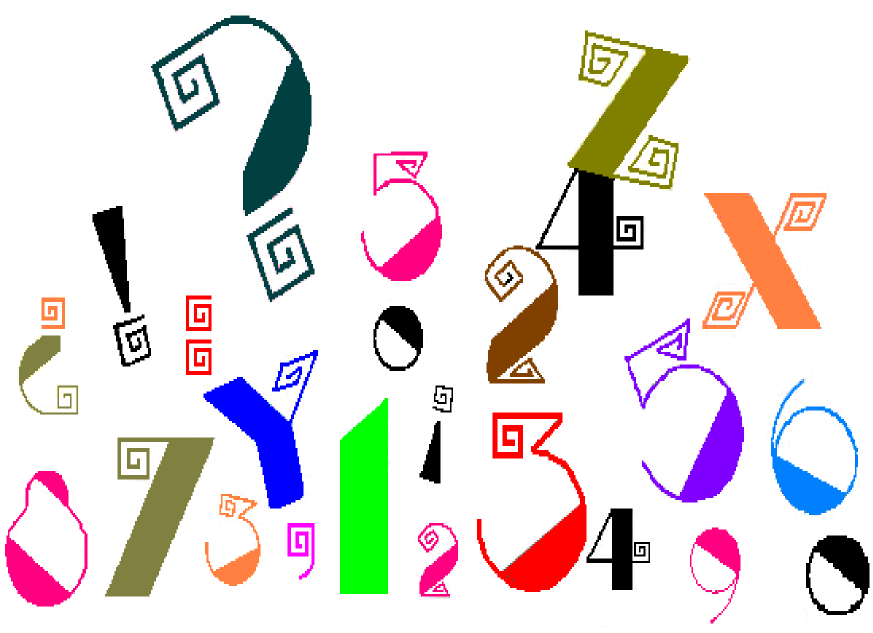
COLECCIÓN ESTUDIOS
DIVULGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

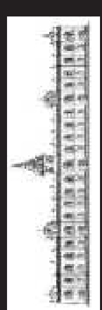
2014

Problemas y Soluciones

JOSÉ HEBER NIETO SAID y RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA



ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS,
MATEMÁTICAS Y Y NATURALES



José Heber Nieto Said. Venezolano de origen uruguayo, es egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires, M.Sc. en Matemática y Dr. H.C. por la Universidad del Zulia (LUZ). Es profesor titular emérito de LUZ, donde fue Director del Departamento de Matemática y Computación, profesor de casi todas las materias dictadas por ese Departamento, proyectista de la Licenciatura en Computación y editor de revistas científicas. Ha escrito varios libros y artículos sobre diversos aspectos de la matemática. Es miembro de varias asociaciones académicas y profesionales (AMV, AVCM, MAA, AMS y CMS). En las olimpiadas matemáticas venezolanas ha participado desde hace más de quince años como entrenador, jefe o tutor de delegaciones, jurado y apoyo académico.

Rafael Sánchez Lamoneda. Venezolano. Profesor Titular de la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV. Egresado del Instituto Pedagógico de Caracas, M.Sc. en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar y PhD en Matemáticas de Brandeis University, Massachusetts, USA. Ha escrito varios artículos sobre Algebra en revistas internacionales. Fue Jefe del Departamento de Matemáticas del Ivic y miembro de la Comisión de postgrado de ese Instituto y de la Escuela de Matemáticas de la UCV. Premio Erdös 2010, otorgado por la World Federation for National Mathematical Competitions. Premio al mejor trabajo en el área de Matemáticas otorgado por el Conicit en el año 1993. Ha trabajado en las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela desde 1978, ha sido jefe o tutor de delegaciones del país en Olimpiadas de Matemáticas Internacionales desde 1981. Asesor de la Organización de Estados Ibero-americanos para la Educación la Ciencia y la Cultura, OEI, en el área de Matemáticas y Olimpiadas Matemáticas. Asesor en el área de Matemáticas de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Pertenece a la directiva de la Asociación Matemática Venezolana desde hace más de diez años. En la actualidad es el Presidente de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM.

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

(OJM, OMCC, OIM, IMO)

2014

Problemas y Soluciones

JOSÉ HEBER NIETO SAID

Y

RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA

OLIMPIADA DE MATEMÁTICA 2014

COLECCIÓN ESTUDIOS

Hecho el Depósito de Ley
Deposito Legal: lfi65920155103138
ISBN: 978-980-6195-45-5

Diseño General: Antonio Machado-Allison

Diseño Carátula: Claudia Nieto y Antonio Machado-Allison

Índice general

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de escuela elemental y secundaria. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo debido a su gran efectividad en la popularización de las matemáticas y en la detección de jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia.

El presente libro reúne todos los problemas propuestos en la Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2014, así como aquellos de los eventos internacionales en los cuales participamos desde hace varios años. Estos fueron: la 55^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Ciudad del Cabo , Sudáfrica, del 3 al 13 de julio; la XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe (OMCC) celebrada en San José, Costa Rica, del 6 al 14 de junio y la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, celebrada en San Pedro Sula, Honduras, del 19 al 27 de septiembre. Las tres competencias son de carácter presencial. Cada una de ellas consta de dos exámenes, presentados en días consecutivos. Cada prueba tiene 3 problemas y los participantes disponen de cuatro horas y media para resolverlos. El valor de cada pregunta es de 7 puntos, para un máximo posible de 42 puntos en la competencia. Los ganadores reciben medallas de oro, plata o bronce y mención honorífica, según haya sido su desempeño. También incluimos en este libro los problemas de la Olimpiada Matemática de Mayo, competencia por correspondencia que se plantea a dos niveles para alumnos no mayores de 13 y 15 años y de carácter iberoamericano. Agradecemos a la Fundación Olimpiada Matemática Argentina, organizadores de esta competencia, por permitirnos publicar aquí los problemas y sus soluciones. Todos los estudiantes que participaron en los eventos internacionales mencionados ganaron algún premio, bien sea medallas o menciones honoríficas. Al final del libro aparece la lista de alumnos ganadores en estas competencias y los premios que obtuvieron.

