lado OB.

Decimos que un ángulo en posición estándar es **positivo** si la rotación del lado inicial se hace en sentido contrario a las manecillas del reloj, en caso contrario es **negativo**.

Medida de ángulos

Los ángulos se miden en grados o en radianes. Si dividimos una circunferencia en 360 partes iguales, y trazamos los rayos desde cada división al centro, se forman 360 ángulos congruentes. Decimos que cada uno de esos ángulos mide 1 grado, denotado $1°$.

$1°$ es la medida del ángulo equivalente a $\dfrac{1}{360}$ de una vuelta completa. De esta forma $360° = 1$ vuelta completa.

Si se divide la longitud L de una circunferencia por su diámetro, el resultado es la constante π, es decir,

$$\frac{L}{d} = \frac{L}{2r} = \pi,$$

por ello $L = 2\pi r$.

Un **radián**, denotado 1 rad, es la medida del ángulo formado por dos rayos que se interceptan en el centro de una circunferencia de radio r, de tal forma que el arco sobre la circunferencia que se encuentra entre los dos rayos tiene longitud r (ver figura 72.2).

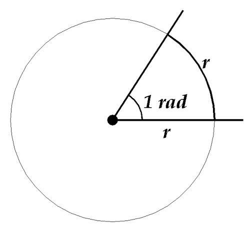


Figura 72.2

Podemos expresar la medida de un ángulo en radianes o en grados. Como un ángulo de 2π rad equivale a un ángulo de 360° encontramos que un ángulo de 1 rad mide $\dfrac{180^\circ}{\pi}$ y un ángulo de 1° mide $\dfrac{\pi}{180}$ rad.

Ejemplo 72.1

1. Encuentre la medida en radianes de un ángulo que mide 36°.
   Un ángulo de 36° mide $\dfrac{36\pi}{180}$ rad, es decir, $\dfrac{\pi}{5}$ rad.
2. ¿Cuál es la medida en grados de un ángulo que mide 3π rad?

$$3\pi \ \text{ rad} = 3\pi \frac{180^\circ}{\pi} = 540^\circ.$$

Nota: Cuando expresemos la medida de un ángulo en radianes omitiremos en general la abreviatura rad.

Ángulos coterminales

Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si sus lados terminales coinciden.

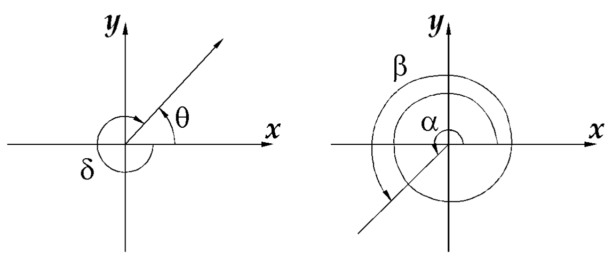


Figura 72.3

Si θ es un ángulo en posición estándar, θ y $\theta + 360°n$, con $n \in \mathbb{Z}$, son ángulos coterminales (ver figura 72.3).

Ejemplo 72.2

1. Encuentre ángulos coterminales con el ángulo $\theta = 45°$, ubicado en posición estándar.
2. Encuentre ángulos coterminales con el ángulo $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ en posición estándar.

Solución

1. Para hallar ángulos coterminales con θ, sumamos múltiplos positivos o negativos de $360°$, así:

$$\begin{aligned} &45° + 360° = 405°, 45° + 720° = 765°,\\ &45° - 360° = -315°, ..., \end{aligned}$$

son ángulos coterminales con $\theta = 45°$. Gráficamente, tenemos:

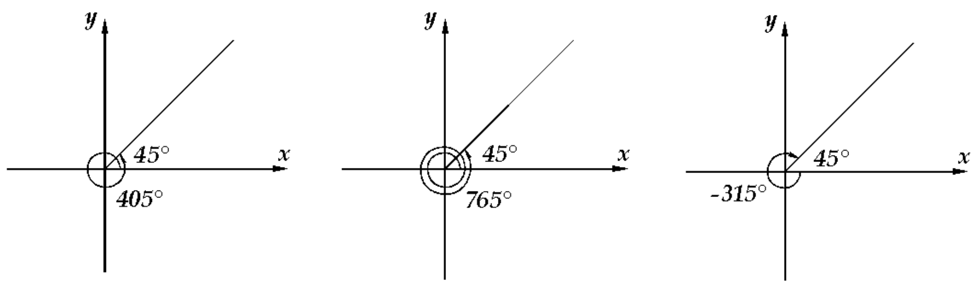


Figura 72.4

2. De manera análoga para hallar ángulos coterminales con $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$, sumamos múltiplos positivos y negativos de 2π de tal forma que,

$$\begin{aligned} &-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} + 8\pi = \frac{47\pi}{6},\\ &-\frac{\pi}{6} - 4\pi = \frac{-25\pi}{6}, \end{aligned}$$

son ángulos coterminales con $-\dfrac{\pi}{6}$.

Ejemplo 72.3

Encuentre un ángulo θ tal que $0° \leq \theta \leq 360°$, que sea coterminal con el ángulo de medida $1125°$.

Solución

Para hallar el ángulo θ restamos $360°$ de $1125°$ tantas veces como sea necesario o, equivalentemente, dividimos $1125°$ entre $360°$ y el residuo será el ángulo buscado.

Así $\dfrac{1125}{360} = 3 + \dfrac{45}{360}$. Luego, $\theta = 45°$.

Ángulo de referencia

El **ángulo de referencia** $\overline{\theta}$ de un ángulo θ en posición estándar, es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

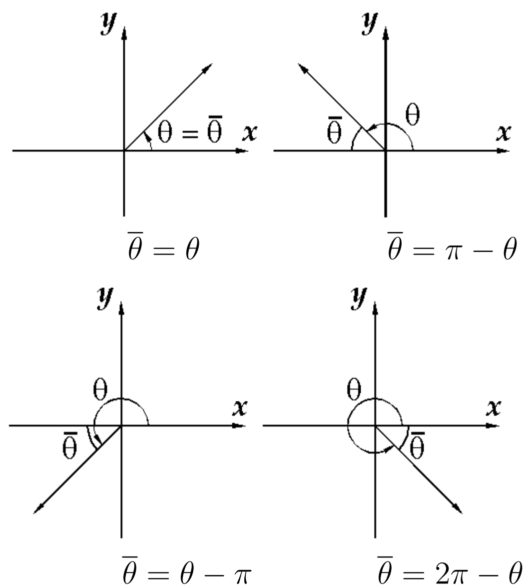


Figura 72.5

Ejemplo 72.4

Encuentre el ángulo de referencia de los siguientes ángulos:

i) $780°$

ii) $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Solución

i) Los ángulos $780°$ y $60°$ son coterminales ya que $780° - 2\,(360°) = 60°$. Luego, $\overline{\theta} = 60°$ porque el lado terminal de $780°$ está en el cuadrante I.

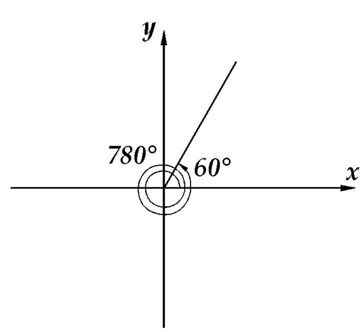


Figura 72.6

ii) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal de $-\dfrac{5\pi}{6}$ y el eje x. Así, $\overline{\theta} = \pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$.

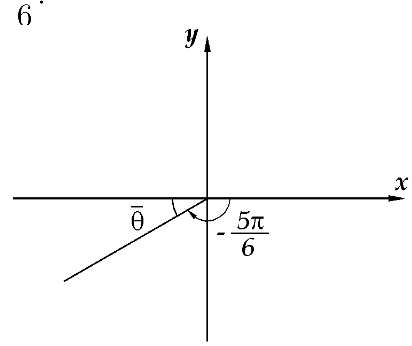


Figura 72.7

Ejercicios

1. Encuentre la medida en radianes del ángulo dado en grados.
   (a) $54°$.
   (b) $-75°$.
   (c) $202.5°$.
2. Encuentre la medida en grados del ángulo dado en radianes.
   (a) $\dfrac{7\pi}{6}$.
   (b) $-\dfrac{3\pi}{2}$.
   (c) $-\dfrac{13\pi}{12}$.
3. Encuentre el ángulo entre $0°$ y $360°$ que es coterminal con el ángulo dado.
   (a) $-546°$.
   (b) $1345°$.
4. Encuentre el ángulo entre 0 y 2π que es coterminal con el ángulo dado.
   (a) 331π.
   (b) $-\dfrac{38\pi}{4}$.
5. Encuentre el ángulo de referencia de los siguientes ángulos.
   (a) $1240°$.
   (b) $-799°$.
   (c) $\dfrac{8\pi}{7}$.

Lección 73

Funciones trigonométricas de ángulos I

Definición:

Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P = (x, y) \neq (0, 0)$ un punto sobre el lado terminal de θ. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto P, definimos las funciones trigonométricas de θ así:

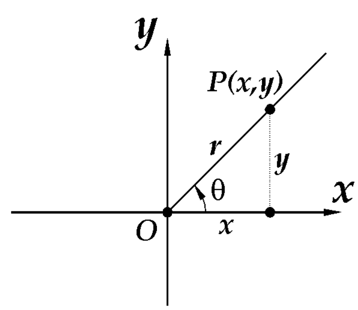


Figura 73.1

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r},$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0), \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \text{ (si } y \neq 0),$$
$$\sec\theta = \frac{r}{x} \text{ (si } x \neq 0), \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} \text{ (si } y \neq 0).$$

Es importante anotar que las funciones trigonométricas de un ángulo **no** dependen de la elección del punto $P = (x, y)$. Si $P' = (x', y') \neq (0, 0)$ es cualquier otro punto sobre el lado terminal del ángulo, las funciones trigonométricas obtenidas son las mismas.

Observación

Sea θ un ángulo agudo en posición estándar y sea $P = (x, y) \neq (0, 0)$ un punto sobre el lado terminal de θ.

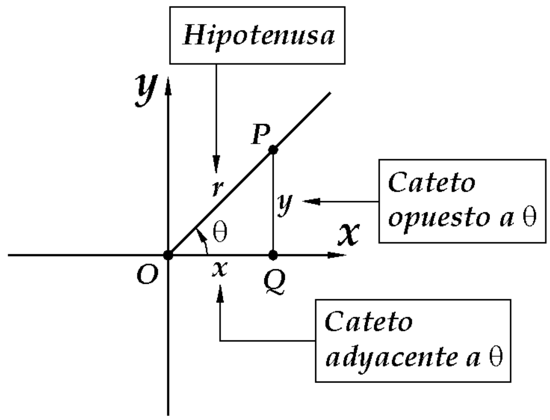


Figura 73.2

El $\triangle OQP$ en la figura 73.2 es rectángulo en Q, la hipotenusa es el segmento $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los catetos son los segmentos $\overline{OQ}$, llamado cateto adyacente a θ, y $\overline{QP}$, llamado cateto opuesto a θ, de longitudes x e y, respectivamente.

Con base en este triángulo y en la definición de las funciones trigonométricas de ángulos tenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}, & \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\textit{cateto adyac.}}{\textit{hipotenusa}},\\
\tan\theta &= \frac{y}{x} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyac.}}, & \cot\theta &= \frac{x}{y} = \frac{\textit{cateto adyac.}}{\textit{cateto opuesto}},\\
\sec\theta &= \frac{r}{x} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyac.}}, & \csc\theta &= \frac{r}{y} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}}.
\end{aligned}$$

Y de esta forma podemos calcular las funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

Ejemplo 73.1

Bosqueje el triángulo rectángulo que tiene ángulo agudo θ, y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ sabiendo que $\sec\theta = \dfrac{7}{2}$.

Solución

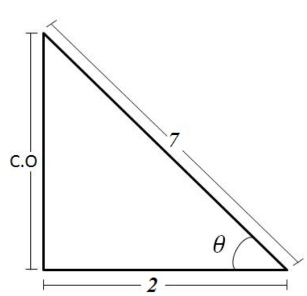


Figura 73.3

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la medida del cateto opuesto:

$$\begin{aligned} 7^2 &= (C.O)^2 + 2^2 \ , \\ (C.O)^2 &= 7^2 - 2^2 \ , \\ (C.O)^2 &= 49 - 4 \ , \\ (C.O)^2 &= 45 \ , \\ C.O &= \sqrt{45} \ . \end{aligned}$$

Hallamos ahora las otras cinco relaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{45}}{7} \ , \qquad \cot\theta = \frac{2}{\sqrt{45}} \ ,$$

$$\cos\theta = \frac{2}{7} \ , \qquad \csc\theta = \frac{7}{\sqrt{45}} \ , \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{45}}{2} \ .$$

Ángulos notables

Llamamos ángulos notables a los ángulos $\theta = 45^\circ$ ó $\frac{\pi}{4}$; $\theta = 60^\circ$ ó $\frac{\pi}{3}$ y $\theta = 30^\circ$ ó $\frac{\pi}{6}$, ya que, como veremos a continuación, fácilmente pueden hallarse sus funciones trigonométricas.

Para $\theta = 45^\circ$ ó $\frac{\pi}{4}$:

Dibujamos un cuadrado de lado 1 y trazamos una diagonal cuya longitud, usando el Teorema de Pitágoras, es $\sqrt{2}$ (ver figura 73.4). Los ángulos agudos de cada uno de los triángulos que se forman son de 45°.

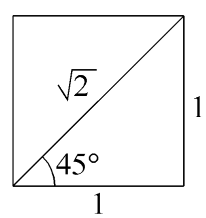


Figura 73.4

Entonces, las funciones trigonométricas de $\theta = 45^\circ$ ó $\frac{\pi}{4}$ son:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45^\circ) \ , \\ &\tan(45^\circ) = 1 = \cot(45^\circ) \ , \\ &\sec(45^\circ) = \sqrt{2} = \csc(45^\circ) \, . \end{aligned}$$

Para $\theta = 60^\circ$ ó $\frac{\pi}{3}$:

Dibujamos un triángulo equilátero $\triangle OPQ$ de lado 2 y trazamos la altura relativa a uno de sus lados (ver figura 73.5). Como la altura es también mediana, la longitud de $\overline{PR}$ es 1 y usando el Teorema de Pitágoras encontramos que la longitud de la altura es $\sqrt{3}$.

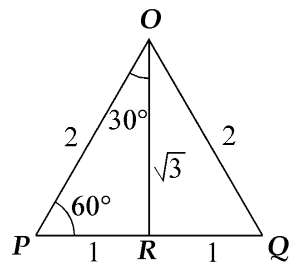


Figura 73.5

Como cada uno de los ángulos interiores del triángulo equilátero mide 60° (¿por qué?), con base en la información anterior, calculamos las funciones trigonométricas de $\theta = 60°$ ó $\dfrac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(60°) = \frac{1}{2}, \tan(60°) = \sqrt{3},\\
&\cot(60°) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sec(60°) = 2, \csc(60°) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Usando el mismo triángulo y el hecho de que la altura es también bisectriz, calculamos las funciones trigonométricas de $\theta = 30°$ ó $\dfrac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}, \quad \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3},\\
&\cot(30°) = \sqrt{3}, \quad \sec(30°) = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \csc(30°) = 2.
\end{aligned}$$

Estos resultados se usan con mucha frecuencia y se encuentran fácilmente si se trabaja con los triángulos aquí descritos.

Puesto que la división entre 0 no es una operación definida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo $\tan 90° = y/x$ no está definida porque $x = 0$ para un ángulo de 90°. Los ángulos para los cuales podrían no estar definidas las funciones trigonométricas son los ángulos para los que la coordenada x o y de cualquier punto en la recta que determina el ángulo es 0. Estos ángulos son denominados **ángulos de un cuadrante**, puesto que coinciden con los ángulos determinados por los ejes coordenados. Para los ángulos 0° y $90° = \pi/2$, se tienen las siguientes funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(0°) = 0, \cos(0°) = 1, \tan(0°) = 0,\\
&\cot(0°) = \text{no definido}, \sec(0°) = 1, \csc(0°) = \text{no definido}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(90°) = 1, \cos(90°) = 0, \tan(90°) = \text{no definido},\\
&\cot(90°) = 0, \sec(90°) = \text{no definido}, \csc(90°) = 1.
\end{aligned}$$

Lección 74

Funciones trigonométricas de ángulos II

Antes de empezar esta sesión es útil recordar el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos notables, junto con $0°$ y $90°$, puesto que estos son los más característicos del primer cuadrante. En principio podríamos aprendernos de memoria estos valores, pero probablemente con el tiempo los olvidemos. Por esta razón es útil recordar la siguiente ayuda mnemotécnica conocida como **regla de la raíz de** n:

Regla de la raíz de n

Esta sencilla regla consiste en lo siguiente: Numeramos los ángulos de 0 a 4 en orden creciente, de tal manera que 0 corresponde a $0°$, 1 a $\pi/6$, 2 a $\pi/4$, 3 a $\pi/3$ y 4 a $\pi/2$. El número que corresponde a cada ángulo será el n del mismo. Numerados de esta manera el seno de un ángulo será la raíz cuadrada de su n dividida entre 2. De esta manera obtenemos la fila de los senos. Para los cosenos no hace falta ningún cálculo adicional, simplemente colocamos la fila que hemos obtenido antes en orden inverso. El valor de las tangentes se encuentra en la manera tradicional, dividiendo el seno por el coseno correspondiente. El resultado puede ilustrarse en la siguiente tabla:

Ángulo	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
n	0	1	2	3	4
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

Otra manera bastante didáctica puede verse en el siguiente esquema, donde la raíz indica que se le debe extraer raíz cuadrada al número correspondiente:

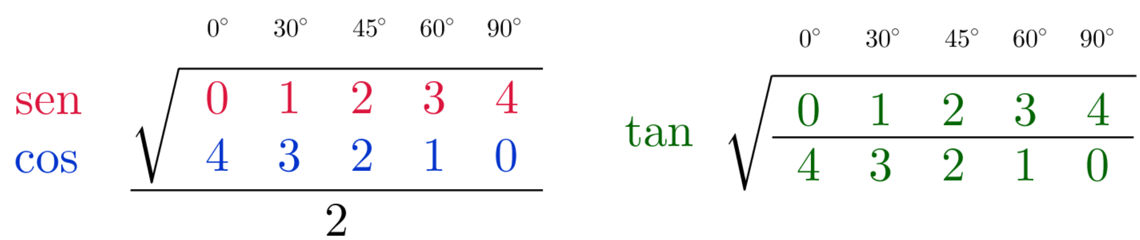


Figura 74.1

Nota: Una manera de concretar fácilmente los esquemas anteriores consiste en asociar a cada ángulo un dedo de la mano derecha de tal manera que el meñique corresponde a 0° y el pulgar a 90°, luego numeramos cada dedo del 0 al 4 y realizamos el proceso antes descrito para obtener el seno del ángulo correspondiente. Finalmente, si recorremos la mano en sentido contrario (es decir, ahora el pulgar corresponde a 0°), pero manteniendo la numeración, obtenemos el coseno del ángulo correspondiente.

Funciones trigonométricas de ángulos mayores a 90°

De la definición de las funciones trigonométricas introducida en la sesión anterior se puede observar que los valores de las funciones trigonométricas son todos positivos si el ángulo θ tiene su lado terminal en el primer cuadrante. Esto es porque x y y son positivos en este cuadrante (además r es positivo siempre porque representa una distancia de un punto al origen). Sin embargo, si el lado terminal de θ está en el cuadrante II, entonces x es negativa y y es positiva, por lo que las funciones trigonométricas $\text{sen}(\theta), \csc(\theta)$ son positivas y las demás negativas. El resto de signos pueden verse en la siguiente tabla:

Cuadrante	**Funciones positivas**	**Funciones negativas**
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, cos, csc, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

El siguiente dispositivo mnemotécnico es util para recordar que funciones trigonométricas son positivas en cada cudrante: **T**odas, **S**eno, **T**angente o **C**oseno.

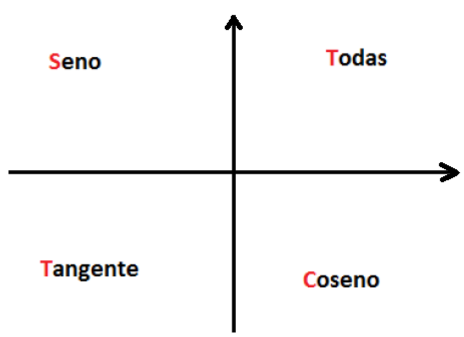


Figura 74.2

Que se puede recordar con la frase: "**T**odas las **S**eñoritas **T**oman **C**álculo".

Ejemplo 74.1

Calcule el signo de las siguientes funciones trigonométricas:

1. $\cos \pi/8$.
2. $\tan 136°$.

3. $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}$.

4. $\csc\dfrac{11\pi}{6}$.

Solución

1. Sabemos que $\pi/8 = 22.5°$, así que el ángulo está en el primer cuadrante y como allí x es positiva, la función coseno tiene signo positivo.

2. Tenemos que $90° < 136° < 180°$, así que el ángulo está en el segundo cuadrante y como allí x es negativa y y es positiva, la función tangente tiene signo negativo.

3. $\pi < \dfrac{7\pi}{6} < \dfrac{3\pi}{2}$, así que el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, donde y es negativa. Por lo tanto, $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6} < 0$.

4. $\dfrac{11\pi}{6} = 330°$, así que el ángulo pertence al cuarto cuadrante donde, según la tabla anterior la función cosecante es negativa. Esto puede deducirse recordando que $\csc\theta = 1/\operatorname{sen}\theta$, así que el signo de la cosecante es el mismo del de la función seno, y como y es negativa en el cuarto cuadrante entonces tanto seno como cosecante son negativas en el cuarto cuadrante.

Las funciones trigonométricas de ángulos mayores de $90°$, se hallan con base en las de los ángulos agudos que son sus ángulos de referencia.

Puede probarse que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ en posición estándar son las mismas que las de su ángulo de referencia $\overline{\theta}$ salvo por el signo.

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo θ, se procede así:

1. Se encuentra su ángulo de referencia $\overline{\theta}$.

2. Se determina el signo de cada una de las funciones trigonométricas de θ, teniendo en cuenta el cuadrante en el cual se ubica θ.

3. Se halla el valor de las funciones trigonométricas de $\overline{\theta}$, que es el mismo para θ, excepto por el signo.

Ejemplo 74.2

Encuentre los siguientes valores:

i) $\csc\dfrac{5\pi}{4}$.   ii) $\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución

i) Si $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$, entonces $\overline{\theta} = \dfrac{\pi}{4}$. Además, en el cuadrante III, $\csc\theta$ es negativa. Luego,

$$\csc\frac{5\pi}{4} = -\csc\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}.$$

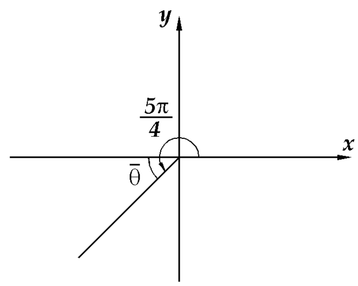


Figura 74.3

ii) En este caso, $\overline{\theta} = \dfrac{\pi}{4}$ y, en el cuadrante IV, $\cot\theta$ es negativa. Luego,

$$\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1.$$

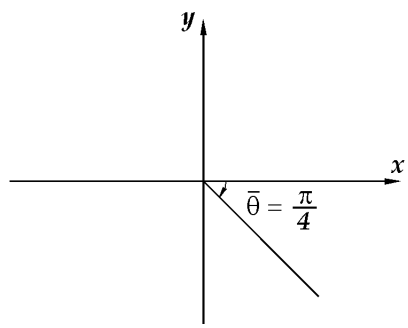


Figura 74.4

Ejercicios

Encuentre los valores de las siguientes funciones trigonométricas:

1. $\sec\dfrac{5\pi}{6}$.
2. $\tan\dfrac{4\pi}{3}$.
3. $\cos\dfrac{3\pi}{4}$.
4. $\cot\dfrac{5\pi}{3}$.
5. $\operatorname{sen} 840°$.
6. $\csc(-210°)$.

Lección 75

Funciones trigonométricas de ángulos III

Aplicación - Área de un triángulo

Sabemos que el área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}$ (base $\times$ altura).

Consideremos los siguientes triángulos

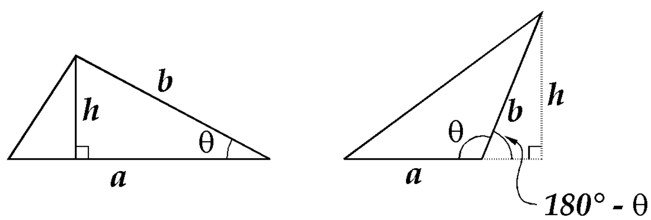


Figura 75.1

Supongamos que, en cada caso, conocemos a, b y θ. Luego, para hallar el área, necesitamos la altura h.

- En la figura 75.1 – izquierda, es claro que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{b} \Longrightarrow h = b\operatorname{sen}\theta$. Luego, $A = \dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$.

- En la figura 75.1 – derecha, tenemos $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \dfrac{h}{b}$ y, como éste es el ángulo de referencia de θ, entonces, $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180° - \theta)$. Luego, $h = b\operatorname{sen}\theta$, y así $A = \dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$.

Luego, si a y b son las longitudes de dos lados de un triángulo y θ es el ángulo entre ellos, entonces el área A del triángulo es

$$\boxed{A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta.}$$

Ejemplo 75.1

Halle el área del triángulo $\triangle PQR$ dado en la figura 75.2.

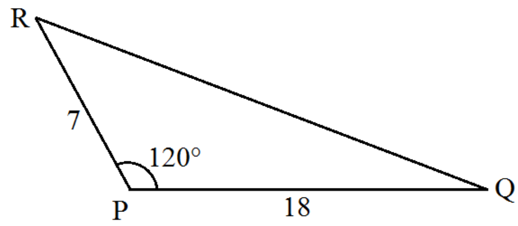


Figura 75.2

Solución

Notemos que el ángulo de referencia de $120°$ es $60°$ y $\text{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Así

$$A = 7 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 63\sqrt{3} \approx 109.1192.$$

Por lo tanto, el área del triángulo $\triangle PQR$ es igual a 109.1192 unidades cuadradas.

Ejemplo 75.2

Un triángulo isósceles tiene un área de 24 cm^2 y el ángulo entre los dos lados congruentes es $\dfrac{5\pi}{6}$. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los dos lados congruentes?

Solución

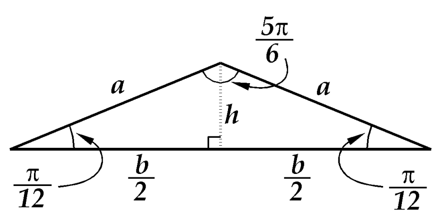


Figura 75.3

Como $A = \dfrac{1}{2} aa \,\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 24$ cm^2, entonces

$$a^2 = \frac{48}{\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)} \text{ cm}^2.$$

Notemos que el ángulo $\dfrac{5\pi}{6}$ se encuentra en el segundo cuadrante y su correspondiente ángulo de referencia es $\dfrac{\pi}{6}$, luego, $\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto, $a^2 = 96$ cm^2, esto es, $a = \sqrt{96}$ cm. Concluimos que cada uno de los lados congruentes mide $\sqrt{96}$ cm.

Funciones Trigonométricas de $-\theta$

Si θ es un ángulo en posición estándar y $P = (x, y)$ es un punto sobre el lado terminal de θ, entonces el punto $P' = (x, -y)$ está sobre el lado terminal de $-\theta$ (ver figura 75.4).

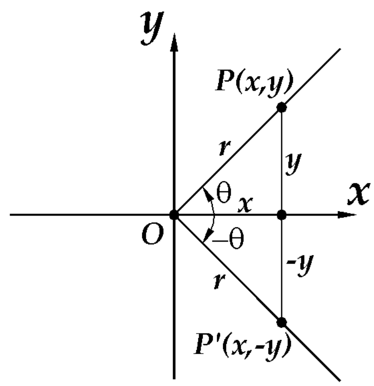


Figura 75.4

Así
$$\operatorname{sen}(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\operatorname{sen}(\theta),$$
$$\csc(-\theta) = \frac{r}{-y} = -\frac{r}{y} = -\csc(\theta),$$
$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos(\theta),$$
$$\sec(-\theta) = \frac{r}{x} = \sec(\theta),$$
$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan(\theta),$$
$$\cot(-\theta) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot(\theta).$$

Luego, las funciones sen, tan, csc, y cot son funciones impares y cos y sec son funciones pares.

Ejemplo 75.3

Demuestre que
$$\frac{\cos\theta\ \tan(-\theta)}{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(-\theta)} + \frac{1}{2} = 0\,.$$

Solución

Empleando las funciones trigonométricas de $-\theta$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\theta\ \tan(-\theta)}{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(-\theta)} + \frac{1}{2} &= \frac{\cos\theta\,(-\tan\theta)}{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{-\cos\theta\,\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{2\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Encuentre el área del segmento (área sombreada de la figura 75.5) de un círculo cuyo radio es de 8 m, formado por un triángulo central de 70°.

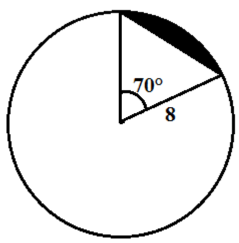


Figura 75.5

2. Calcule el área de la region sombreada dentro de un semicírculo de diametro 8 m (área sombreada de la figura 75.6). La longitud de la cuerda AB es de 6 m.

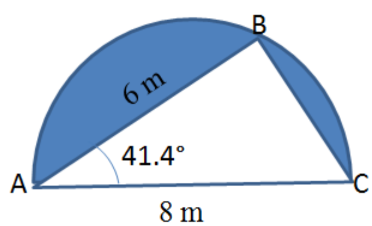


Figura 75.6

3. Empleando las funciones trigonométricas de $-\theta$ demuestre las siguientes igualdades

   (a) $\dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)\cot(-\theta)}{\cos(-\theta)} = 1.$

   (b) $\dfrac{\csc(-\theta)\cot(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}.$

Lección 76

Aplicaciones a triángulos rectángulos

Un triángulo tiene seis elementos: tres ángulos y tres lados. **Resolver un triángulo** significa hallar la medida de todos sus elementos a partir de la información que se tenga acerca del triángulo.

Ejemplo 76.1

Resolver el siguiente tríangulo $\triangle PQR$ dado en la figura 76.1.

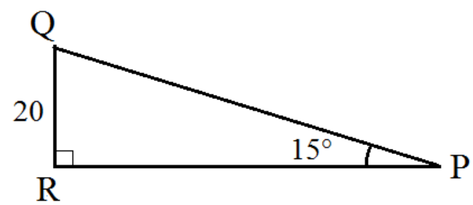


Figura 76.1

Solución

De la figura 76.1 tenemos que $P = 15°$, $R = 90°$ y que el segmento $\overline{RQ}$ mide 20 unidades.

Primero, sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, por lo tanto $Q = 180° - 15° - 90°$, esto es, $Q = 75°$.

Ahora, empleando las funciones trigonométricas de los ángulos P ó Q, obtenemos las medidas de los segmentos $\overline{RP}$ y $\overline{QP}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(15°) &= \frac{20}{\overline{QP}}\ , \\
\overline{QP} &= \frac{20}{\operatorname{sen}(15°)} \approx \frac{20}{0.2588} \approx 77.3. \\
\tan(15°) &= \frac{20}{\overline{RP}}\ , \\
\overline{RP} &= \frac{20}{\tan(15°)} \approx \frac{20}{0.2679} \approx 74.7.
\end{aligned}$$

Concluimos que los segmentos $\overline{RP}$ y $\overline{QP}$ miden 74.7 y 77.3 unidades, respectivamente.

En muchas aplicaciones como navegación, levantamiento de planos, astronomía, se deben resolver triángulos.

Veremos, primero, algo de terminología y, luego, algunos ejemplos.

Si un observador está mirando un objeto, entonces, la línea del ojo del observador al objeto se llama **línea de visión**. Si el objeto que está siendo observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de elevación** (ver figura 76.2 – izquierda). Si el objeto está abajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de depresión** (ver figura 76.2 – derecha).

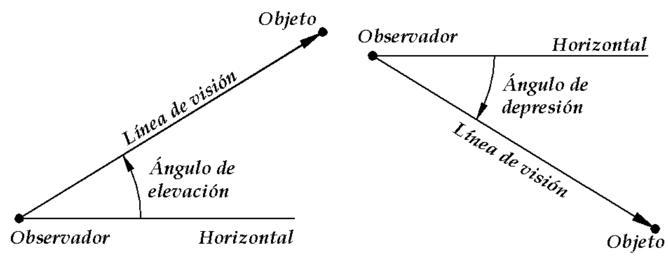


Figura 76.2

Ejemplo 76.2 *Altura de un edificio*

Se encuentra que el ángulo de elevación hasta la parte superior del Edificio Coltejer en Medellín es 11°, desde el suelo a una distancia de 900 metros a partir de la base del edificio. Use esta información para hallar la altura del edificio.

Solución

Primero hagamos un bosquejo de la situación

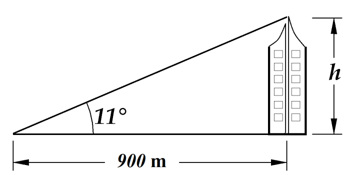


Figura 76.3

Sea h la altura del edificio. De la figura 76.3 se observa que $\tan(11°) = \dfrac{h}{900}$. Es decir, $h = 900\ \tan(11°) \approx 175$. Luego, la altura del edificio es aproximadamente 175 metros.

Ejemplo 76.3

Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es de 60° y que el ángulo de elevación hasta la parte superior del asta de la bandera del edificio es de 65°. Determinar la altura del edificio y la longitud del asta de la bandera.

Solución

Hagamos un bosquejo de la situación

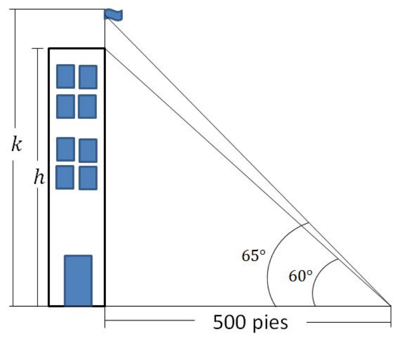


Figura 76.4

Definamos variables asociadas a las incognitas del problema. Sean

h: altura del edificio.

k: altura desde el suelo hasta la parte superior del asta de la bandera.

Según la figura 76.4, obtenemos

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{h}{500} \ , \\ h &= 500 \tan 60^\circ \ , \\ h &\approx 500(1.7321) \ , \\ h &\approx 866.0254 \ . \end{aligned}$$

La altura del edificio es aproximadamente 866.0254 pies.

Para hallar la longitud del asta de la bandera, determinaremos primero la altura desde el suelo hasta la parte superior del asta, k. Nuevamente, de la figura 76.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \tan 65^\circ &= \frac{k}{500} \ , \\ k &= 500 \tan 65^\circ \ , \\ k &\approx 500(2.1445) \ , \\ k &\approx 1072.25 \ . \end{aligned}$$

Para hallar la longitud del asta de la bandera, restamos h de k, es decir, $1072.25 - 866.0254 = 206.2246$ pies. Por lo tanto, la longitud del asta de la bandera es 206.2246 pies.

Ejemplo 76.4 *Altura de una cubierta de nubes*

Para medir la altura de una cubierta de nubes en un aeropuerto, un trabajador dirige un reflector hacia arriba a un ángulo de 75° desde la horizontal. Un observador a 600 m mide el ángulo de elevación hasta el punto de luz y encuentra que es de 45°. Determine la altura h de la cubierta de nubes.