La OJM consta de tres etapas o pruebas. La primera de ellas es el *Canguro Matemático*, un examen de treinta problemas de selección simple, que fue presentado por 56898 estudiantes provenientes de 21 regiones del país. La segunda etapa de la competencia es la *Prueba Final Regional*. La misma consta de un examen de cinco problemas de desarrollo y compiten los alumnos que quedaron ubicados en el nueve por ciento superior en el Canguro Matemático. Esta prueba se organiza en cada estado que participa en la OJM y los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce. La tercera y última fase es la *Prueba Final Nacional*, la misma consta de un examen de cuatro problemas de desarrollo y en ella participan los alumnos ganadores de medalla de oro en la Prueba Final Regional. En la primera fase de la competencia los alumnos presentan la prueba en sus colegios. La Prueba Regional la presentan juntos todos los estudiantes de cada estado, en una sede previamente seleccionada por el coordinador local. Para la Final Nacional se elige cada año una sede y allí se organiza el evento, permitiendo a los participantes, sus profesores y representantes estrechar lazos de amistad y compartir una experiencia educativa enriquecedora. La Prueba Final Nacional 2014 se realizó en la *Universidad Central de Venezuela*, y participaron 123 alumnos representando a 15 regiones.

Esta obra consta de siete capítulos, en los tres primeros se estudian los problemas de la OJM, dedicando un capítulo a cada fase de la competencia. Los últimos cuatro capítulos versan sobre las competencias internacionales. En ellos se presentan los problemas y sus soluciones. Al final del libro incluimos un glosario de conceptos matemáticos que son utilizados a los largo del texto. Esperamos que este libro sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes, y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

No queremos terminar esta introducción sin agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, a la *Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, a la *Facultad de Ciencias de la UCV* junto a la *Fundación Amigos de Ciencias*, a la *Universidad Simón Bolívar*, la *Universidad Rafael Urdaneta*, a *Acumuladores Duncan*, a *MRW* y a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

Capítulo 1

Prueba Canguro

1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

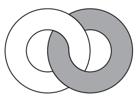
Problema 1. Armando formó la palabra CANGURO con tarjetas, pero algunas letras no están en la posición correcta. Algunas letras, como la N, se pueden acomodar dándoles un cuarto de vuelta. Otras, como la U, requieren dos cuartos de vuelta. ¿Cuántos cuartos de vuelta serán necesarios para acomodar todas las letras?

Ⓐ 4; Ⓑ 6; Ⓒ 8; Ⓓ 5; Ⓔ 7.

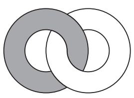
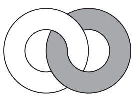
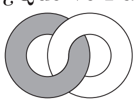
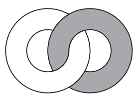
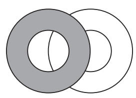
Problema 2. Una torta pesa 900 gramos. Paula la corta en 4 pedazos. El pedazo más grande pesa tanto como los otros tres pedazos juntos. ¿Cuánto pesa el pedazo más grande?

Ⓐ 250 g; Ⓑ 300 g; Ⓒ 400 g; Ⓓ 450 g; Ⓔ 600 g.

Problema 3. Dos anillos, uno gris y el otro blanco, están enlazados. Pedro, frente a los anillos, los ve así:



Pablo está detrás de los anillos. ¿Qué ve Pablo?

Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

Problema 4. En la suma siguiente algunos dígitos han sido reemplazados por asteriscos.

$$\begin{array}{rr} & 1*2 \\ + & 1*3 \\ + & 1*4 \\ \hline & 309 \end{array}$$

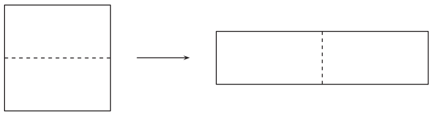
¿Cuál es la suma de los dígitos faltantes?

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 10.

Problema 5. ¿Cuál es la diferencia entre el menor número de 5 dígitos y el mayor número de 4 dígitos?

(A) 1111; (B) 9000; (C) 1; (D) 9900; (E) 10.

Problema 6. Un cuadrado de 48 cm de perímetro se corta en dos partes, con las cuales se forma un rectángulo (ver figura). ¿Cuál es el perímetro del rectángulo formado?

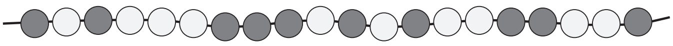


(A) 24 cm; (B) 48 cm; (C) 30 cm; (D) 72 cm; (E) 60 cm.

Problema 7. Karina tiene 38 fósforos. Usando todos los fósforos, construye un triángulo y un cuadrado. Cada lado del triángulo consta de 6 fósforos. ¿Cuántos fósforos hay en cada lado del cuadrado?

(A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7; (E) 8.