Solución

Hagamos un bosquejo de la situación

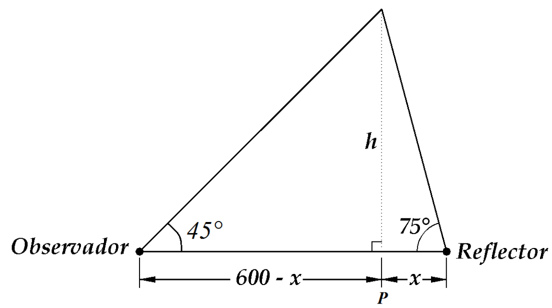


Figura 76.5

Para hallar h, sea x la distancia desde el reflector hasta el punto P donde la línea de h corta el suelo. Observemos que (ver figura 76.5), por un lado,

$$\begin{aligned} h = (600 - x) \tan 45^\circ &= 600 - x \ , \\ x + h &= 600. \end{aligned} \tag{76.1}$$

Del otro triángulo en la figura 76.5, $h = x \tan 75^\circ$. Es decir,

$$h = 3.7321x, \quad 3.7321x - h = 0. \tag{76.2}$$

De (76.1): $x = 600 - h$ y, reemplazando en (76.2), tenemos que $3.7321\,(600 - h) - h = 0$. Por tanto $h = \dfrac{(3.7321)\,(600)}{4.7321} \approx 473.2002$. Luego, la altura de la cubierta de nubes es aproximadamente 473.2002 m.

Ejemplo 76.5

Un cuadro localizado sobre una pared, es tal que su borde inferior está a una distancia de 20 cm sobre el nivel del ojo de un observador situado a 2 metros de la pared. Si el ángulo que forman las visuales con los bordes inferior y superior, respectivamente, mide 15°. ¿Cuál es la altura del cuadro?

Solución

Hagamos un bosquejo de la situación

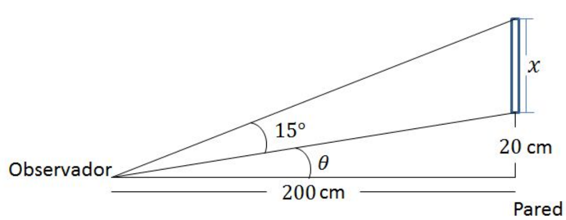


Figura 76.6

Sea x la altura del cuadro. Según la figura 76.6, obtenemos

$$\tan\theta = \frac{20}{200} = 0.1 \ ,$$
$$\theta = \arctan(0.1) \ ,$$
$$\theta \approx 5.71^\circ \ .$$

Para hallar la altura del cuadro, debemos hallar la altura desde el nivel del observador hasta el borde superior del cuadro, que equivale a $(x+20)$ cm. Nuevamente, de la figura 76.6

$$\tan(\theta + 15^\circ) = \frac{x+20}{200} \ ,$$
$$x + 20 = 200\tan(20.71^\circ) \ ,$$
$$x \approx 75.6136 - 20 \ ,$$
$$x \approx 55.6136 \text{ cm} \ .$$

La altura del cuadro es aproximadamente 55.6136 cm.

Ejercicios

1. Un árbol está sostenido por un alambre que se extiende desde 1.5 metros debajo del punto más alto del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 metros de largo y forma un ángulo de 30° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?
2. Un árbol de 96 pies proyecta una sombra de 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?
3. Un muro de una casa tiene 2.10 metros de alto. Para alcanzarlo es necesario utilizar una escalera que forme un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Cuál debe ser la longitud de la escalera?
4. Desde un punto de observación en un edificio frente al oceano, los ángulos de depresión de 2 botes alineados son 45° y 60°. Encontrar la distancia entre los botes si el punto de observación está a una altura de 60 metros.

Lección 77

Ley de seno

Para resolver algunos problemas de aplicación hallamos uno o más elementos de un **triángulo rectángulo,** y para ello usamos la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo y el **Teorema de Pitágoras**, que **sólo es válido para triángulos rectángulos**.

Además de esto, se presentan problemas en los cuales se deben hallar uno o más elementos de un **triángulo acutángulo** u **obtusángulo,** en los que no se puede usar de manera directa el Teorema de Pitágoras ni la definición de las funciones trigonométricas.

Vamos a estudiar dos nuevas herramientas, llamadas Ley de seno y Ley de coseno, que expresan ciertas relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo cualquiera.

Ley de seno

En cualquier triángulo $\triangle ABC$

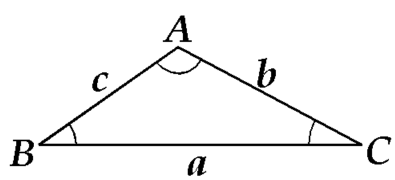


Figura 77.1

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Es decir, en todo triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y la medida del lado opuesto es constante.

Observaciones

Si en un triángulo conocemos un lado y dos ángulos o dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados, podemos usar la ley de seno para resolver el triángulo.

- En el primer caso, conocidos un lado y dos ángulos, el tercer ángulo se calcula usando el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Para hallar cada uno de los otros dos lados, aplicamos la Ley de Seno usando la proporción entre la razón que involucra el lado conocido y la que involucra el lado que queremos hallar. En este caso existe un único triángulo que cumple las condiciones dadas.

- En el segundo, si se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se usa la Ley de Seno para hallar el ángulo opuesto a uno de los lados conocidos, luego se halla el tercer ángulo y finalmente el tercer lado se calcula usando nuevamente la Ley de Seno.

  En este caso puede ocurrir que dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo cumplan las condiciones dadas, razón por la cual se conoce como el caso ambiguo.

  Existen cuatro posibilidades, como se muestra en la figura:

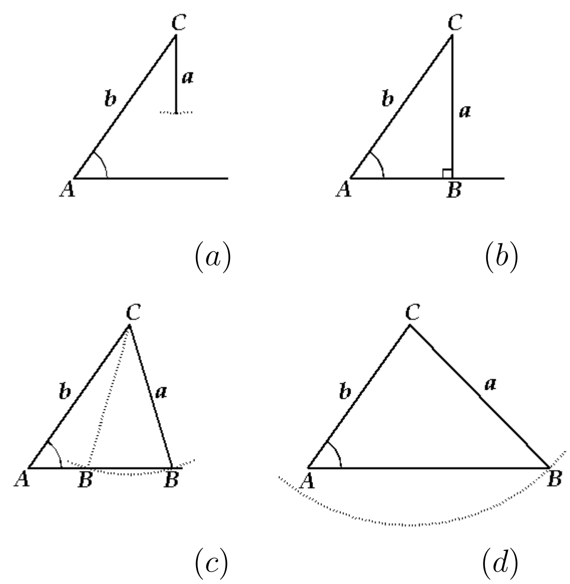


Figura 77.2

En el caso de la Figura 77.2 – (a), no existe un triángulo con las condiciones dadas, porque la longitud del lado a es menor que la requerida para formar un triángulo que las cumpla. En la Figura 77.2 – (b), se obtiene un triángulo rectángulo que se resuelve más facilmente usando el Teorema de Pitágoras y la definición de las funciones trigonométricas. En la Figura 77.2 – (c), existen dos triángulos que cumplen las condiciones y por tanto hay dos soluciones posibles y, en la Figura 77.2 – (d), la solución es única.

Ejemplo 77.1

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$ si $A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$ y $b = 7$.

Solución

Primero, dibujamos un triángulo con la información suministrada (ver figura 77.3). La figura 77.3 es tentativo ya que, aún, no se conocen los otros ángulos.

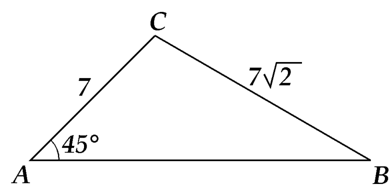


Figura 77.3

Encontremos el ángulo B usando la ley de seno:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}.$$

Luego

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{7 \operatorname{sen} 45°}{7\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Hay dos posibles ángulos B entre 0° y 180° tales que $\operatorname{sen} B = \frac{1}{2}$, $B = 30°$ y $B = 150°$, pero $B = 150°$ no es solución ya que $150° + 45° > 180°$, es decir, no habría espacio para un tercer ángulo.

Luego, $B = 30°$ y, así, $C = 180° - 45° - 30° = 105°$.

Aplicando nuevamente ley de seno, podemos hallar la longitud del lado c :

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

donde

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \frac{7 \operatorname{sen}(105°)}{\operatorname{sen}(30°)} \approx 13.5.$$

Ejemplo 77.2

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$, si $A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

Solución

Como en el ejemplo anterior, hacemos un bosquejo con la información dada (ver figura 77.2).

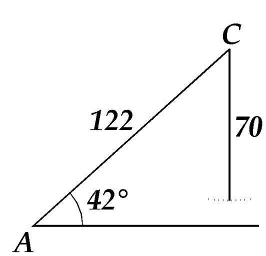


Figura 77.4

Calculemos el ángulo B usando ley de seno:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b},$$

luego

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{122 \operatorname{sen}(42°)}{70} \approx 1.17.$$

Como $\operatorname{sen}\alpha \leq 1$ para todo ángulo α, ya que es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa en un triángulo rectángulo y la longitud de la hipotenusa siempre es mayor que la de cualquiera de los catetos, entonces ningún triángulo satisface las condiciones del problema.

Ejemplo 77.3

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$ si $A = 43.1°$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

Solución

Tracemos un bosquejo del triángulo con los datos del problema (figura 77.5):

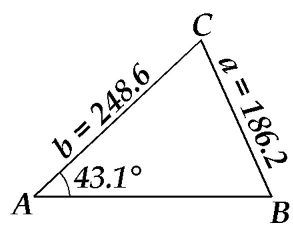


Figura 77.5

Usemos ley de seno para calcular el ángulo B :

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}.$$

Entonces, $\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{248.6 \operatorname{sen}(43.1°)}{186.2} \approx 0.9192.$

Existen dos ángulos que cumplen esta condición,

$$B \approx 65.82° \text{ y } \; B' = 180° - 65.82° \approx 114.18°.$$

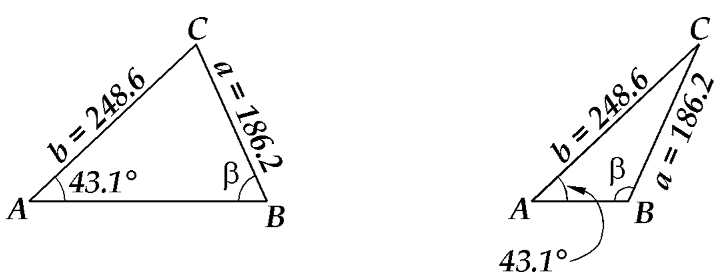


Figura 77.6

Luego los dos triángulos son solución del problema (ver figura 77.6).

Ejemplo 77.4 *Aplicación*

El campanario de la Torre de Pisa en Italia, forma un ángulo de 5.6° con la recta vertical trazada desde la base C de la torre situada en el piso. Una turista se ubica a 105 m de la base C de la torre, en la dirección en la que la torre forma un ángulo agudo con la horizontal. El ángulo de elevación medido por la turista es de 29.2° hasta la parte superior de la torre. Encuentre la longitud de la torre.

Solución

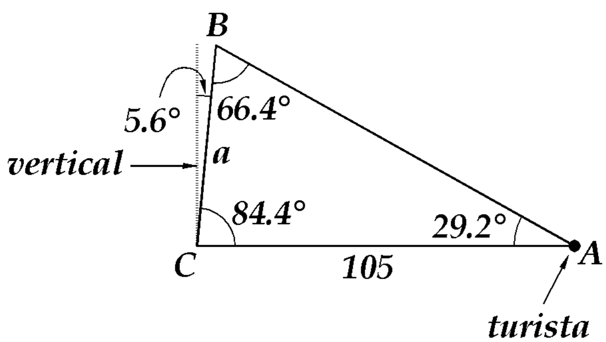


Figura 77.7

Sea a la longitud, en metros, de la Torre. En el triángulo $\triangle ABC$ (figura 77.7):

$C = 90° - 5.6° = 84.4°$, porque 5.6° es el ángulo formado por la torre con la vertical.

$B = 180° - 29.2° - 84.4° = 66.4°$.

Usando la ley de seno tenemos que:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{105},$$
$$a = \frac{105 \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{105 \operatorname{sen}(29.2°)}{\operatorname{sen}(66.4°)} = 55.9 \text{ m}.$$

Luego, la longitud de la torre es aproximadamente 56 m.

Ejercicios

1. Use la ley de seno para resolver los posibles triángulos $\triangle ABC$ que satisfacen las condiciones dadas.

   (a) $a = 30$, $c = 40$, $A = 37°$.

   (b) $b = 73$, $c = 82$, $B = 58°$.

2. Los puntos A y B están separados por un lago. Para hallar la distancia entre ellos un topógrafo localiza un punto C sobre el suelo tal que $\angle CAB = 48.6°$. También mide $\overline{CA}$ como 312 pies y $\overline{CB}$ como 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B.

3. Una antena de radio de onda corta está apoyada por dos cables cuyas longitudes son 165 y 185 pies. Cada alambre está fijo a la parte superior de la antena y anclado al suelo, en dos puntos de anclaje en lados opuestos de la antena. El cable más corto forma un ángulo de $67°$ con el suelo. ¿Qué tan apartados están los puntos de anclaje?

Lección 78

Ley de coseno

Notemos que para resolver el triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, o los tres lados, no podemos usar de manera directa la ley de seno. En estos casos, se aplica la ley de coseno que veremos a continuación.

Ley de coseno

En cualquier triángulo $\triangle ABC$

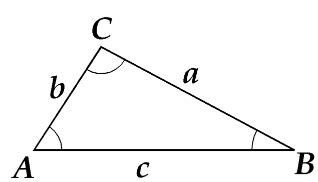


Figura 78.1

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ ,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \ ,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \ .$$

Es decir, en cualquier triángulo, el cuadrado de la longitud de cualquiera de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de la longitud de estos dos lados y del coseno del ángulo entre ellos.

Observación

Si alguno de los ángulos del triángulo es recto, por ejemplo $A = 90°$, entonces $\cos A = 0$ y la ley de coseno es equivalente al Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$.

Ejemplo 78.1

Los lados de un triángulo son $a = 20$, $b = 25$, $c = 22$. Encuentre los ángulos del triángulo.

Solución

Notemos que las medidas de los lados del triángulo satisfacen la desigualdad triangular, esta es, en todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante.

Ahora, hagamos un bosquejo del triángulo

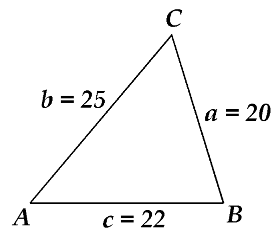


Figura 78.2

Aplicando ley de coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Entonces,

$$\cos A = \frac{(20)^2 - (25)^2 - (22)^2}{-2(25)(22)} \approx 0.644.$$

Luego, $A = 49.87°$.

Similarmente

$$\cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{(25)^2 - (20)^2 - (22)^2}{-2(20)(22)} \approx 0.294.$$

Luego, $B \approx 72.88°$ y

$$\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ac} = \frac{(22)^2 - (20)^2 - (25)^2}{-2(20)(25)} \approx 0.541\,,$$

así, $C \approx 57.25°$.

Ejemplo 78.2 *Aplicación*

Un automóvil viaja por una carretera en dirección Este durante 1 hora, luego viaja durante 30 minutos por otra carretera que se dirige al Noreste. Si el automóvil se desplaza a una velocidad constante de 40 millas/hora, ¿qué tan lejos está de su posición de partida al terminar el recorrido?

Solución

Hagamos un bosquejo de la situación

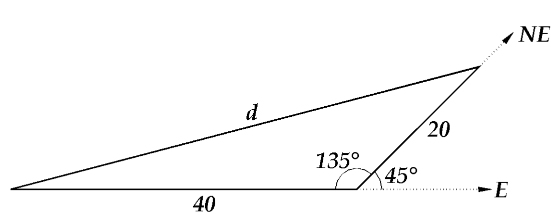


Figura 78.3

Sea d la distancia, en millas, que separa al automóvil del punto de partida. Como:

distancia recorrida hacia el Este = 40 millas/hora $\times$ 1 hora = 40 millas,
distancia recorrida hacia el Noreste = 40 millas/hora $\times \frac{1}{2}$ hora = 20 millas,
entonces, aplicando ley de coseno

$$d^2 = 20^2 + 40^2 - 2\,(20)\,(40)\cos(135^\circ) = 2000 - 1600\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 3131.37$$

$$d \approx \sqrt{3131.37} \approx 55.96.$$

Luego, al cabo de hora y media el automóvil está, aproximadamente, a 55.96 millas de su punto de partida.

Ejemplo 78.3 *Aplicación*

Una torre de 125 pies está instalada en una ladera de una montaña que tiene una inclinación de 32° con la horizontal. Debe colocarse un cable guia desde la parte superior de la torre y anclarse a en un punto a 55 pies ladera abajo de la base de la torre. Determinar cuál es la magnitud más corta de cable que se necesita.

Solución

Hagamos un bosquejo de la situación

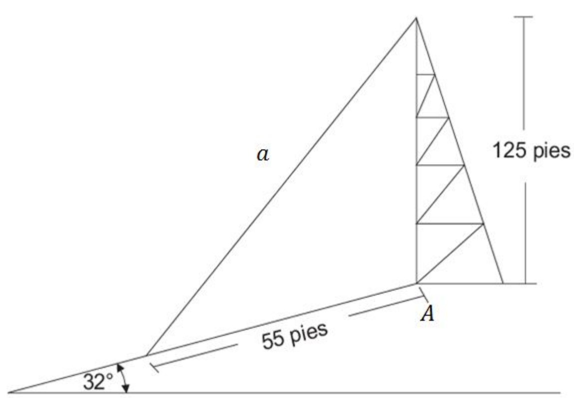


Figura 78.4

Sea a la longitud del cable más corto que se necesita.

Notemos que al trazar una recta paralela a la horizontal en la base de la torre en la figura 78.4 y empleando ángulos alternos internos, el ángulo que forma la torre con la ladera (A) es $90^\circ + 32^\circ = 122^\circ$.

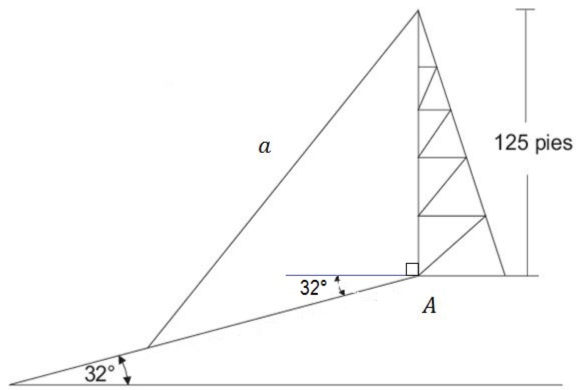


Figura 78.5

Utilizamos la ley de coseno para encontrar la longitud del cable necesario (a):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 55^2 + 125^2 - 2(55)(125)\cos 122° \approx 25936.39$$
$$a \approx 161.05\ .$$

Por lo tanto, la longitud del cable más corto que se necesita es de 161.05 pies.

Ejercicios

1. Use la ley de coseno para resolver los posibles triángulos ABC que satisfacen las condiciones dadas.

   (a) $a = 65$, $c = 50$, $B = 52°$.

   (b) $b = 60$, $c = 30$, $A = 70°$.

2. Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65°, es decir, el ángulo entre ellas es de 65°. Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 p.m., uno viaja a 50 kilómetros/h y el otro a 30 kilómetros/h. ¿Qué tan apartados están los automóviles a las 2:30 p.m.?

3. Un piloto vuela en una trayectoria recta durante 1 hora y 30 minutos. Después hace una corrección del curso, en dirección 10° a la derecha de su curso original y vuela 2 horas en la nueva dirección. Si mantiene una velocidad constante de 625 kilómetros/h, ¿qué tan lejos está de su punto de partida?

Lección 79

Funciones trigonométricas de números reales I

Las funciones trigonométricas se pueden definir de dos maneras diferentes, pero equivalentes: como funciones de ángulos o como funciones de números reales. Hasta el momento las hemos estudiado como funciones de ángulos, ahora haremos la extensión a funciones de números reales, y para ello recordamos dos conceptos iniciales.

Circunferencia unitaria

Es la circunferencia de radio 1, con centro en el origen de coordenadas del plano xy cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Función periódica

Se dice que una función f es p-**periódica**, $p > 0$, si $f(t+p) = f(t)$ para todo $t \in D_f$. El menor de los números p que cumple la condición se llama **período de** f.

Por ejemplo, consideremos la gráfica

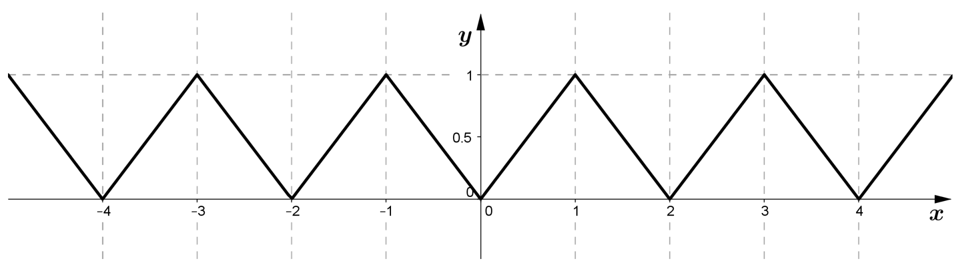


Figura 79.1

Note que la función $|x|$ para $x \in [-1, 1]$ se repite cada 2 unidades en el eje horizontal.

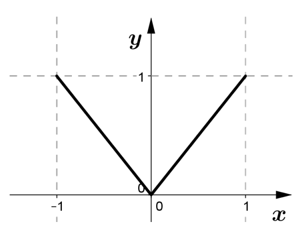


Figura 79.2

Es decir, la función periódica está definida por

$$f(x)=\begin{cases}\quad\vdots & \\ |x+4| & x\in[-5,-3),\\ |x+2| & x\in[-3,-1),\\ |x| & x\in[-1,1),\\ |x-2| & x\in[1,3),\\ |x-4| & x\in[3,5),\\ \quad\vdots & \end{cases}$$

El período de la función es 2.

Si f tiene período p, se dice que **la gráfica** de f en cualquier intervalo de longitud p es un **período completo** de f.

Consideremos la función g, con un período completo dado por

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & x\in[-1,1),\\ x-1 & x\in[1,2).\end{cases}$$

Luego g es 3-periódica y su gráfica es

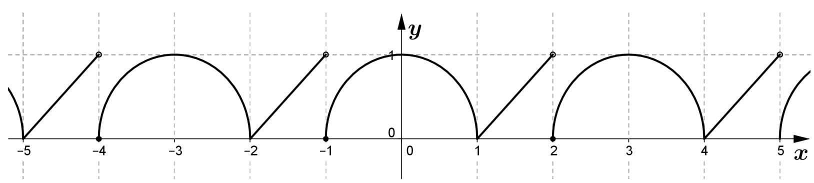


Figura 79.3

Funciones trigonométricas para cualquier número real

En la circunferencia unitaria consideremos un ángulo en posición estándar cuya medida en radianes es t, con $t\in\mathbb{R}$.

Si $P=(x,y)$ es el punto en el que el lado terminal del ángulo t intercepta la circunferencia unitaria, las funciones trigonométricas de t son:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} t=y, && \cos t=x,\\
&\tan t=\frac{y}{x}\ \ (x\neq 0)\,, && \cot t=\frac{x}{y}\ \ (y\neq 0)\,,\\
&\sec t=\frac{1}{x}\ \ (x\neq 0)\,, && \csc t=\frac{1}{y}\ \ (y\neq 0)\,.
\end{aligned}$$

Esta forma de presentar las funciones trigonométricas permite analizar su variación a medida que t cambia, es decir, a medida que $P=(x,y)$ recorre la circunferencia unitaria.

Función seno

Para determinar cómo es la variación de $\operatorname{sen} t$ para $0 \leq t \leq 2\pi$, analizamos cómo cambia la ordenada y del punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, al variar t, ya que $\operatorname{sen} t = y$.

La variación puede resumirse en la siguiente tabla:

t	$y = \operatorname{sen} t$
$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$	$0 \longrightarrow 1$
$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$	$1 \longrightarrow 0$
$\pi \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$	$0 \longrightarrow -1$
$\frac{3\pi}{2} \longrightarrow 2\pi$	$-1 \longrightarrow 0$

Cuando t varía en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$, el punto $P = (x, y)$ recorre nuevamente la circunferencia unitaria de la misma forma como lo hizo en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir,

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t.$$

Si $P = (x, y)$ se mueve en el intervalo $[4\pi, 6\pi]$ y en los siguientes intervalos de longitud 2π, el comportamiento de y es el mismo y, en consecuencia,

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Luego, la función seno es una **función periódica** de período 2π.

Ejercicios

Grafique las siguientes funciones periódicas cuyo período completo esta dado por

1. $g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \in [1, 2), \\ -\dfrac{1}{2} & x \in [2, 4). \end{cases}$
2. $g_2(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in [-3, 0), \\ x + 1 & x \in [0, 2). \end{cases}$
3. $g_3(x) = \begin{cases} |x-2| & x \in [-4, -1), \\ x^3 & x \in [-1, 1). \end{cases}$
4. $g_4(x) = |(x-1)^2 - 1| \quad x \in [-1, 3)$

¿Cuál es el período de cada función?

Lección 80

Funciones trigonométricas de números reales II

Gráfica de la función seno

Para trazar las gráfica de $z = \operatorname{sen} t$, en el plano cartesiano, usamos el eje horizontal para los valores de la variable independiente t y el eje vertical para sus imágenes $z = \operatorname{sen} t$.

Graficamos inicialmente un período completo, y para ello escogemos el intervalo $[0, 2\pi]$.

Aunque la variación de $z = \operatorname{sen} t$ en este intervalo nos dá una idea general de la gráfica, para trazarla con más precisión evaluamos la función $\operatorname{sen} t$ en algunos valores de t y construimos la tabla:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{sen} t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

t	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\operatorname{sen} t$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Con esta información, graficamos el período de la función $\operatorname{sen} t$ correspondiente a $0 \leq t \leq 2\pi$, así:

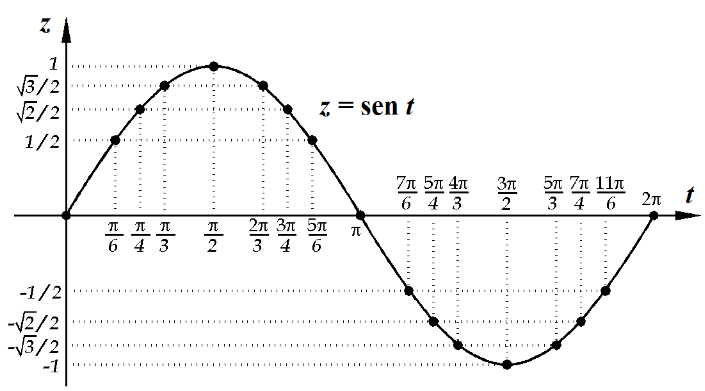


Figura 80.1

Como esta función tiene período 2π, entonces la gráfica (figura 80.1) se repite en cada intervalo sucesivo de longitud 2π a la derecha y a la izquierda de $[0, 2\pi]$, y entonces la gráfica de $z = \operatorname{sen} t$ es:

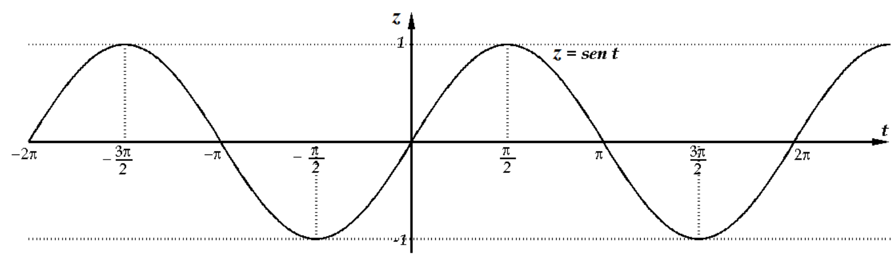


Figura 80.2

Es claro que $D_{sen} = \mathbb{R}$ y $R_{sen} = [-1, 1]$ (ver figura 80.2).

Consideraremos algunas gráficas de trasformaciones de la función seno.

Ejemplo 80.1

Grafique la función $h(x) = |\operatorname{sen} x|$.

Solución

El dominio de h es igual al dominio de la función seno; es decir, $D_h = \mathbb{R}$. Recordemos que la función valor absoluto siempre tiene imagenes positivas, por lo tanto tendremos que $R_h = [0, 1]$ (ver figura 80.3).

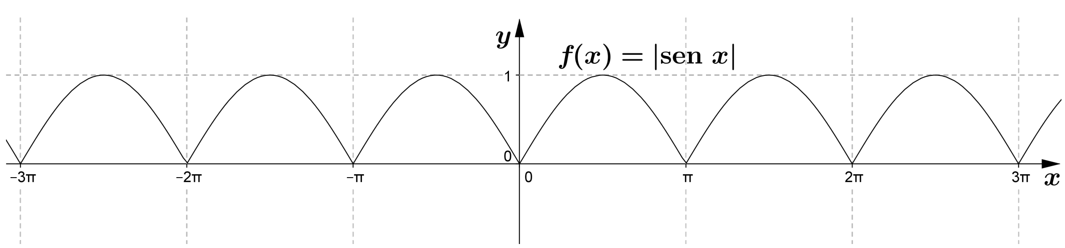


Figura 80.3

Ejemplo 80.2

Halle las gráficas de las funciones $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(2\,x)$.

Solución

El dominio para ambas funciones es el conjunto de los números reales. Para la función f su rango es $[-3, 3]$ y su período sigue siendo 2π.

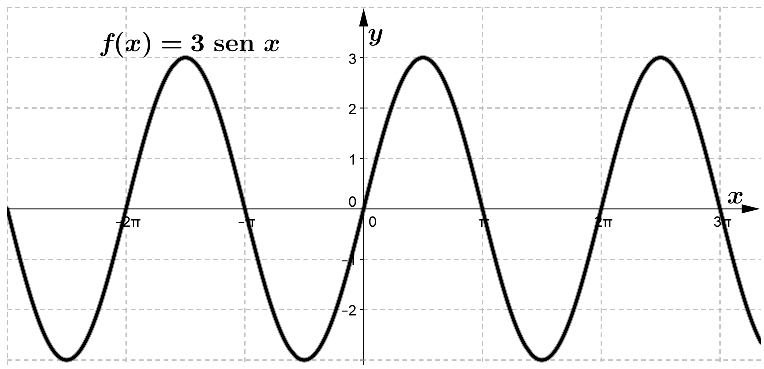


Figura 80.4

En cambio para la función g el rango se conserva. Es decir, el rango es $[-1,1]$. El período de la función $\operatorname{sen}(2\,x)$ se reduce a la mitad. Notemos que

$$
\begin{aligned}
g(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0\,,\\
g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,,\\
g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\pi) = 0\,,\\
g\left(\frac{3\,\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(2\times\frac{3\,\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1\,,\\
g(\pi) &= \operatorname{sen}(2\pi) = 0\,.
\end{aligned}
$$

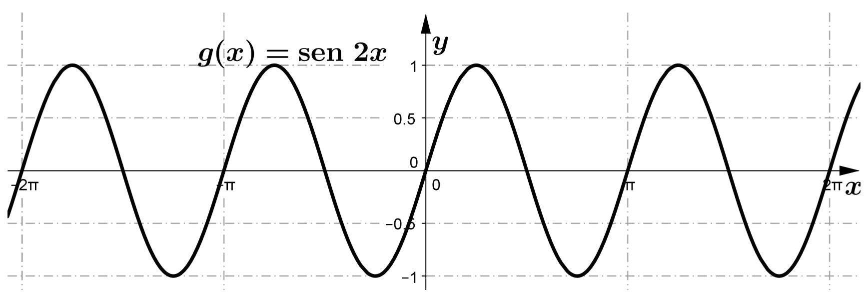


Figura 80.5

Ejercicios

Grafique las siguientes funciones e identifique el dominio y rango de cada una de ellas.

1. $f(x) = 5 + \operatorname{sen}(x)$.
2. $g(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $h(x) = |3\operatorname{sen}(x) - 1|$.
4. $k(x) = 3\operatorname{sen}(-x)$.
5. $q(x) = -1 - \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Lección 81

Funciones trigonométricas de números reales III

Función coseno

De manera similar a como lo hicimos con la función seno, podemos analizar la variación de $\cos t$, estudiando el comportamiento de la abscisa x del punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, cuando t varía, lo cual resumimos en la siguiente tabla:

t	$x = \cos t$
$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$	$1 \longrightarrow 0$
$\dfrac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$	$0 \longrightarrow -1$
$\pi \longrightarrow \dfrac{3\pi}{2}$	$-1 \longrightarrow 0$
$\dfrac{3\pi}{2} \longrightarrow 2\pi$	$0 \longrightarrow 1$

Puede verificarse fácilmente que

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Luego coseno es una función periódica de periodo 2π.

Gráfica de la función coseno

Con base en el análisis anterior, construyendo la tabla de valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, usando el eje horizontal para los valores de la variable t y el eje vertical para sus imágenes $z = \cos t$, y el hecho de que es una función periódica, la gráfica de $z = \cos t$ es:

t	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$
$\cos t$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

t	π	$\dfrac{7\pi}{6}$	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{3}$	$\dfrac{11\pi}{6}$	2π
$\cos t$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1

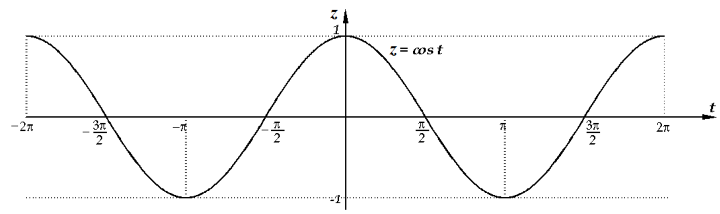


Figura 81.1

De la figura 81.1 es claro que $D_{\cos} = \mathbb{R}$ y $R_{\cos} = [-1, 1]$.

Ejemplo 81.1

Halle las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + 2\cos x$ y $g(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Solución

El dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$. En el caso de la función f hay un cambio en el rango, se afecta un factor de 2 y posteriormente se desplaza 1 unidad hacia arriba; es decir, el rango de f es $[-1, 3]$ (ver figura 81.2).

En la función g el rango aumenta un factor de 3; es decir, $R_g = [-3, 3]$. Su periodo tambien se afecta en un factor de 2 (ver figura 81.2).

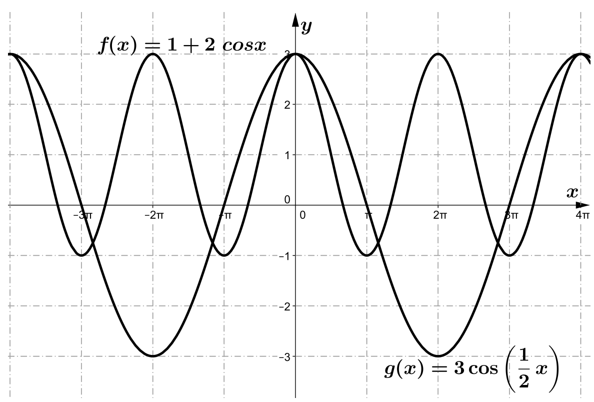


Figura 81.2

Función tangente

¿Cómo cambia la función tangente cuando $P = (x, y)$ se mueve en la circunferencia unitaria?

Como $\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, y $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, a medida que t se acerca a $\dfrac{\pi}{2}$ por la izquierda $\tan t$ toma valores cada vez mayores, lo cual se simboliza: $\tan t \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}^-$. Similarmente, como $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ cuando t se acerca a $-\dfrac{\pi}{2}$, por la derecha, $\tan t$ toma valores cada vez menores. En símbolos: $\tan t \longrightarrow -\infty$ cuando $t \longrightarrow -\dfrac{\pi}{2}^+$.