Problema 8. El collar de perlas de la figura contiene perlas blancas y grises.



Diego desea sacar del collar 5 perlas grises, pero como sólo puede sacar perlas de los extremos, necesariamente tendrá que extraer también algunas perlas blancas. ¿Cuál es el menor número de perlas blancas que Diego tiene que sacar?

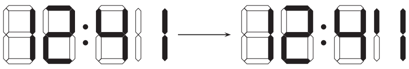
(A) 3; (B) 5; (C) 6; (D) 4; (E) 2.

Problema 9. José participó en una carrera de 5 vueltas alrededor de una pista circular. La tabla de la derecha muestra las horas de pasada por el punto inicial.
¿Qué vuelta le tomó menos tiempo?

	hora
inicio	09:55
luego de la vuelta 1	10:26
luego de la vuelta 2	10:54
luego de la vuelta 3	11:28
luego de la vuelta 4	12:03
luego de la vuelta 5	12:32

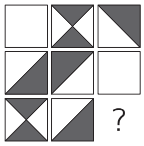
Ⓐ la primera; Ⓑ la segunda; Ⓒ la tercera; Ⓓ la cuarta; Ⓔ la quinta.

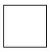
Problema 10. El reloj digital de Bernardo no funciona bien. Las tres líneas horizontales en el dígito más a la derecha no se ven. Bernardo mira su reloj y ve que la hora acaba de cambiar de la mostrada a la izquierda a la que se muestra a la derecha. ¿Qué hora es?



Ⓐ 12:40; Ⓑ 12:42; Ⓒ 12:44; Ⓓ 12:47; Ⓔ 12:49.

Problema 11. ¿Qué baldosa debe agregarse a la figura de la derecha para que el área blanca sea tan grande como el área negra?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ Es imposible..

Problema 12. Enrique y Juan comenzaron a caminar desde el mismo punto. Enrique caminó 1 km hacia el norte, 2 km hacia el oeste, 4 km hacia el sur y finalmente 1 km hacia el oeste. Juan caminó 1 km hacia el este, 4 km hacia el sur y 4 km hacia el oeste. ¿Cuál de las siguientes debe ser la parte final de su caminata para que llegue al mismo punto que Enrique?

Ⓐ Ya alcanzó el punto.; Ⓑ 1 km hacia el norte.; Ⓒ 1 km hacia el oeste.; Ⓓ 1 km hacia el noroeste.; Ⓔ Más de 1 km hacia el noroeste..

Problema 13. En el campamento de verano, 7 alumnos toman helado todos los días, 9 alumnos toman helado día por medio y los demás nunca. Ayer 13 alumnos tomaron helado. ¿Cuántos alumnos tomarán helado hoy?

Ⓐ 7; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ no se puede determinar.

Problema 14. Los canguros A, B, C, D y E están sentados en ese orden, en sentido horario, alrededor de una mesa circular. Cuando suena una campana, cada canguro excepto uno intercambia su posición con un vecino. Las posiciones resultantes, en sentido horario y comenzando por A, son A, E, C, B, D. ¿Cuál canguro no se movió?

Ⓐ A; Ⓑ B; Ⓒ C; Ⓓ D; Ⓔ E.

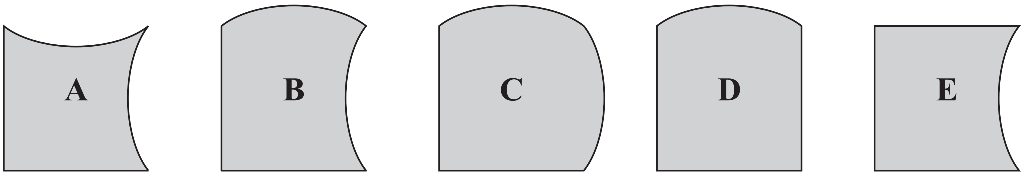
Problema 15. En un restaurante hay 16 mesas, cada una de las cuales tiene 3, 4 ó 6 sillas. Juntas, las mesas con 3 o 4 sillas pueden acomodar a 36 personas. Sabiendo que el restaurante puede acomodar a 72 personas, ¿cuántas mesas tienen 3 sillas?

Ⓐ 8; Ⓑ 7; Ⓒ 6; Ⓓ 5; Ⓔ 4.

Problema 16. Un número natural tiene tres dígitos. El producto de los tres dígitos es 135. ¿Cuál es el resultado de sumar los tres dígitos?

Ⓐ 18; Ⓑ 15; Ⓒ 14; Ⓓ 16; Ⓔ 17.

Problema 17. Usando cuatro de las cinco piezas siguientes se puede formar un cuadrado.



¿Cuál pieza no se usa?

Ⓐ A; Ⓑ B; Ⓒ C; Ⓓ D; Ⓔ E.

Problema 18. Los puntos A, B, C, D, E y F están sobre una recta, en ese orden. Sabemos que $AF = 35$, $AC = 12$, $BD = 11$, $CE = 12$ y $DF = 16$. ¿Cuánto mide BE?

Ⓐ 17; Ⓑ 13; Ⓒ 16; Ⓓ 14; Ⓔ 15.

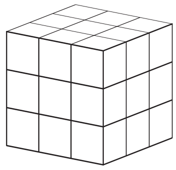
Problema 19. Patricia acomodó sus piedras en grupos de tres, y observó que le sobraron dos piedras. Luego las acomodó en grupos de cinco, y de nuevo le sobraron dos piedras. ¿Al menos cuántas piedras más necesita para que no le sobre ninguna si las agrupa de tres en tres o de cinco en cinco?

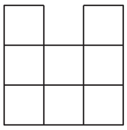
Ⓐ 3; Ⓑ 1; Ⓒ 4; Ⓓ 13; Ⓔ 10.

Problema 20. Las caras de un cubo están numeradas 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Las caras 1 y 6 tienen un lado común. Lo mismo ocurre con las caras 1 y 5, las caras 1 y 2, las caras 6 y 5, las caras 6 y 4, y las caras 6 y 2. ¿Qué número tiene la cara opuesta a la que tiene el número 4?

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 5; (E) no se puede determinar.

Problema 21. El cubo de $3 \times 3 \times 3$ en la figura a la derecha se compone de 27 cubitos. ¿Cuántos cubitos hay que quitar como mínimo para ver el siguiente resultado, tanto si se mira desde el frente como desde la derecha o desde arriba?





(A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7; (E) 9.

Problema 22. Las canciones A, B, C, D y E suenan en ese orden y al finalizar se repiten una y otra vez sin interrupciones. La canción A dura 3 minutos, B dura 2 minutos y medio, C dura 2 minutos, D dura 1 minuto y medio y E dura 4 minutos. Cuando Andrés salió de su casa estaba sonando la canción C. ¿Qué canción estaba sonando cuando Andrés regresó, exactamente una hora más tarde?

(A) A; (B) B; (C) C; (D) D; (E) E.

Problema 23. Darío escribió los números del 1 al 9 en las casillas de un tablero de 3×3. Comenzó escribiendo los números 1, 2, 3 y 4 como se muestra en la figura.

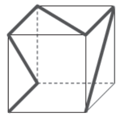
1		3
2		4

Al finalizar, Darío observó que la suma de los números adyacentes al 5 (es decir, los ubicados en casillas que tienen un lado común con la que contiene al 5) era igual a 9. ¿Cuál es la suma de los números adyacentes al 6?

(A) 14; (B) 15; (C) 17; (D) 28; (E) 29.

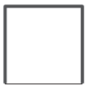
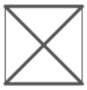
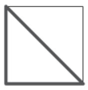
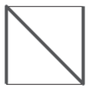
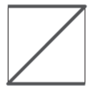
Problema 24. Hay 60 árboles en una fila, numerados de 1 a 60. Los que tienen números pares son apamates. Los que tienen números múltiplos de 3 son bucares o apamates. Los árboles restantes son samanes. ¿Cuántos samanes hay en la fila?

(A) 10; (B) 15; (C) 20; (D) 24; (E) 30.



Problema 25. Una delgada cinta negra está pegada sobre un cubo de plástico transparente (ver figura de la derecha).

¿Cuál de las siguientes figuras no representa al cubo, desde ninguna perspectiva?

(A)  ; (B)  ; (C)  ; (D)  ; (E)  .

Problema 26. El rey y sus mensajeros viajan desde el castillo hacia el palacio de verano, a una velocidad de 5 km/h. Cada hora, el rey envía un mensajero de vuelta al castillo. Si los mensajeros viajan a 10 km/h, ¿cuál es el intervalo de tiempo entre la llegada de dos mensajeros consecutivos al castillo?

(A) 30 min; (B) 60 min; (C) 75 min; (D) 90 min; (E) 120 min.

Problema 27. Había tres dígitos escritos en la pizarra. Pedro los sumó y obtuvo 15 como resultado. Luego borró uno de los dígitos y en su lugar escribió el 3. A continuación María multiplicó los tres números en la pizarra y obtuvo 36 como resultado. ¿Cuáles son las posibilidades para el número que Pedro borró?

(A) 6 o 7; (B) 8 o 7; (C) sólo 6; (D) sólo 7; (E) sólo 8.

Problema 28. El conejo Copito ama las zanahorias y los repollos. En un día él come 9 zanahorias, o bien 2 repollos, o bien 1 repollo y 4 zanahorias. Pero algunos días él sólo come hierbas. En los últimos 10 días, Copito comió un total de 30 zanahorias y 9 repollos. ¿En cuántos de esos 10 días sólo comió hierbas?

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

Problema 29. En Fabulandia, cada día soleado es precedido por dos días lluviosos. Además, cinco días después de un día lluvioso se tiene otro día lluvioso. Hoy es un día soleado. ¿Para cuántos días siguientes podemos predecir el tiempo con certeza?

(A) 4 días; (B) 2 días; (C) 1 día; (D) No se puede predecir ni un día;
(E) Se pueden predecir todos los días siguientes.

Problema 30. La abuela tiene 10 nietos, de los cuales Alicia es la mayor. Un día, la abuela notó que todos sus nietos tenían edades diferentes. Si la suma de las edades de los nietos es 180, ¿cuál es la menor edad que Alicia podría tener?

(A) 19; (B) 20; (C) 21; (D) 22; (E) 23.

1.1.1. Soluciones

1. Dos para la A, uno para la N, dos para la U, uno para la R, en total 6. La respuesta correcta es la (B).

2. La mitad de la torta, 450 g. La respuesta correcta es la (D).

3. La respuesta correcta es la (A).

4. Los $*$ deben ser todos 0, pues de lo contrario deberían sumar 10 o 20, se produciría un acarreo, y el primer dígito de la suma sería mayor que 3. La respuesta correcta es la (A).

5. $10000 - 9999 = 1$. La respuesta correcta es la (C).