La función tangente no está definida en $t = -\frac{\pi}{2}$ ni en $t = \frac{\pi}{2}$, de hecho no está definida para $t = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, porque para estos ángulos el coseno es igual a cero.

t	$\tan t$
$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$	$-\infty \to 0$
$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$	$0 \to \infty$
$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$	$-\infty \to 0$
$\pi \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$	$0 \to \infty$
$\frac{3\pi}{2} \longrightarrow 2\pi$	$-\infty \to 0$
$2\pi \to \frac{5\pi}{2}$	$0 \to \infty$

El comportamiento de la función tangente para valores de $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, es el mismo que si $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, y el mismo para $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, y así

$$\tan(t + n\pi) = \tan t,$$

para todo t en el dominio de la tangente, y $n \in \mathbb{Z}$. Luego la función tangente es periódica de período π.

Gráfica de la función tangente

Para trazar la gráfica de $z = \tan t$ usamos el hecho de que es periódica con período π, graficamos el período completo que corresponde al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, y calculamos algunos valores de la función en dicho intervalo.

t	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
$\tan t$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

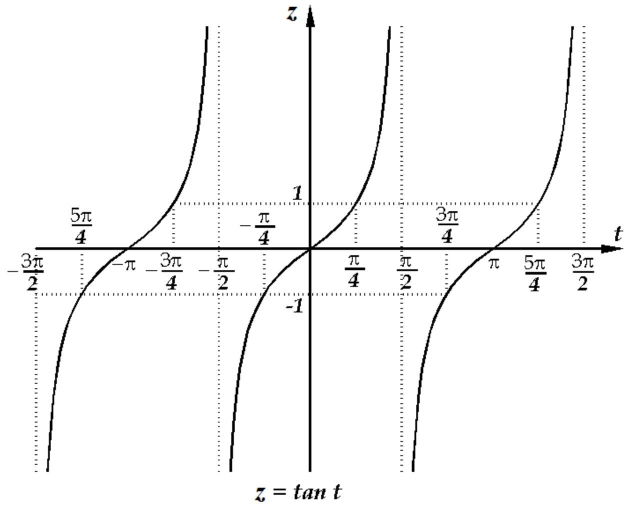


Figura 81.3

Es claro de la figura 81.3 que $D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{t \in \mathbb{R}/t = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ y $R_{\tan} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 81.2

Halle la gráfica de la función $h(x) = |2 + \tan x|$.

Solución

El dominio de la función h es igual al dominio de la función tangente, es decir, $D_h = \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Primero graficamos la función $2 + \tan x$ que se obtiene al trasladar 2 unidades hacia arriba la gráfica de la función tangente.

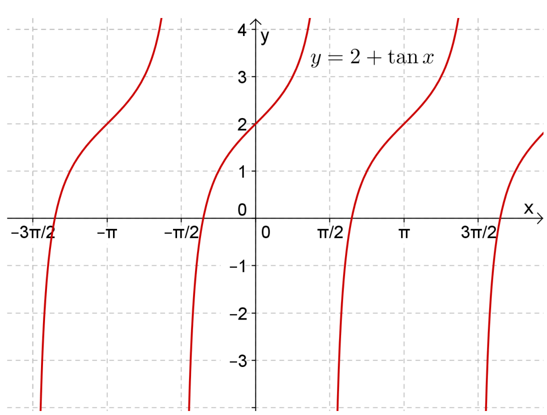


Figura 81.4

Ahora, reflejando con respecto al eje horizontal en la figura 81.4 obtenemos la gráfica de h.

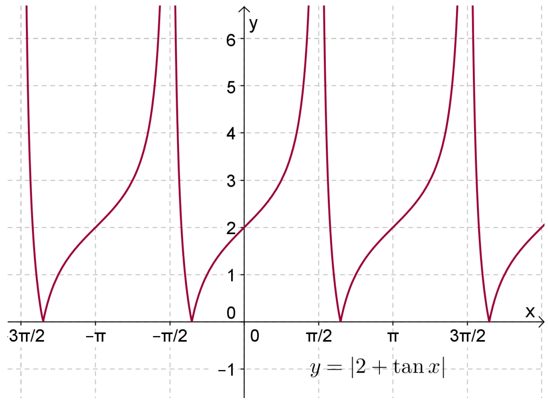


Figura 81.5

Ejercicios

Grafique las siguientes funciones e identifique el dominio y rango de cada una de ellas.

1. $f(x) = 5 + \cos(x)$.
2. $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $h(x) = 3\tan(x) - 1$.
4. $q(x) = -1 - \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Lección 82

Funciones trigonométricas de números reales IV

Gráficas de las otras funciones trigonométricas

Para graficar las otras tres funciones trigonométricas, $z = \cot t$, $z = \sec t$, $z = \csc t$, utilizamos las siguientes relaciones, llamadas **identidades recíprocas,** las cuales se deducen fácilmente a partir de las definiciones:

i) $\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$,

ii) $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$,

iii) $\csc t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$.

Con base en estas identidades, podemos mostrar que los respectivos dominios son:

$$D_{\cot} = D_{\csc} = \mathbb{R} - \{t \in \mathbb{R}/t = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\} \ ,$$
$$D_{\sec} = D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{t \in \mathbb{R}/t = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\} \ .$$

Razonando en forma similar a como lo hicimos con las funciones seno, coseno y tangente tenemos que:

$$\cot(t + n\pi) = \cot t, \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$
$$\sec(t + 2n\pi) = \sec t, \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$
$$\csc(t + 2n\pi) = \csc t, \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

Así, cotangente tiene período π, y secante y cosecante tienen periodo 2π.

Con base en la información anterior y un análisis similar al que se hizo para graficar la función tangente, la gráfica de la función $z = \cot t$ es

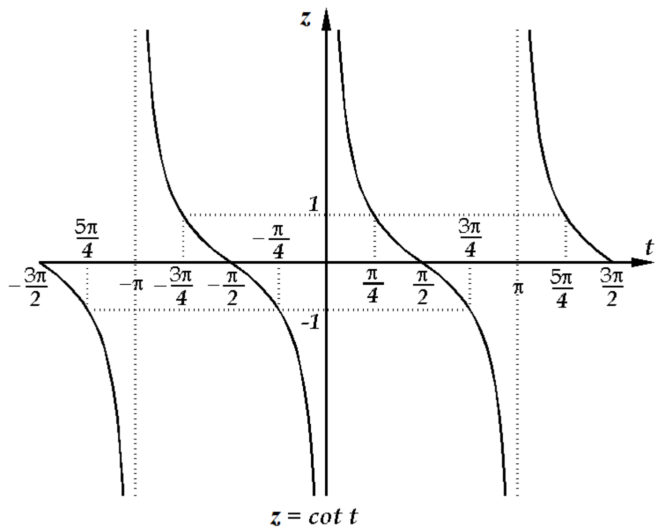


Figura 82.1

Para graficar $z = \sec t$ y $z = \csc t$, usamos los recíprocos de las ordenadas de los puntos de las gráficas de $z = \cos t$ y $z = \operatorname{sen} t$, respectivamente y obtenemos:

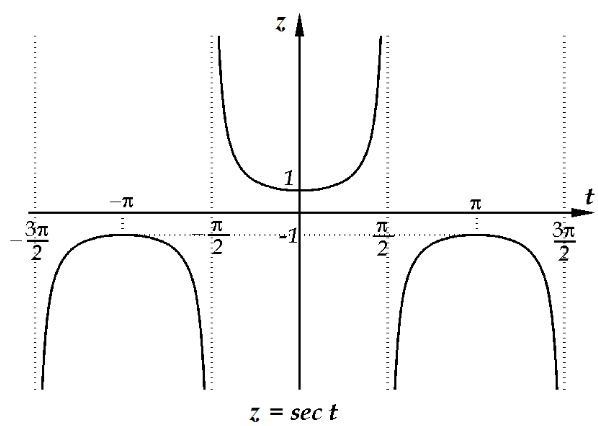


Figura 82.2

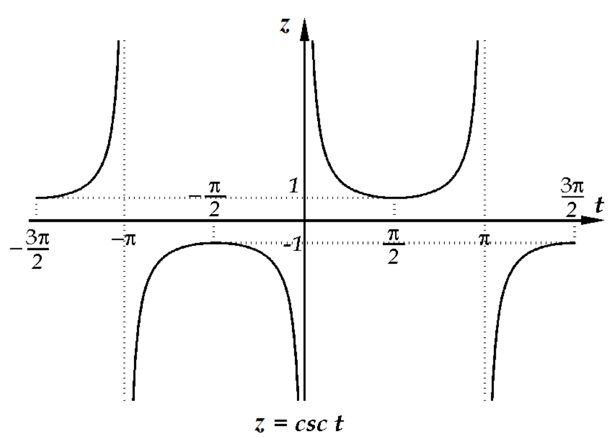


Figura 82.3

Como $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ y $\csc t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$, estas funciones no están definidas en los valores para los cuales $\cos t = 0$ y $\operatorname{sen} t = 0$, respectivamente.

Ejemplo 82.1

Grafique la función $h(x) = |\csc x| - 2$.

Solución

El dominio de h es igual al dominio de la función cosecante (ver figura 82.3); es decir, $D_h = \mathbb{R} - \{t \in \mathbb{R}/x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Para graficar la función h primero graficamos $|\csc x|$ (reflejamos con respecto al eje "t" en la figura 82.3)

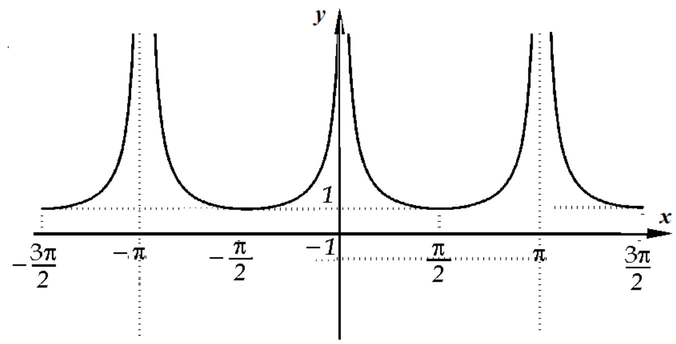


Figura 82.4

y ahora trasladamos esta grafica dos unidades hacia abajo. Notemos que en este caso, el rango de h será $R_h = [-1, \infty)$.

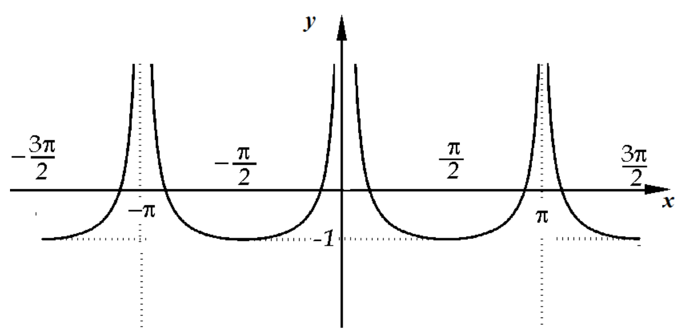


Figura 82.5

Ejercicios

Grafique las siguientes funciones e identifique el dominio y rango de cada una de ellas.

1. $f(x) = 5 + \csc(x)$.
2. $g(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $h(x) = 3\csc(x) - 1$.
4. $k(x) = 3\cot(-x)$.
5. $q(x) = -1 - \sec\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Lección 83

Identidades trigonométricas

Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones que es cierta para todos los valores de las variables para los cuales están definidas las expresiones involucradas en ella.

Ejemplo 83.1

La ecuación $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ es una identidad porque es válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

La ecuación $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x^2-1}$ es una identidad para $x \neq \pm 1$, porque para esos valores están definidas las expresiones de los dos miembros de la igualdad, y además dichas expresiones coinciden.

La ecuación $x^2 - 1 = 0$ no es una identidad, porque sólo es válida para $x = 1$ ó $x = -1$.

Si una identidad contiene expresiones trigonométricas, se denomina **identidad trigonométrica**.

Veremos inicialmente unas identidades trigonométricas básicas, llamadas **identidades trigonométricas fundamentales**, que nos permiten expresar una función trigonométrica en términos de las otras, simplificar expresiones trigonométricas y resolver ecuaciones trigonométricas.

Identidades trigonométricas fundamentales

- **Identidades recíprocas**. Se deducen directamente de la definición de las funciones trigonométricas:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} t &= \frac{1}{\csc t}\,, & \csc t &= \frac{1}{\operatorname{sen} t}\,,\\
\cos t &= \frac{1}{\sec t}\,, & \sec t &= \frac{1}{\cos t}\,,\\
\tan t &= \frac{1}{\cot t}\,, & \cot t &= \frac{1}{\tan t}\,,\\
\tan t &= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\,, & \cot t &= \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\,.
\end{aligned}
$$

- **Identidades Pitagóricas**

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t &= 1 \ , \\ 1 + \tan^2 t &= \sec^2 t \ , \\ 1 + \cot^2 t &= \csc^2 t \ . \end{aligned}$$

Simplificación de expresiones trigonométricas

Para simplificar expresiones trigonométricas utilizamos las mismas técnicas empleadas para simplificar expresiones algebraicas y las identidades trigonométricas fundamentales.

Ejemplo 83.2

Simplifique las siguientes expresiones trigonométricas.

1. $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \ \cos x$.
2. $\dfrac{1 + \cot A}{\csc A}$.
3. $\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} + \dfrac{\cos y}{1 + \operatorname{sen} y}$.

Solución

1. $$\begin{aligned} \cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \ \cos x &= \cos^2 x \ \cos x + \operatorname{sen}^2 x \ \cos x \\ &= \left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \frac{1 + \cot A}{\csc A} &= \frac{1 + \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} A}} \\ &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A + \cos A}{\operatorname{sen} A}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} A}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} A \left(\operatorname{sen} A + \cos A\right)}{\operatorname{sen} A} \\ &= \operatorname{sen} A + \cos A. \end{aligned}$$

Observación: En algunas casos es útil escribir la expresión a simplificar en términos de las funciones seno y coseno, como se hizo en el ejemplo anterior.

3. $$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} + \frac{\cos y}{1 + \operatorname{sen} y} &= \frac{\operatorname{sen} y \left(1 + \operatorname{sen} y\right) + \cos y \cdot \cos y}{\cos y \left(1 + \operatorname{sen} y\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y}{\cos y \left(1 + \operatorname{sen} y\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} y + 1}{\cos y \left(1 + \operatorname{sen} y\right)} = \frac{1}{\cos y} = \sec y. \end{aligned}$$

Demostración de identidades trigonométricas

Además de las identidades trigonométricas fundamentales, hay otras identidades importantes que se usan en otros cursos de matemáticas y de física.

Dada una ecuación, es fácil probar que no es una identidad, hallando al menos un valor de la variable (o variables) para el cual no se satisfaga la ecuación.

Ejemplo 83.3

Demuestre que la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ no es una identidad trigonométrica.

Solución

Para demostrar que, $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ no es una identidad, basta encontrar un valor de x para el cual no se cumpla la ecuación.

Consideremos $x = \dfrac{\pi}{4}$: $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Luego,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Como $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$ no satisface la ecuación, entonces $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ no es una identidad.

¿Cómo probar que una ecuación es una identidad?

Para probar que una ecuación es una identidad trigonométrica, debemos elegir un lado de la ecuación y transformarlo, usando identidades conocidas y operaciones algebraicas, hasta obtener el otro lado de la ecuación.

Algunas sugerencias para realizar este trabajo son:

- Escoger el lado "más complicado" de la ecuación para transformarlo.
- Realizar operaciones algebraicas como sumar o restar fracciones, o expresar una fracción como una suma de fracciones, o factorizar numerador o denominador de una fracción, entre otras.
- Tener en cuenta la expresión del lado de la ecuación al cual se quiere llegar ya que ésta le puede sugerir el paso siguiente.
- En algunos casos, es útil expresar el lado de la ecuación a transformar en términos de seno y coseno, usando las identidades fundamentales.
- En ningún caso está permitido mover términos de un lado de la ecuación al otro.

Otro método para probar que una ecuación es una identidad, es transformar ambos lados por separado hasta obtener en cada lado la misma expresión. En este caso no necesariamente realizamos las mismas operaciones en ambos lados, sino que trabajamos independientemente en cada lado hasta obtener el mismo resultado en ambos lados.

Ejemplo 83.4

Pruebe las siguientes identidades trigonométricas:

1. $\dfrac{1+\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = 1+\cos^2 x$.
2. $2\tan x \sec x = \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$.
3. $\dfrac{1+\cos x}{\cos x} = \dfrac{\tan^2 x}{\sec x - 1}$.

Solución

1. Transformemos el lado izquierdo de la ecuación:

$$\frac{1+\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1+\sec^2 x}{\sec^2 x} = \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = \cos^2 x + 1.$$

   Luego, $\dfrac{1+\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = 1+\cos^2 x$ es una identidad trigonométrica.

2. Escojamos el lado derecho:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\operatorname{sen} x} - \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} &= \frac{1+\operatorname{sen} x - (1-\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} \\ &= \frac{2\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} \\ &= 2\tan x \sec x. \end{aligned}$$

   Luego, la ecuación dada es una identidad trigonométrica.

3. Trabajemos con ambos lados separadamente:

   Lado izquierdo:
$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \sec x + 1.$$

   Lado derecho:

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1} = \frac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\sec x - 1} = \sec x + 1.$$

   Como al transformar cada lado de la ecuación se obtiene la misma expresión, la ecuación dada es una identidad.

Ejercicios

Verifique la identidad.

1. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}=2\csc x$.
2. $\dfrac{\tan x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}=\dfrac{\sec x}{1+\cos x}$.
3. $1-\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x}=\operatorname{sen} x$.
4. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}=2\sec^2 x$.
5. $\sec^2 x\csc^2 x=\sec^2 x+\csc^2 x$.
6. $(\tan x+\cot x)^4=\csc^4 x\sec^4 x$.