6. El lado del cuadrado es 12 cm, el ancho del rectángulo es 24 cm y su altura es 6 cm. La respuesta correcta es la (E).

7. Usa $6 \times 3 = 18$ fósforos para el triángulo y le quedan $38 - 18 = 20$ para el cuadrado, luego el lado del cuadrado es 5. La respuesta correcta es la (B).

8. La respuesta es 3 (opción A). Se deben sacar 3 perlas del extremo izquierdo y 5 perlas del extremo derecho.

9. En la segunda (opción B).

10. La respuesta correcta es la (C).

11. La respuesta correcta es la (E). El área negra equivale a tres cuadraditos, y aún agregando un cuadradito completamente negro se llega sólo a 4, que es menos de la mitad del cuadrado de área 9.

12. La respuesta correcta es la (B).

13. Ayer 13 alumnos tomaron helado, los 7 que lo toman a diario y 6 de los 9 que lo toman día por medio. Hoy lo tomarán $7 + 3 = 10$, opción (D).

14. A no pudo quedar fijo pues en ese caso luego del intercambio hubiesen quedado ACBED. Tampoco puede haber intercambiado con B pues en ese caso hubiese quedado después de B (en sentido horario). Luego A intercambió con E, y B con C para quedar AECBD. D quedó fijo y la respuesta correcta es la (D).

15. Las mesas con 6 sillas pueden acomodar $72 - 36 = 36$ personas, luego hay 6 de esas mesas. Quedan 10 mesas, que si fueran todas de 3 sillas sólo podrían acomodar a 30 personas. Para que puedan acomodar 36, seis de ellas deben ser de 4 sillas. Luego las de 2 sillas son 4 y la respuesta correcta es la (E).

16. Como $135 = 3^3 \cdot 5$, los dígitos sólo pueden ser 3, 9 y 5. La respuesta es 18 (opción A).

17. No se usa la pieza B.

18. $AE = AC+CE = 12+12 = 24$, $EF = AF-AE = 35-24 = 11$, $BF = BD+DF = 11+16 = 27$, $BE = BF-EF = 27-11 = 16$. La respuesta correcta es la (C).

19. Para que se puedan agrupar de a 3 debe agregar una, o una más un múltiplo de 3, es decir 1, 4, 7, 10, 13, 16,... Del mismo modo para que se puedan agrupar de a 5 debe agregar 3, 8, 13, 18,... El menor número común a las dos listas es 13, luego la respuesta correcta es la (D).

20. Como la cara 6 es adyacente a 1, 4, 5 y 2, debe ser opuesta a 3. Entonces la 1 es adyacente a 6, 3, 5 y 2, y por lo tanto opuesta a 4. La respuesta correcta es la (A).

21. âra ver esa figura desde el frente y desde la derecha hay que quitar 5 cubitos de la capa superior, formando una cruz. Para que se vea lo mismo desde arriba hay que quitar dos más, para un total de 7. La respuesta correcta es la (D).

22. Midamos el tiempo en minutos a partir del comienzo de la canción C que sonaba cuando Andrés salió. Como C dura 2 minutos, el instante t en que Andrés salió cumple $0 < t < 2$. Como los tiempos de las canciones suman 13 minutos, en el instante $65 = 13 \times 5$ han sonado todas 5 veces y acaba de terminar B, que entonces comenzó en el instante $65 - 2{,}5 = 62{,}5$. Entre los instantes 59,5 y 62,5 sonó A. Como $60 < t < 62$, la canción que sonaba cuando Andrés regresó era la A.

23. El 5 no puede estar en la casilla central, pues en ese caso los números en las casillas adyacentes sumarían $6+7+8+9 \neq 9$. Tampoco en la media superior (pues entonces en la central debería haber otro 5), ni en la media derecha (pues entonces en la central debería haber un 2, que ya está en la inferior izquierda), ni en la media inferior (pues entonces en la central debería haber un 3, que ya está en la superior derecha). Es decir que el 5 sólo puede estar en la casilla media de la izquierda, y entonces en la casilla central debe estar el 6. Los adyacentes al 6 suman entonces $5 + 7 + 8 + 9 = 29$, y la opción correcta es la (E).

24. Los samanes son los que tienen números no divisibles ni entre 2 ni entre 3. Del 1 al 60 hay 30 múltiplos de 2, 20 múltiplos de 3 y 10 múltiplos de 6 (es decir, múltiplos de 2 y 3 simultáneamente). Luego los samanes son $60 - 30 - 20 + 10 = 20$. La respuesta correcta es la (C).

25. Desde la derecha o la izquierda se ve la opción (B). Desde arriba o abajo se ve (D) o (E), según la orientación. Desde el frente o desde atrás se ve (A). Por descarte, la respuesta correcta es la (C),

26. Digamos que el rey parte a la hora 0:00. A la 1:00 parte el primer mensajero, que recorre 5 km en media hora y llega al castillo a la 1:30. A las 2:00 parte el segundo mensajero, que recorre 10 km en una hora y llega al castillo a las 3:00. Luego los mensajeros llegan cada hora y media, opción (D).

27. Si en la pizarra estaban escritos x, y, z entonces $x + y + z = 15$. Si Pedro borró x, María encontró 3, y, z, y por lo tanto $3yz = 36$, de donde $yz = 12$. Por lo tanto $\{y, z\} = \{2, 6\}$ o $\{3, 4\}$, y $x = 15 - y - z = 8$ u 8. La respuesta correcta es la (B).