Lección 84

Otras identidades trigonométricas I

Existen otras identidades trigonométricas importantes que involucran más de un ángulo o múltiplos de un ángulo.

Fórmulas de adición y sustracción

1. $\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$,

   $\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$,

   $\tan(s+t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$.

2. $\operatorname{sen}(s-t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$,

   $\cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$,

   $\tan(s-t) = \dfrac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$.

Ejemplo 84.1

Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones, sin emplear calculadora:

a. $\cos(20°)\cos(70°) - \operatorname{sen}(20°)\operatorname{sen}(70°)$.

b. $\tan \dfrac{7\pi}{12}$.

Solución

a. $\cos(20°)\cos(70°) - \operatorname{sen}(20°)\operatorname{sen}(70°) = \cos(20° + 70°) = \cos(90°) = 0$.

b. $\tan \dfrac{7\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{3\pi}{12} + \dfrac{4\pi}{12}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1 - 1\,\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

Ejemplo 84.2

Demuestre las siguientes identidades trigonométricas:

1. $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$.

2. $1 - \tan x \tan y = \dfrac{\cos(x+y)}{\cos x \cos y}$.

Solución

1. Transformemos el izquierdo:

$$\begin{aligned}
\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\
&= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x} \\
&= \frac{1}{0\ \cos x + 1\ \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x.
\end{aligned}$$

2. Transformemos el lado derecho:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+y)}{\cos x \cos y} &= \frac{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y} \\
&= \frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y} \\
&= 1 - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y} \\
&= 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\ \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \\
&= 1 - \tan x \tan y.
\end{aligned}$$

Expresiones de la forma $A \operatorname{sen} x + B \cos x$

Las expresiones de la forma $A \operatorname{sen} x + B \cos x$ siempre pueden escribirse en la forma $k \operatorname{sen}(x+\phi)$ ó $k\cos(x+\phi)$. Veamos:

Ejemplo 84.3

Exprese $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ en la forma $k\cos(x+\phi)$.

Solución

$$\begin{aligned}
k\cos(x+\phi) &= k\left[\cos x \cos\phi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\phi\right] \\
&= k\cos x\cos\phi - k\operatorname{sen} x\operatorname{sen}\phi \\
&= (-k\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen} x + (k\cos\phi)\cos x.
\end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad es necesario que

$$-k\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2} \text{ y que } k\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones:

$$k^2 \operatorname{sen}^2\phi = \frac{1}{4} \text{ y } k^2 \cos^2 \phi = \frac{3}{4}.$$

Ahora, sumando:

$$\begin{aligned}
k^2 \operatorname{sen}^2\phi + k^2 \cos^2 \phi &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \ , \\
k^2 \left(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2 \phi\right) &= \frac{4}{4} = 1 \ , \\
k^2 \ 1 &= 1 \ , \\
k &= 1.
\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
-k \operatorname{sen} \phi &= \frac{1}{2} \ , \\
-1 \operatorname{sen} \phi &= \frac{1}{2} \ , \\
\operatorname{sen} \phi &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
k \cos \phi &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \\
1 \cos \phi &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \\
\cos \phi &= \frac{\sqrt{3}}{2} \ .
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} \phi < 0$ y $\cos \phi > 0$, ϕ se encuentra en el IV cuadrante. Por lo tanto, $\phi = -\frac{\pi}{6}$.

Así,

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \cos \left(x + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

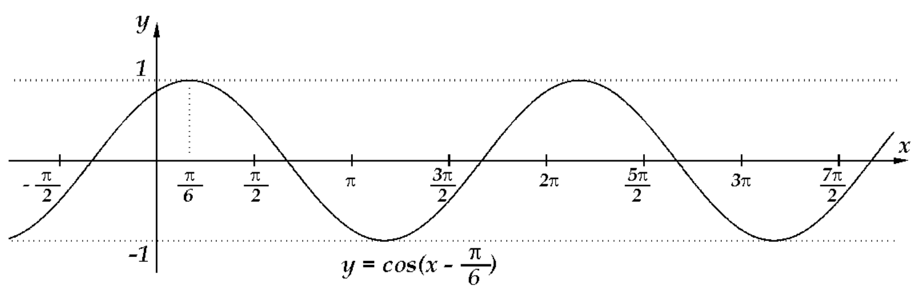


Figura 84.1

Ejercicios

1. Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones sin usar calculadora.

   (a) $\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{18}+\tan\dfrac{\pi}{9}}{1-\tan\dfrac{\pi}{18}\tan\dfrac{\pi}{9}}$.

   (b) $\operatorname{sen} 75^\circ$.

   (c) $\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}$.

2. Escriba la función $5\left(\operatorname{sen} 2x-\cos 2x\right)$ sólo en términos de coseno.

3. Escriba la función $3\operatorname{sen}\pi x+3\sqrt{3}\cos\pi x$ sólo en términos de seno.

4. Verifique la identidad.

   (a) $\cos\left(x+y\right)\cos\left(x-y\right)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 y$.

   (b) $\dfrac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}\left(3x\right)+\operatorname{sen}\left(5x\right)}{\cos x+\cos\left(3x\right)+\cos\left(5x\right)}=\tan\left(3x\right)$.

Lección 85

Otras identidades trigonométricas II

Fórmulas para el ángulo doble

A partir de las fórmulas de adición y sustracción, es fácil probar las siguientes fórmulas para el ángulo doble:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \ , \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \ , \\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \ . \end{aligned}$$

Ejemplo 85.1

Pruebe las siguientes identidades:

1. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.
2. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Solución

1. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$,

   $\cos 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x$,

   $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$,

   $2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$,

   $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

2. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$,

   $\cos 2x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$,

   $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$,

   $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Fórmulas para el semiángulo o ángulo medio

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{u}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}\,,\\
\cos\frac{u}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}\,,\\
\tan\frac{u}{2} &= \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} \text{ ó, } \tan\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}\,.
\end{aligned}$$

En las dos primeras fórmulas la elección del signo + ó − depende del cuadrante en el que se encuentre $\frac{u}{2}$.

Las demostraciones de estas fórmulas se obtienen a partir de los resultados del ejemplo anterior, haciendo $x = \frac{u}{2}$.

En efecto, usando el resultado del numeral 2. del ejemplo anterior, haciendo $x = \frac{u}{2}$, tenemos:

$$\operatorname{sen}^2\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{2}\,.$$

Luego

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}\,.$$

Ejemplo 85.2

Calcule el valor exacto de $\cos 22.5°$.

Solución

$$\cos(22.5°) = \cos\left(\frac{45°}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}\,.$$

Como 22.5° está en el primer cuadrante, elegimos el signo +:

$$\cos(22.5°) = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Ejemplo 85.3

Calcule $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ a partir de la información proporcionada.

1. $\cos\theta = -\frac{4}{5}, \quad 180° < \theta < 270°.$
2. $\cot\theta = 5, \quad 180° < \theta < 270°.$

Solución

1. $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$, $180° < \theta < 270°$.

   Como $180° < \theta < 270°$, entonces $90° < \dfrac{\theta}{2} < 135°$, luego $\dfrac{\theta}{2}$ está en el segundo cuadrante. Hallamos las funciones trigonométricas para el ángulo medio:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\dfrac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\dfrac{4}{5}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{\dfrac{1}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ ,$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}} = -3\ .$$

2. $\cot\theta = 5$, $180° < \theta < 270°$.

   Como $180° < \theta < °$, entonces $90° < \dfrac{\theta}{2} < 135°$, luego $\dfrac{\theta}{2}$ está en el segundo cuadrante.

   Considerando el punto $(x, y) = (-5, -1)$, ubicado en el tercer cuadrante, como se muestra en la figura:

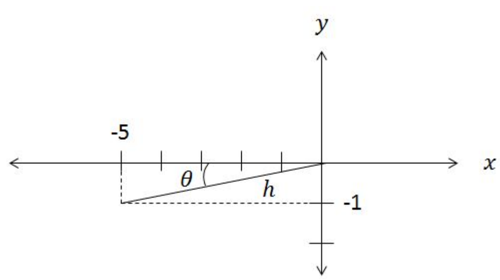


Figura 85.1

Podemos hallar h por teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}\ ,$$
$$h = \sqrt{25+1}\ ,$$
$$h = \sqrt{26}\ .$$

Entonces,

$$\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{26}}.$$

Hallamos entonces las funciones trigonométricas del ángulo medio:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{26}+5}{\sqrt{26}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2\sqrt{26}}}\ ,$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{26}-5}{\sqrt{26}}}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2\sqrt{26}}}\ ,$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{2\sqrt{26}}}}{-\sqrt{\frac{\sqrt{26}-5}{2\sqrt{26}}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{26}+5}{\sqrt{26}-5}}\ .$$

Ejercicios

1. Pruebe las siguientes identidades:
   (a) $\dfrac{1+\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}2x} = 1+\dfrac{1}{2}\sec x\csc x$.
   (b) $\cot 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$.
   (c) $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}$.
   (d) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\tan^2 x = \dfrac{\sec^2 x}{\sec 2x}$.
2. Calcule $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$, $\cos\dfrac{\theta}{2}$ y $\tan\dfrac{\theta}{2}$ si se sabe que $\tan\theta = 1$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Lección 86

Ecuaciones trigonométricas I

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en términos de expresiones trigonométricas, para la cual las variables o incógnitas representan números reales, que son la medida en radianes de ángulos.

Resolver una ecuación trigonométrica es hallar el ángulo, o los ángulos que satisfacen la ecuación.

Para resolver una ecuación trigonométrica usamos las operaciones algebraicas y las identidades trigonométricas para escribir, en términos de una función trigonométrica, y a un lado del signo igual, todas las expresiones trigonométricas, y luego encontramos los ángulos que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 86.1

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\csc^2 x - 4 = 0 \ .$$

Solución

$$(\csc x + 2)(\csc x - 2) = 0 \ ,$$

$$\csc x + 2 = 0 \quad \text{ó} \quad \csc x - 2 = 0 \ ,$$

$$\csc x = -2 \quad \text{ó} \quad \csc x = 2 \ ,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = -2 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2 \ ,$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \ .$$

Hallemos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir, los ángulos en dicho intervalo que satisfacen estas ecuaciones:

- $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ si $x = \frac{7\pi}{6}$ ó $x = \frac{11\pi}{6}$.

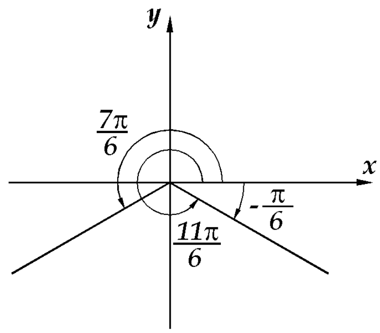


Figura 86.1

- $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ si $x = \dfrac{\pi}{6}$ ó $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

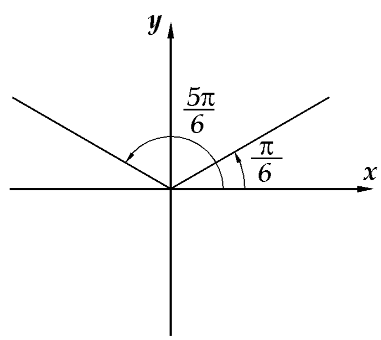


Figura 86.2

Luego, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$, $x = \dfrac{7\pi}{6}$ y $x = \dfrac{11\pi}{6}$ son las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Como la función seno es periódica, de período 2π, todas las soluciones en $\mathbb{R}$ se obtienen sumando múltiplos enteros de 2π a las soluciones halladas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Así,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

son las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 86.2

Resuelva la siguiente ecuación:

$$2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \ .$$

Solución

$$\begin{aligned} 2\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)+\operatorname{sen} x &= 1\ ,\\ 2-2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x &= 1\ ,\\ 2\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x-1 &= 0\ ,\\ \operatorname{sen} x &= \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}\ ,\\ \operatorname{sen} x &= \frac{1\pm 3}{4}\ . \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} x=\frac{4}{4}=1 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\ .$$

$$\operatorname{sen} x=1 \text{ si } x=\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x=-\frac{1}{2} \text{ si } x=\frac{7\pi}{6} \text{ ó } x=\frac{11\pi}{6}\ .$$

Con base en la periodicidad de la función seno, las soluciones en $\mathbb{R}$ de la ecuación son:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ , \quad x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad \text{y} \quad x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Ejemplo 86.3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2\operatorname{sen} 3x-1=0\ .$$

Solución

$$\operatorname{sen} 3x=\frac{1}{2}\ ,$$

$$3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{ó} \quad 3x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}\ .$$

Luego, todas las soluciones en $\mathbb{R}$ de la ecuación son de la forma:

$$x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} \text{ y } x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Ejemplo 86.4

Halle los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\cos x+1=\operatorname{sen} x\ .$$

Solución

$$\begin{aligned} (\cos x+1)^2 &= \operatorname{sen}^2 x\ ,\\ \cos^2 x+2\cos x+1 &= \operatorname{sen}^2 x\ ,\\ \cos^2 x+2\cos x+1 &= 1-\cos^2 x\ ,\\ 2\cos^2 x+2\cos x &= 0\ ,\\ 2\cos x\,(\cos x+1) &= 0\ . \end{aligned}$$

$$2\cos x = 0 \quad \text{ó} \quad \cos x + 1 = 0 \ ,$$
$$\cos x = 0 \quad \text{ó} \quad \cos x = -1 \ ,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ , \quad x = \pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ahora, como en el procedimiento para resolver la ecuación elevamos al cuadrado, debemos determinar cuáles de estos valores de x satisfacen la ecuación original.

- Si $x = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 0 + 1 = 1$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

  Por lo tanto $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ es solución de la ecuación original.

- Si $x = \frac{3\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2} + 1 = 0 + 1 = 1$ y $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$.

  Por lo tanto $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ no es solución de la ecuación original.

- Si $x = \pi$, $\cos\pi + 1 = -1 + 1 = 0$ y $\operatorname{sen}\pi = 0$.

  Por lo tanto $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ es solución de la ecuación original.

Luego, las soluciones de la ecuación original son

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ejemplo 86.5

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos 5x - \cos 7x = 0 \ .$$

Solución

Escribiendo $5x = 6x - x$ y $7x = 6x + x$ en la ecuación, obtenemos que

$$\begin{aligned} \cos(6x - x) - \cos(6x + x) &= 0 \ , \\ \cos 6x \cos x + \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} x - \cos 6x \cos x + \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} x &= 0 \ , \\ 2 \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} x &= 0 \ . \end{aligned}$$

Luego

$$\operatorname{sen} 6x = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x = 0 \ .$$
$$6x = k\pi \quad \text{ó} \quad x = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Entonces,

$$x = \frac{k\pi}{6} \quad \text{y} \quad x = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

son las soluciones de la ecuación original.

Ejercicios

Determine las soluciones de las ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi)$.

1. $\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$.
2. $2 \tan^2 x + \sec^2 x = 2$.
3. $3 \csc^2 x = 4$.
4. $2 \cos^2 x - 1 = 0$.
5. $(\tan x - 1)(4 \operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$.

Lección 87

Ecuaciones trigonométricas II

Ejemplos adicionales

Ejemplo 87.1

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \ .$$

Solución

Despejamos $\cos x$ de la ecuación:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos x =& 1 \ , \\ \cos x =& \frac{1}{\sqrt{2}} \ . \end{aligned}$$

Sabemos que en $[0, 2\pi)$ la función coseno toma el valor $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ en dos valores:

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \frac{7\pi}{4} \ .$$

Ahora, como la función coseno es 2π periódica, entonces todas las soluciones de la ecuación están dadas por

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ejemplo 87.2

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$\tan x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0 \ .$$

Solución

Podemos tomar factor común $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x(\tan x + 1) = 0 \ .$$

Por lo tanto
$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{ó} \quad \tan x + 1 = 0 \ .$$
Es decir
$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{ó} \quad \tan x = -1 \ .$$

La función seno es cero en los múltiplos de π. Luego
$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ ,$$
y la función tangente es -1 sólo en $-\dfrac{\pi}{4}$ en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Entonces teniendo en cuenta su periodicidad (con periodo π) se sigue que
$$x = -\frac{\pi}{4} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \ .$$

Ejemplo 87.3

Resuelva la ecuación trigonométrica
$$2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \ .$$

Solución

Si definimos $z = \operatorname{sen} x$ obtenemos la ecuación de segundo grado
$$2z^2 - z - 1 = 0 \ ,$$
la cual se puede factorizar como
$$(2z+1)(z-1) = 0 \ .$$
Por lo tanto, retomando la ecuación trigonométrica, se tiene que
$$(2\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \ .$$
Luego
$$2\operatorname{sen} x + 1 = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x - 1 = 0 \ .$$
Es decir
$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x = 1.$$
Teniendo en cuenta que la función seno es 2π periódica, hallemos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$ si $x = \dfrac{7\pi}{6}$ y si $x = \dfrac{11\pi}{6}$ y $\operatorname{sen} x = 1$ si $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación trigonométrica son
$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ejemplo 87.4

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$\cos(3x) = \text{sen}(3x) \ .$$

Solución

Equivalentemente podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(3x)}{\cos(3x)} &= 1 \ , \\ \tan(3x) &= 1 \ . \end{aligned}$$

Observemos que la función $\tan(3x)$ es una compresión horizontal en un factor de 3 de la función $\tan x$ y como la función $\tan x$ es periódica, con período π, entonces la función $\tan(3x)$ es periódica, con período $\dfrac{\pi}{3}$.