28. Sea z el número de días en los cuales Copito comió 9 zanahorias y m el número de días en los cuales comió 4 zanahorias y un repollo. Entonces $9z + 4m = 30$. Es claro que $0 \leq z \leq 3$ (pues $9 \times 3 > 30$). Pero $30 - 9z = 4m$ debe ser múltiplo de 4, lo que excluye $z = 0$, $z = 1$ y $z = 3$. La única posibilidad es $z = 2$, de donde $m = 3$. Tenemos así 5 días en los cuales comió 30 zabahorias y 3 repollos. Le faltan 6 repollos, que debió comer en 3 días (a 2 repollos por día). De los 10 días quedan entonces 2, en los cuales sólo comió hierba (opción C).

29. Digamos que hoy es el día 3, soleado. Entonces los días 1 y 2 fueron lluviosos, y los días $1 + 5 = 6$ y $1 + 6 = 7$ serán también lluviosos. Además los días 4 y 5 deben ser lluviosoa, pues si alguno de ellos fuese soleado hoy debería ser lluvioso. El día 8 puede ser tanto soleado como lluvioso, luego se pueden predecir 4 días (4, 5, 6 y 7), opción (A).

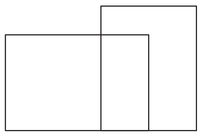
30. Sea m la edad de Alicia. Entonces la suma de edades de los 10 nietos es $180 \leq (m - 9) + (m - 8) + \cdots + (n - 1) + m = 5(2m - 9)$, de donde $2m - 9 \geq 180/5 = 36$ y $m \geq 45/2$. Por lo tanto m debe ser por lo menos 23. Con $m = 23$ se pueden cumplir las condiciones, por ejemplo con edades 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15 y 9. La respuesta correcta es la (E).

1.2. Prueba de Tercer Año

Problema 1. ¿Cuál es el resultado de $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014$?

Ⓐ 1; Ⓑ 0; Ⓒ 2013; Ⓓ 2014; Ⓔ 4028.

Problema 2. ¿Cuántos cuadriláteros (de cualquier tamaño) se ven en la figura?

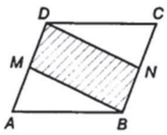


Ⓐ 0; Ⓑ 1; Ⓒ 2; Ⓓ 4; Ⓔ 5.

Problema 3. La prueba Canguro se realiza el tercer jueves de marzo de cada año. ¿Cuál es el mayor número posible del día en que se realiza esta prueba?

Ⓐ 21; Ⓑ 22; Ⓒ 20; Ⓓ 15; Ⓔ 14.

Problema 4. El área del paralelogramo $ABCD$ es 10. M y N son los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $MBND$?

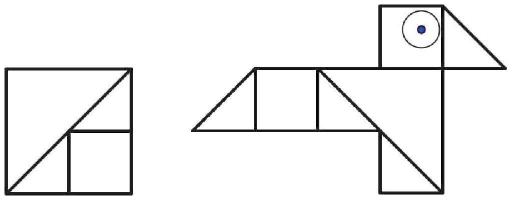


Ⓐ 5; Ⓑ 2,5; Ⓒ 0,5; Ⓓ 7.5; Ⓔ 10.

Problema 5. El producto de dos números es 36 y su suma es 37. ¿Cuál es su diferencia?

Ⓐ 1; Ⓑ 26; Ⓒ 35; Ⓓ 10; Ⓔ 4.

Problema 6. Rosa tiene varios cuadrados de papel de área 4. Ella los corta en cuadrados y triángulos rectángulos de la manera indicada en la figura de la izquierda. Con algunas de esas piezas arma el pájaro que se ve en la figura de la derecha. ¿Cuál es el área del pájaro?

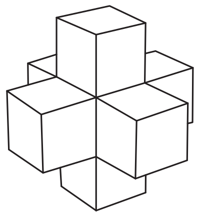


Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 9/2; Ⓓ 5; Ⓔ 6.

Problema 7. Un balde está lleno de agua hasta la mitad de su capacidad. Juan le agrega dos litros de agua, con lo cual el balde alcanza las tres cuartas partes de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del balde?

Ⓐ 10 l; Ⓑ 8 l; Ⓒ 6 l; Ⓓ 4 l; Ⓔ 2 l.

Problema 8. Jorge construyó lo que se muestra en la figura usando siete cubos de lado unidad. ¿Cuántos cubos de lado unidad tendrá que agregar para formar un cubo de lado 3?

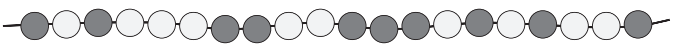


Ⓐ 20; Ⓑ 18; Ⓒ 16; Ⓓ 14; Ⓔ 12.

Problema 9. ¿Cuál de los cálculos siguientes da el mayor resultado?

Ⓐ 44×777; Ⓑ 55×666; Ⓒ 77×444; Ⓓ 88×333; Ⓔ 99×222.

Problema 10. El collar de perlas de la figura contiene perlas blancas y grises.



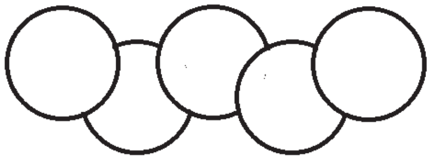
Diego saca del collar una perla tras otra. Cada perla extraída proviene de uno u otro extremo. Diego se detiene al sacar la quinta perla gris. ¿Cuál es el mayor número de perlas blancas que Diego puede sacar?

Ⓐ 5; Ⓑ 4; Ⓒ 7; Ⓓ 6; Ⓔ 8.

Problema 11. Jaime toma dos lecciones de piano semanales y Juana toma una lección de piano cada dos semanas. En un período de varias semanas, Jaime tomó 15 lecciones más que Juana. ¿Cuántas semanas tiene el período?

(A) 30; (B) 25; (C) 20; (D) 15; (E) 10.

Problema 12. En el diagrama, el área de cada círculo es 1 cm^2. El área común a dos círculos que se solapan es $\frac{1}{8}$ cm^2. ¿Cuál es el área de la región cubierta por los cinco círculos?

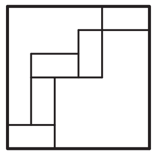


(A) 4 cm^2; (B) $\frac{9}{2}$ cm^2; (C) $\frac{35}{8}$ cm^2; (D) $\frac{39}{8}$ cm^2; (E) $\frac{19}{4}$ cm^2.

Problema 13. Este año una abuela, su hija y su nieta observaron que la edad de cada una de ellas es una potencia de 2, y que la suma de sus edades es 100 años. ¿Cuál es la edad de la nieta?

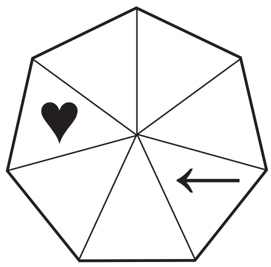
(A) 2; (B) 8; (C) 16; (D) 4; (E) 1.

Problema 14. Cinco rectángulos iguales se colocan dentro de un cuadrado de lado 24 cm, como muestra la figura. ¿Cuál es el área de cada rectángulo?



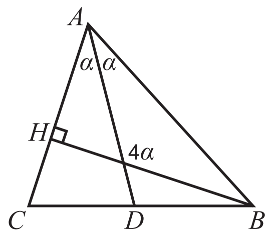
(A) 12 cm^2; (B) 18 cm^2; (C) 16 cm^2; (D) 32 cm^2; (E) 24 cm^2.

Problema 15. El corazón y la flecha están en la posición que muestra la figura, y comienzan a moverse simultáneamente. La flecha se mueve tres lugares en el sentido de las agujas del reloj y el corazón se mueve cuatro lugares en sentido contrario a las agujas del reloj, y luego se detienen. Este proceso se repite una y otra vez. ¿Luego de cuántas repeticiones del proceso el corazón y la flecha estarán en la misma región triangular por primera vez?



(A) 7; (B) 8; (C) 9; (D) 10; (E) Nunca ocurrirá.

Problema 16. La figura muestra el triángulo ABC en el cual BH es una altura y AD es la bisectriz del ángulo en A. El ángulo obtuso entre BH y AD es cuatro veces el ángulo DAB. ¿Cuánto mide el ángulo CAB?



(A) 30°; (B) 90°; (C) 45°; (D) 75°; (E) 60°.

Problema 17. Seis jóvenes comparten un apartamento con dos baños. Ellos los usan cada mañana comenzando a las 7:00 en punto. Nunca hay más de una persona en un mismo baño simultáneamente. Los tiempos que tardan en el baño los seis jóvenes son 8, 10, 12, 17, 21 y 22 minutos respectivamente. ¿Cuál es la hora más temprana a la cual pueden quedar ambos baños libres?

(A) 7:45; (B) 7:46; (C) 7:47; (D) 7:48; (E) 7:50.

Problema 18. Un rectángulo tiene lados de 6 cm y 11 cm. Se escoge uno de los lados largos y se trazan las bisectrices de los ángulos en los extremos de ese lado. Esas bisectrices dividen al otro lado largo en tres partes. ¿Cuánto miden esas tres partes?
(A) 1 cm, 9 cm, 1 cm; (B) 2 cm, 7 cm, 2 cm; (C) 5 cm, 1 cm, 5 cm;
(D) 3 cm, 5 cm, 3 cm; (E) 4 cm, 3 cm, 4 cm.

Problema 19. El botín de unos piratas consiste en varias monedas de oro. Ellos las dividen equitativamente, de manera que cada pirata recibe el mismo número de monedas. Si hubiese cuatro piratas menos, a cada uno le tocarían 10 monedas más. Pero si hubiera 50 monedas menos, a cada pirata le tocarían 5 monedas menos. ¿Cuántas monedas hay en el botín?

(A) 80; (B) 100; (C) 120; (D) 150; (E) 250.

Problema 20. El promedio de dos números positivos es 30 % menos que uno de ellos. ¿En qué porcentaje es el promedio mayor que el otro número?

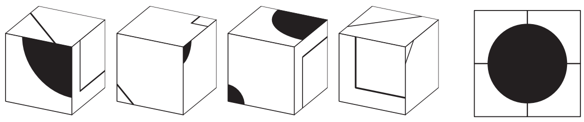
(A) 75 %; (B) 70 %; (C) 30 %; (D) 25 %; (E) 20 %.

Problema 21. Andrés escribe los dígitos del 1 al 9 en las casillas de un tablero de 3×3, un dígito en cada casilla. Él ya ha escrito los dígitos 1, 2, 3 y 4, como muestra la figura. Dos números se consideran *vecinos* si sus respectivas casillas tienen un lado común. Luego de escribir todos los números Andrés observó que la suma de los vecinos de 9 es 15. ¿Cuál es la suma de los vecinos de 8?