Hallemos entonces las soluciones de la ecuación en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$:

$\tan(3x) = 1$ si $3x = \dfrac{\pi}{4}$. Es decir, si $x = \dfrac{\pi}{12}$. De esta forma, todas las soluciones de la ecuación están dadas por

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ejemplo 87.5

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$3\tan^3 x - 3\tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \ .$$

Solución

Podemos factorizar:

$$\begin{aligned} 3\tan^2 x(\tan x - 1) - (\tan x - 1) &= 0 \ , \\ (3\tan^2 x - 1)(\tan x - 1) &= 0 \ , \\ (\sqrt{3}\tan x + 1)(\sqrt{3}\tan x + 1)(\tan x - 1) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{3}\tan x + 1 = 0, \quad \sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad \tan x - 1 = 0 \ .$$

Es decir

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{ó} \quad \tan x = 1 \ .$$

Puesto que la función tangente es periódica, con período π, hallemos las soluciones en el intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ si $x = -\dfrac{\pi}{6}$, $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ si $x = \dfrac{\pi}{6}$ y $\tan x = 1$ si $x = \dfrac{\pi}{4}$. Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación están dadas por

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ejercicios

Resuelva las ecuaciones trigonométricas.

1. $\tan 3x + 1 = \sec 3x$.
2. $\operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen} x + 3$.
3. $2 \sec x = \tan x + \cot x$.
4. $\csc x + \cot x = \sqrt{3}$.
5. $\cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1$.

Lección 88

Ecuaciones trigonométricas III

Ejemplos adicionales

Ejemplo 88.1

Solucione la ecuación trigonométrica

$$\sec x - \tan x = \cos x \ .$$

Solución

Escribamos la ecuación en términos de las funciones seno y coseno y simplifiquemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \cos x &= 0 \ , \\ \frac{1 - \operatorname{sen} x - \cos^2 x}{\cos x} &= 0 \ . \end{aligned}$$

La fracción del lado izquierdo de la igualdad es cero cuando su numerador sea cero. Luego

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{sen} x - \cos^2 x &= 0 \ , \\ 1 - \operatorname{sen} x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) &= 0 \ , \\ \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x &= 0 \ , \\ \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Entonces

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x - 1 = 0 \ .$$

Es decir

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x = 1 \ .$$

Debido a que la función seno es 2π periódica hallemos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$\operatorname{sen} x = 0$ si $x = 0$ y si $x = \pi$ y $\operatorname{sen} x = 1$ si $x = \dfrac{\pi}{2}$. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación están dadas por

$$x = 0 + 2k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

O, equivalentemente

$$x = k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Ejemplo 88.2

Solucione la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(3x) = \cos(4x)\ .$$

Solución

Observemos que

$$\operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}(4x + x) = \operatorname{sen}(4x)\cos x + \operatorname{sen} x \cos(4x)\ ,$$

y además que

$$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(4x - x) = \operatorname{sen}(4x)\cos x - \operatorname{sen} x \cos(4x)\ .$$

Por lo tanto, la ecuación trigonométrica es equivalente a

$$\operatorname{sen}(4x)\cos x + \operatorname{sen} x \cos(4x) - [\operatorname{sen}(4x)\cos x - \operatorname{sen} x \cos(4x)] = \cos(4x)\ ,$$

y simplificando

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen} x \cos(4x) &= \cos(4x)\ , \\ 2\operatorname{sen} x \cos(4x) - \cos(4x) &= 0\ , \\ \cos(4x)(2\operatorname{sen} x - 1) &= 0\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\cos(4x) = 0 \quad \text{ó} \quad 2\operatorname{sen} x - 1 = 0\ .$$

Es decir

$$\cos(4x) = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\ .$$

Observemos que la función $\cos(4x)$ es una compresión horizontal de la función $\cos x$ en un factor de 4. Por lo tanto, como $\cos x$ es 2π periódica, se tiene que $\cos(4x)$ es periódica, con período $\frac{\pi}{2}$. Examinemos entonces $\cos(4x) = 0$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$\cos(4x) = 0$ si $4x = \dfrac{\pi}{2}$ y si $4x = \dfrac{3\pi}{2}$. Es decir, si $x = \dfrac{\pi}{8}$ y si $x = \dfrac{3\pi}{8}$.

Luego $\cos(4x) = 0$ para

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\ .$$

Ahora, teniendo en cuenta que la función seno es 2π periódica, analicemos $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ en $[0, 2\pi)$:

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ si $x = \dfrac{\pi}{6}$ y si $x = \dfrac{5\pi}{6}$. Luego $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ para

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\ .$$

Por lo tanto, las respectivas soluciones de la ecuación trigonométrica son

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\ , \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\ , \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\ .$$

Ejemplo 88.3

Encuentre todas las soluciones de la siguiente ecuación trigonométrica en el intervalo $[0,\ 2\pi)$:

$$\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0\ .$$

Solución

En primer lugar, factorizamos completamente la ecuación:

$$\begin{aligned} \left(\tan^2 x - 9\right)\left(\tan^2 x - 4\right) &= 0\ , \\ (\tan x + 3)(\tan x - 3)(\tan x + 2)(\tan x - 2) &= 0\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tan x = -3 \quad \text{ó} \quad \tan x = 3 \quad \text{ó} \quad \tan x = -2 \text{ ó } \tan x = 2\ .$$

Ahora, con una calculadora en modo radianes, al aplicar la función o tecla $\tan^{-1}$ obtenemos valores de x en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

- $\tan x = -3$ si $x = -1.249$.

  Sin embargo $-1.249 \notin [0,\ 2\pi)$, entonces, como la función tangente es periódica, con período π, sumamos π:

  $$-1.249 + \pi = 1.8926 \in [0, 2\pi)\ .$$

Si sumamos nuevamente π

$$1.8926 + \pi = 5.0342 \in [0, 2\pi)\ .$$

- $\tan x = 3$ si $x = 1.249 \in [0,\ 2\pi)$. Sumando π

  $$1.249 + \pi = 4.391 \in [0, 2\pi)\ .$$

- $\tan x = -2$ si $x = -1.1071$.

  Sin embargo $-1.1071 \notin [0,\ 2\pi)$, entonces, como la función tangente es periódica, con período π, sumamos π:

  $$-1.1071 + \pi = 2.0345 \in [0, 2\pi)\ .$$

  Sumando nuevamente π

  $$2.0345 + \pi = 5.1761 \in [0, 2\pi)\ .$$

- $\tan x = 2 : x = 1.1071 \in [0,\, 2\pi)$. Sumando π

$$1.1071 + \pi = 4.2487 \in [0, 2\pi)\ .$$

De esta forma, las únicas 8 soluciones de la ecuación trigonométrica en el intervalo $[0,\, 2\pi)$ son:

$$\begin{aligned} &x = 1.8926\ , \quad x = 5.0342\ , \quad x = 1.249\ , \quad x = 4.391, \\ &x = 2.0345\ , \quad x = 5.1761\ , \quad x = 1.1071 \quad \text{y} \quad x = 4.2487. \end{aligned}$$

Ejercicios

Resuelva las ecuaciones trigonométricas.

1. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$.
2. $2 \tan x \operatorname{sen} x - \tan x = 0$.
3. $\tan \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0$.
4. $\cos 2x + \cos 3x = 0$.
5. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 3x$.
6. $\cos x \cos 2x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = \dfrac{1}{2}$.

Lección 89

Introducción al concepto de límite I

En estas dos últimas sesiones introducimos de manera intuitiva el concepto de límite de una función, enunciamos una definición que, si bien no es rigurosa, es adecuada para el nivel de cálculo; y enunciamos algunas propiedades algebraicas de límites. Comencemos considerando el siguiente ejemplo.

Ejemplo 89.1

Consideremos la función $f(x) = x^2 + 1$. Tratemos de entender cómo se comportan los valores $f(x)$ cuando x se "acerca a 2. Para esto, usando una calculadora podemos escribir la siguiente tabla

x	$f(x) = x^2 + 1$
1	2
1.5	3.25
1.9	4.61
1.99	4.9601
1.999	4.996001
1.9999	4.99960001

Observamos que al tomar valores de la variable independiente x menores que 2 y "más y más" cercanos a 2, los valores $f(x)$ se acercan "más y más" a 5. Podemos también escribir la siguiente tabla

x	$f(x) = x^2 + 1$
3	10
2.5	7.25
2.1	5.41
2.01	5.0401
2.001	5.004001
2.0001	5.00040001

Ahora observamos que al tomar valores de la variable independiente x mayores que 2 y "más y más" cercanos a 2, los valores $f(x)$ se acercan "más y más" a 5. Intuitivamente podemos confirmar este hecho si consideramos la gráfica $y = f(x)$:

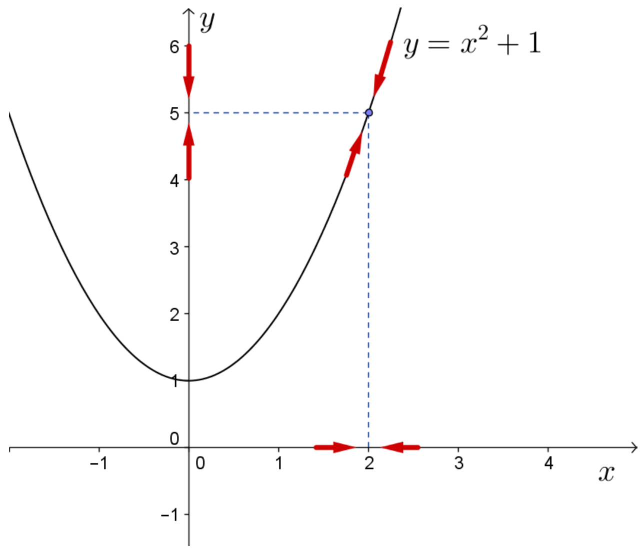


Figura 89.1

Tracemos un pequeño segmento horizontal sobre el eje x apuntando hacia el valor $x = 2$ desde el lado derecho. Al observar las "alturas" sobre dicho segmento (es decir, los valores $f(x)$), notamos que éstas se acercan a 5. Análogamente ocurre si trazamos el segmento desde el lado izquierdo de 2.

Ejemplo 89.2

Consideremos ahora la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$. Observemos que el dominio de esta función es el conjunto

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty).$$

No se puede evaluar la función f en $x = 3$ pero se puede evaluar en abscisas x cercanos a 3. Tratemos de entender el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando x está cerca de 3. Usando una calculadora obtenemos la siguiente tabla de valores

x	$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$
2	3
2.5	3.5
2.9	3.9
2.99	3.99
2.999	3.999
2.9999	3.9999

Nuevamente observamos que los valores de $f(x)$ se acercan a 4 cuando los valores de x se acercan a 3 y son menores que 3. Se puede verificar el mismo hecho tomando argumentos x cercanos a 3 y mayores que 3. Gráficamente podemos confirmar este comportamiento de la función f si procedemos como en el ejemplo anterior:

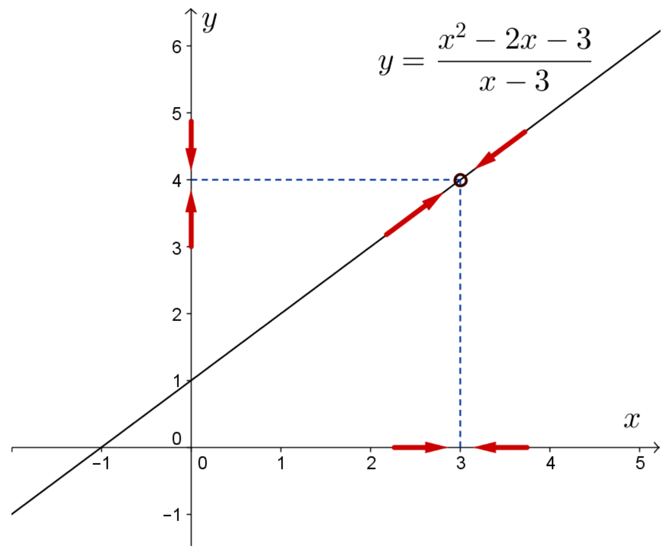


Figura 89.2

Recordemos que en este caso, f no está definida en $x = 3$.

Los dos ejemplos anteriores ilustran el concepto de límite que definimos a continuación.

Definición de límite

Supongamos que $x_0 \in (a, b)$ y que $f : (a, b) - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que está definida en el conjunto $(a, b) - \{x_0\}$. Consideremos los valores $f(x)$ para x cerca de x_0. Si cuando x se acerca a x_0 los valores $f(x)$ se acercan a un único $L \in \mathbb{R}$, escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

y decimos que L **es el límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0.

En el Ejemplo 89.1 ocurre que

$$\lim_{x \to 2}(x^2 + 1) = 5$$

y en el ejemplo Ejemplo 89.2 se tiene que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = 4.$$

Observación

Es importante enfatizar el hecho de que en la definición de límite **no se requiere** que la función f esté definida en $x = x_0$. Es decir, la función puede estar o puede no estar definida en $x = x_0$. En el caso del ejemplo 1 la función $f(x) = x^2 + 1$ está definida en $x = 2$, en tanto que en el ejemplo 2, la función $f(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x - 3)$ no está definida en $x = 3$.

También es importante aclarar que, en el caso en que f está definida en x_0, el valor $f(x_0)$ **no es** necesariamente igual a $\lim_{x \to x_0} f(x)$. El valor de $\lim_{x \to x_0} f(x)$, en caso de existir, indica cuál es el comportamiento de los valores de f **"cerca" de** x_0 **y no en** x_0.

Lección 90

Introducción al concepto de límite II

A partir de la definición precisa de límite, que se puede hallar en los textos de análisis matemático, se pueden probar las siguientes propiedades de límites.

Teorema 1

Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$. Entonces

i) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$.

ii) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$.

iii) Si $L_2 \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

iv) $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cL_1$.

v) $\lim_{x \to x_0} c = c$.

vi) $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Estas propiedades permiten calcular límites de expresiones racionales como se ilustra a continuación a través de varios ejemplos. En ellos usaremos las técnicas de factorización antes vistas.

Ejemplo 90.1

Calcule

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + 1).$$

Solución

Por las propiedades i), v) y vi)

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + 1) = \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 1 = 1 + 1 = 2.$$

Ejemplo 90.2

Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 7}{x^2}.$$

Solución

En este caso podemos aplicar la propiedad iii) de límites, pues $\lim_{x\to 1} x^2 = 1 \neq 0$. Luego

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-7}{x^2} = \frac{1^2+4\cdot 1-7}{1^2} = \frac{5-7}{1} = -2.$$

Ejemplo 90.3

Calcule

$$\lim_{x\to -1} (x+2)(x^2+3x).$$

Solución

Por las propiedades i), ii), iv), v) y vi)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} (x+2)(x^2+3x) &= \left(\lim_{x\to -1} (x+2)\right) \cdot \left(\lim_{x\to -1} x^2+3x\right) \\
&= \left(\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 2\right) \cdot \left(\lim_{x\to -1} x^2 + \lim_{x\to -1} 3x\right) \\
&= (-1+2)(1+3(-1)) \\
&= 1\cdot(-2) = -2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 90.4

Usemos las propiedades de límites para calcular

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$$

del ejemplo 89.2 de la Lección anterior. Si se intenta aplicar la propiedad iii), notamos que la condición de que el límite del denominador sea diferente de cero no se cumple pues, usando las propiedades i), v) y vi),

$$\lim_{x\to 3}(x-3) = \lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 3 = 3-3 = 0.$$

Por esta razón, debemos emplear algún procedimiento que permita el uso de las propiedades de límites. En este caso, factorizamos el numerador como

$$x^2-2x-3 = (x-3)(x+1),$$

y aplicamos las propiedades i), v) y vi) para obtener

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+1) = 4.$$

Ejemplo 90.5

Calcule

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}.$$

Solución

Nuevamente observamos que $\lim_{h\to 0} h = 0$, así que no podemos aplicar directamente la propiedad iii) en este caso. A fin de tratar de cancelar h en el denominador, factoricemos el numerador:

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \frac{[(x+h)-x][(x+h)+x]}{h}\\ &= \frac{h[(x+h)+x]}{h}\\ &= 2x+h.\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Ejercicios

1. Usando una calculadora, escriba una tabla de valores para intuir cuál debería ser

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}.$$

   A continuación compute dicho límite mediante un procedimiento algebraico. ¿Puede esbozar una gráfica que ilustre el resultado?

2. Calcule
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -5}\frac{x+5}{\frac{1}{x}+\frac{1}{5}}$.
   (b) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{(x+a)^3-x^3}{a}$.
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$.
   (d) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{(a-x)^3+x^3}{a}$.
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-x-6}$.
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 36}\frac{x-36}{\sqrt{x}-6}$.

Lección 91

Respuestas a ejercicios seleccionados

Lección 1

2. (a) 55°.
   (b) 145°.
   (c) 35°.
3. 50°.

Lección 2

3. $x = 20^\circ$ y $y = 30^\circ$.
4. $x = 5^\circ$ y $y = 65^\circ$.
5. $x = 110^\circ$ y $y = 40^\circ$.

Lección 3

1. $y = 150^\circ$.
2. $x = 40^\circ$ y $y = 30^\circ$.
3. $x = 50^\circ$ y $y = 95^\circ$.
4. $x = 50^\circ$ y $y = 130^\circ$.

Lección 4

1. $x = 48^\circ$ y $y = 12^\circ$.
3. $x = 11$.
4. $x = 13$.

Lección 5

2. $\overline{CD} = 24$.
3. $x = 32$.
4. $x = 5$ m.
5. $x = 100$ m.
6. 500 m y 700 m.

7. 25 unidades.

Lección 6

1. 25 cm^2.
2. 169 m^2.
3. 14π cm.
4. $\dfrac{9\pi + 144}{2}$ m^2.

Lección 7

1. $(2\pi - 4)L^2$.
3. 3π cm^2.
4. $\dfrac{70 - 9\pi}{2}$ cm^2.
5. 32π cm^2.

Lección 8

1. $\left(\dfrac{2\sqrt{3} - \pi}{8}\right) L^2$.
2. $\dfrac{a}{8 - 4\sqrt{2}}$.
4. 100 km.
5. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} l^2$.

Lección 9

1. $V = 16\pi$ cm^3 y $A = 36\pi$ cm^2.
2. $V = \dfrac{256}{3}\pi$ cm^3.
3. $V = \dfrac{175}{3}$ m^3.
4. $V = 200\pi$ cm^3 y $A = 130\pi$ cm^2.

Lección 10

2. 250π cm^3.
3. $3375\sqrt{3}$ cm^3.
4. $\dfrac{3375\sqrt{3}}{8}$ cm^3 y $\dfrac{23625\sqrt{3}}{8}$ cm^3.
5. 36π cm^3.

Lección 11

1. (a) $\dfrac{518}{99}$.

   (b) $\dfrac{62}{45}$.

   (c) $\dfrac{1057}{495}$.

   (d) $\dfrac{29}{45}$.

2. $1.3\overline{9}$, $1.4\overline{3}$ y $1.44\overline{2}$.

3. $\dfrac{9}{7}$, $1.4\overline{3}$ y $\dfrac{8}{5}$.

4. No, ya que por ejemplo $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ y $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, y 2 y 0 no son números irracionales.

Lección 12

2. (a) $5x - 5y$.

   (b) $-3a - 24b$.

   (c) $12kl - 24ml + 42kn$.

3. (a) 26.

   (b) 1.

   (c) 16.

4. (a) $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$,

   (b) $1386 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$,

   (c) $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$.

5. (a) $\dfrac{126}{90} = \dfrac{7}{5}$,

   (b) $\dfrac{1540}{1680} = \dfrac{11}{12}$.

Lección 13

1. (a) 9.

   (b) $\dfrac{52}{25}$.

   (c) $\dfrac{168}{55}$.

   (d) $\dfrac{3}{2}$.

2. (a) $\dfrac{3}{2}$.

   (b) 1.

   (c) $\dfrac{167}{2520}$.

3. (a) $x > 0$.

   (b) $a \geq \pi$.

   (c) $t < 4$.

   (d) $-5 < x < \dfrac{1}{3}$.

Lección 14

1. (a) C.

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 4\}$

2. (a) $C \cup \{7, 8, 9\}$.

   (b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   (c) $\{8, 9\}$.

Lección 15

1. (a) $\{0\}$.

   (b) $\{-3, -2, -1\}$.

   (c) $\{7\}$.

   (d) $\{-3, -2, -1\}$.

   (e) $\{0, 8, 9\}$.

2. (a) $[A - (B \cup C)] \cup [(B \cap C) - A]$.

   (b) $A' - (B \cap C)$.

   (c) $(A \cup B \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]'$.

   (d) $(A \cup B \cup C)' \cup [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$.

3. (b) 18.

   (c) 0.

   (d) 37.

Lección 16

3. (a) $(-\infty, -3) \cup [1, \infty)$.

   (b) $(0, 4)$.

(c) $[-5,-1)$

(d) $(-\infty,-2]\cap[3,\infty)=\emptyset$.

4. (a) 4.

(b) $\dfrac{18}{35}$.

(c) 19

(d) 0.8.

Lección 17

1. (a) $\dfrac{4a^4c^6}{b^{12}}$.

(b) $\dfrac{x^3y^{15}}{z^3}$.

(c) $\dfrac{d^7}{c^6}$.

(d) $\dfrac{3c^7}{4a^3}$.

3. $\dfrac{3^2\cdot 7^3}{2^5\cdot 5^5}$.

Lección 18

1. (a) x^8.

(b) $\dfrac{a^{9/2}x}{b^{10}y^{19/3}}$.

(c) $\dfrac{16x^{4/3}}{y^2z^{2/3}}$.

(d) $\dfrac{y^{8/3}}{z^2}$.

Lección 19

2. $T(x)S(x)=\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{17}{2}x^2+20$, $S(x)S(x)-3Q(x)=\dfrac{1}{4}x^4-3x^3+13x^2-18x+22$.

Lección 20

1. Cociente: x^2-1, Residuo: 0.

2. Cociente: $-x^{n+3}+x^{n+2}+2x^{n+1}-x^n+x^n+\cdots+x+1$, Residuo: 1.

Lección 21

1. $(x+1)\left(5x^2-5x+3\right)-2$.

2. $(x-1)^2+2$.

3. $(x+1)\left(x^2-4x+6\right)$.

Lección 22

1. (a) 2.
   (b) -8.
   (c) 13.
   (d) 2981.
   (e) -1.
3. (a) No.
   (b) Si.
   (c) Si.

Lección 24

1. (a) $-1, 2$.
   (b) $\frac{1}{2}$.
   (c) 1.
2. $k = 5$.
3. (a) $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15 = (2x-1)(x+5)(x-3)$.
   (b) $6x^3 - 11x^2 - 4x + 4 = (x-2)(3x+2)(2x-1)$.
   (c) $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = (3x+1)(x-2)(x+1)$.
   (d) $3x^3 + 2x^2 + 14x - 5 = (3x-1)(x^2+x+5)$.
   (e) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 6 = (x+2)(2x^2+x+3)$.
   (f) $x^4 - 6x^2 - 7x - 6 = (x-3)(x+2)\left(x^2+x+1\right)$.
   (g) $5x^4 + 15x^3 - 49x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)(5x^2+1)$.

Lección 25

2. $x^4 - y^4$.
3. $a^9 + b^9$.
4. x.
5. $a + b$.
6. h.

Lección 26

1. $a^2(a+1)^2$.

2. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$.

3. $5x^2y^3\left(2x^2-3y\right)^2$.

4. $(2u^2+v^3)(2u^2-v^3)(16u^8+4u^4v^6+v^{12})$.

5. $\left(\sqrt{3}w+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}w-\sqrt{5}\right)$.

6. $a^2b^3\left(5a-4b^2\right)^2$.

7. $(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$.

8. $(2X^n+Y^n)\left(4X^{2n}-2X^nY^n+Y^{2n}\right)(2X^n-Y^n)\left(4X^{2n}+2X^nY^n+Y^{2n}\right)$.

9. $2x^3(x-6)(x-3)$.

10. $y^4(y+2)^3(y+1)^2$.

Lección 27

1. $(x-4)(5x+2)$.

3. $(u-11)(u+7)$,

4. $9(x-5)(x+1)$.

5. $(a+b+3)(2a+2b-1)$.

6. $(a+3)(a-1)(a+1)^2$.

7. $(x+20)(x-13)$.

8. $(9x-11)(5x+8)$.

Lección 28

2. $\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}(y+x+1)(y-x-1)$.

4. $\sqrt{x^2+2}\left(x^2+x+2\right)^2$.

5. $(3a+4b)(3a-4b-1)$.

6. $(2x-5)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

9. $(2x+3y)(5a-7b)$.

Lección 30

1. $(y^2+2)(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(y^2+1)(y+1)(y-1)$.

2. $x^3(x+\sqrt[6]{2})(x^2-\sqrt[6]{2}x+\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[6]{2})(x^2+\sqrt[6]{2}x+\sqrt[3]{2})(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.

3. $(y^2-\sqrt{2}y+1)(y^2+\sqrt{2}y+1)$.

4. $(x^4-\sqrt{6}x^2y+3y^2)(x^4+\sqrt{6}x^2y+3y^2)$.

5. $(x^4-6x^2+8)(x^4+6x^2+8)$.

6. $(7x-5)(9x+2)$,
7. $(x-y-4)(x-y+3)$.
8. $(a+b-1)(a^2-ab+b^2)$.
9. $(a-b)(a-b-1)(a-b+1)$.
10. $(x^4-2y^4-2x^2y^2)(x^4-2y^4+2x^2y^2))$.
11. $(x-w-y-z)(x-w+y+z)$.
12. $(x-y)(a+b-1)$.
13. $\left(x-\dfrac{1}{5}\right)\left(x+\dfrac{3}{5}\right)$.

Lección 31

2. $\dfrac{100!}{20!80!}$.
3. 10 posibles elecciones.

Lección 32

1. -9306276.

Lección 33

1. $x^{7/2}+\dfrac{7}{2}x^3y^2+\dfrac{21}{4}x^{5/2}y^4+\dfrac{35}{8}x^2y^6$
$+\dfrac{35}{16}x^{3/2}y^8+\dfrac{21}{32}xy^{10}+\dfrac{7}{64}x^{1/2}y^{12}+\dfrac{1}{128}y^{14}$.
2. $a^{10}+5a^8b^2+10a^6b^4+10a^4b^6+5a^2b^8+b^{10}$.

Lección 34

2. $a(a+b)$.

Lección 35

2. $ab-(a-b)$.

Lección 37

1. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.
2. $\dfrac{1}{(a-b)(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.

Lección 38

1. (a) 12.
   (b) -70.
   (c) $-3/4$.
2. $101, 103, 105, 107$.

3. 5 horas.

Lección 39

1. (a) $x = -4,\ x = 3$

   (b) $x = 5/2,\ x = -3/2$.

2. $x = -1 \pm \sqrt{6}$.

Lección 40

1. (a) $x = 3,\ x = -1$.

   (b) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$.

2. (a) $D = 5$, dos soluciones.

   (b) $D = 24$, dos soluciones.

   (c) $D = -51$, ninguna solución real.

Lección 41

1. $x = 1 \pm \sqrt{3}$.
2. $t = 9,\ t = 4$.
3. $x = \sqrt[3]{3},\ x = -1$.
4. $x = 9,\ x = 4$.
5. $x = 5/4,\ x = 9/2$.
6. $x = 3$.

Lección 42

1. $p(x) = 60x - x^2$.
2. $a(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 50}{8}$.
3. $A(b) = b\sqrt{4 - b}$.

Lección 43

1. $V(r) = 4\pi r^3$.
2. $C(r) = 400\pi r^2 + \dfrac{12000}{r}$.
3. $h(r) = \dfrac{300}{\pi r^2}$.

Lección 44

1. $V(x) = \dfrac{x^3}{2}$.

2. $V(r) = \dfrac{1}{3}\pi r^2(5 + \sqrt{25 - r^2})$.

Lección 45

1. $(1, 5]$.
2. $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$.
3. $(-1, 4]$.
4. $\left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{21}{2}\right]$.

Lección 46

1. $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$.
2. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$.
3. $[-3, 2)$.
4. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Lección 47

1. $\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right) \cup (3, \infty)$.
2. $[-2, -1) \cup (0, 1]$.
3. $(-\infty, -2] \cup (0, 1) \cup [3, \infty)$
4. $(1, \infty)$.

Lección 48

1. $\left[-1, \dfrac{9}{5}\right]$.
2. $(-\infty, -9] \cup [7, \infty)$.
3. $\left[-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right]$.
4. $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{3}{10}, \infty\right)$.

Lección 49

1. (a) $\dfrac{16}{(a+8+h)(a+8)}$.

   (b) $\dfrac{2a+h}{\sqrt{(a+h)^2+1} + \sqrt{a^2+1}}$.

2. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}/\ x \neq -9,\ x \neq 0 \text{ y } \ x \neq 9\}$.

   (b) $D_g = (-2, 0] \cup (7, \infty)$.

Lección 50

3. (a) No.
   (b) Si.
   (c) No.
1. $d(P, Q) = d(Q, R) = 5$.

Lección 51

1. $y = -x + 2$.
2. $y = x - 1$.
3. $y = -\dfrac{2}{3}x + 6$.
4. $y = -2x + \dfrac{1}{3}$.

Lección 52

1. $x = 14/5,\ y = -1/5$.
2. No tiene solución.
3. No tiene solución.
4. $(x, y(x)) = \left(x, \dfrac{1+7x}{3}\right)$.
5. $(x, y(x)) = \left(x, \dfrac{12+3x}{15}\right)$.

Lección 53

1. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 17$.
2. $(x+1/2)^2 + (x+1)^2 = 25$.
3. $x^2 + y^2 = 4$.

Lección 59

1. (a) $f(x) = -3(x-2)^2 + 17$.
   (c) $f(2) = 17$.
2. 25 metros.

Lección 60

1. Par.
2. Impar.
3. Ninguna.
4. Impar

Lección 61

1. $D_{f\pm g} = D_{fg} = D_{f/g} = (-\infty, 0]$.
2. $D_{f\pm g} = D_{fg} = D_{f/g} = [-3, -2] \cup [2, 3]$.
3. $D_{f\pm g} = D_{fg} = \mathbb{R} - \{-1\}, D_{f/g} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.
4. $D_{f\pm g} = D_{fg} = ([-3, -2] \cup [2, 3]) - \{5/2\}$.
5. $D_{f\pm g} = D_{fg} = [-8, \infty) - \{-1, 1\}, \quad D_{f/g} = [-8, \infty) - \left\{-1, 1, \dfrac{5}{3}\right\}$.

Lección 64

1. Si.
2. No.
3. Si.
4. No.
5. Si.

Lección 65

2. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+2}{1-x}$

   (b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{5-x}{4}}$.

   (c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2 - \sqrt[5]{x}}$.
3. $f^{-1}(x) = \sqrt{16 - x}$ y $D_{f^{-1}} = (-\infty, 16]$.
4. (a) Si.

   (b) $D_{f^{-1}} = [-6, -2) \cup [1, 6]$.

Lección 66

1. (b) Si.

   (d) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} + 1 & \text{si} \quad x < 2, \\ \sqrt{x-2} + 1 & \text{si} \quad x \geq 2. \end{cases}$
2. (b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{si} \quad x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Lección 67

3. $C = 6$ y $a = \dfrac{1}{3}$.

Lección 68

2. (b) Aproximadamente $16,435$ conejos.

Lección 69

3. (a) $D_f = (1, \infty)$ y $R_f = \mathbb{R}$.
   (b) $D_g = (0, \infty)$ y $R_g = [0, \infty)$.
   (c) $D_h = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y $R_h = \mathbb{R}$.
4. (a) $D_f = (-3, \infty)$.
   (b) $D_g = (-2, 5)$.
   (c) $D_h = [3, 5) \cup (5, 9)$.

Lección 70

2. (a) 17.
   (b) 1/4.
   (c) π^2.
   (d) $-1/2$.
   (e) 3/2.
   (f) 2.
   (g) -2.
   (h) 1000.
3. (a) $\log_3 (x + 4)$.
   (b) $\ln \left(\dfrac{a - b}{c} \right)$.
   (c) $\log \left[\dfrac{(x^2 - 25)^2}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \right]$.
   (d) $\log_5 \left[\dfrac{x^2 + x}{(x^2 + 5)^3} \right]$.
5. $(f \circ g)(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x - 3}$ y $D_{f \circ g} = (2, 3) \cup (3, \infty)$.

Lección 71

2. (a) $x = \dfrac{\ln 5 + 1}{9}$.
   (b) $x = -1$.
   (c) $x = \dfrac{2 \ln 7 + \ln 3}{\ln 7 - \ln 3}$.
   (d) $x = \ln 3$.
   (e) $x = \log_2 3$.

(f) $x = \ln(2/3)$.

(g) $x = 2/3$ ó $x = \dfrac{\log_2 10}{3}$.

(h) $x = 625$.

(i) $x = e^8 - 1$.

(j) $x = 5/4$.

(k) $x = 3$.

(l) $x = e^{-2}$ ó $x = e^2$.

3. $t = \dfrac{\ln 5}{0.023} \approx 69.98$ días.

Lección 72

1. (a) $\dfrac{3\pi}{10}$.

   (b) $-\dfrac{5\pi}{12}$.

   (c) $\dfrac{220.5\pi}{180}$.

2. (a) 210°.

   (b) -270°.

   (c) -195°.

3. (a) -546°.

   (b) 1345°.

4. (a) π.

   (b) $\dfrac{\pi}{2}$.

5. (a) 20°.

   (b) 79°.

   (c) $\dfrac{\pi}{7}$.

Lección 74

1. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2. $-\sqrt{3}$.

3. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lección 75

1. 9.03 m^2.
2. 9.2613 m^2.

Lección 76

1. 13.5 metros.
2. 38.66°.
3. 2.9699 metros.
4. 25.359 metros.

Lección 77

2. 678.512 pies.
3. 170.095 pies.

Lección 78

2. Aproximadamente 23.0876 kilómetros.
3. 2179.3461 kilómetros.

Lección 84

1. (a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

   (b) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.

   (c) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$.

2. $5\sqrt{2}\,\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$
3. $6\,\operatorname{sen}\left(\pi x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Lección 85

2. $$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$
   $$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$
   $$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Lección 86

1. $x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}$.
2. $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$.
3. $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$.
4. $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$.
5. $x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}$.

Lección 87

1. $x = \dfrac{2\pi k}{3}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
2. $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
3. $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
4. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
5. $x = 0$ y $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Lección 88

1. $x = 0$ y $x = (2k+1)\pi,\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
2. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
3. $x = 2\pi k,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
4. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{5} + 2\pi k,\ x = \dfrac{3\pi}{5} + 2\pi k,\ x = \dfrac{7\pi}{5} + 2\pi k,\ x = \dfrac{9\pi}{5} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
5. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.
6. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Lección 90

2. (a) -25.
   (b) $3x^2$.
   (c) 0.
   (d) $-3x^2$.

(e) $\dfrac{108}{5}$.

(f) 12.

Bibliografía

[AO] C. Allendoerfer, C. Oakley, *Matemáticas universitarias*, cuarta edición, Editorial McGraw-Hill, 1990.

[B] A. Baldor, *Geometría plana y del espacio, con una introducción a la Trigonometría*, Ediciones y distribuciones Códice, S. A., Madrid, 1967.

[LH] R. Larson, R. Hostetler, *Algebra and Trigonometry*, fifth edition, Houghton Mifflin Company, New York, 2001.

[L] L. Leithold, *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Editorial Harla, S.A., México, 1994.

[S] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson, *Precálculo, Matemáticas para el Cálculo*, quinta edición, Editorial Cengage Learning, 2007.

[SL] M. Sullivan, *Álgebra y Trigonometría*, séptima edición, Editorial Pearson Educación, S.A., México, 2006.

[SC] E. Swokowski, J. Cole, *Álgebra y trigonometría*, novena edición, International Thomson editores, 1997.

[WG] P. Wisniewski, A. Gutiérrez, *Introducción a las matemáticas universitarias*, Serie Schaum, Editorial McGraw-Hill, 2003.

[ZD] D. Zill, J. Dewar, *Precálculo*, cuarta edición, Editorial McGraw-Hill, 2008.

Índice