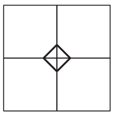
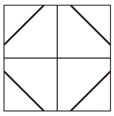
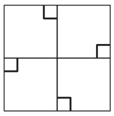
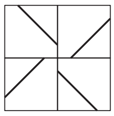
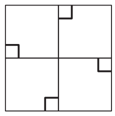
1		3
2		4

(A) 12; (B) 20; (C) 18; (D) 27; (E) 26.

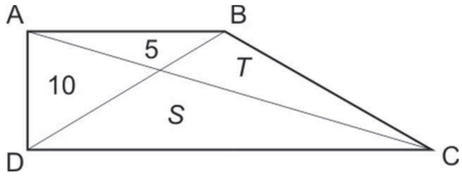
Problema 22. Se tienen cuatro cubos idénticos, como muestra la parte izquierda de la figura. Ellos se disponen de manera que en una de las caras aparezca un gran círculo negro (ver la figura de la derecha).



¿Qué se ve en la cara opuesta a la del círculo?

(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

Problema 23. El cuadrilátero $ABCD$ tiene ángulos rectos en y solamente en los vértices A y D. Los números muestran las áreas de dos triángulos. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABCD$?



(A) 60; (B) 40; (C) 30; (D) 35; (E) 45.

Problema 24. Luisa y María compiten resolviendo problemas. Cada una de ellas recibe la misma lista de 100 problemas. Para cada problema, la primera en resolverlo obtiene 4 puntos, y la segunda en resolverlo obtiene 1 punto. Luisa y María resolvieron 60 problemas cada una. Entre las dos obtuvieron 312 puntos. ¿Cuántos problemas fueron resueltos tanto por Luisa como por María?

(A) 54; (B) 53; (C) 56; (D) 55; (E) 57.

Problema 25. David va en bicicleta desde su casa a la escuela, adonde debe llegar a las 8 am. Él consumió $2/3$ del tiempo planeado recorriendo $3/4$ de la distancia, luego de lo cual redujo la velocidad y llegó exactamente a la hora debida. ¿Cuál es la razón entre la velocidad de David en el primer tramo de su recorrido y la velocidad en el segundo tramo del recorrido?

(A) $5:4$; (B) $4:3$; (C) $3:2$; (D) $2:1$; (E) $3:1$.

Problema 26. Una vieja balanza no funciona bien. Si algo pesa menos de 1000 g, la balanza muestra el peso correcto. Pero si algo pesa 1000 g o más, la balanza puede mostrar cualquier valor mayor que 1000 g. Se tienen cinco objetos de pesos A, B, C, D y E, todos inferiores a 1000 g. Cuando se pesan en pares, la balanza muestra lo siguiente: $B+D$, 1200 g; $C+E$, 2100 g; $B+E$, 800 g; $B+C$, 900 g; $A+E$, 700 g. De los cinco objetos, ¿cuál es el más pesado?

(A) A; (B) B; (C) C; (D) D; (E) E.

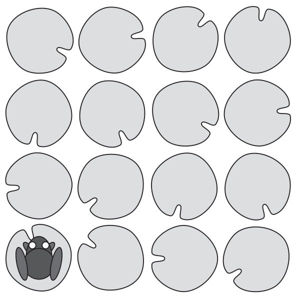
Problema 27. Un grupo de personas está integrado por honestos, mentirosos y alternantes. Los honestos siempre dicen la verdad, los mentirosos siempre mienten, y los alternantes alternan entre decir la verdad y mentir. Cuando se preguntó a cada uno de ellos "¿Es usted honesto?", 17 respondieron "Sí". Luego se preguntó a cada uno de ellos "¿Es usted alternante?", y 12 respondieron "Sí". ¿Cuántos honestos hay en el grupo?

Ⓐ 4; Ⓑ 5; Ⓒ 9; Ⓓ 13; Ⓔ 17.

Problema 28. Varios enteros positivos diferentes están escritos en la pizarra. Exactamente dos de ellos son divisibles entre 2 y exactamente 13 de ellos son divisibles entre 13. Sea M el mayor de todos esos números. ¿Cuál es el menor valor posible de M?

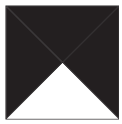
Ⓐ 169; Ⓑ 260; Ⓒ 273; Ⓓ 299; Ⓔ 325.

Problema 29. En una laguna hay 16 hojas de lirio acuático dispuestas en un arreglo de 4×4, como muestra la figura. Una rana está sobre una hoja en una esquina y salta horizontal o verticalmente de una hoja a otra. La rana siempre salta sobre al menos otra hoja, y nunca se posa dos veces sobre la misma hoja. ¿Cuál es el mayor número de hojas sobre las cuales la rana se puede posar?



Ⓐ 16; Ⓑ 15; Ⓒ 14; Ⓓ 13; Ⓔ 12.

Problema 30. Un patio de 5×5 se compone de baldosas de 1×1, todas con el mismo diseño (ver figura). Todo par de baldosas adyacentes tienen el mismo color a lo largo del lado común. El perímetro del patio consiste de segmentos negros y blancos de longitud 1. ¿Cuál es el menor número posible de esos segmentos unitarios que son de color negro?



Ⓐ 8; Ⓑ 6; Ⓒ 7; Ⓓ 4; Ⓔ 5.

1.2.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (B).

2. La respuesta correcta es la (D).

3. El mayor se produce cuando el primero de marzo es viernes, en ese caso el primer jueves es 7, el segundo 14 y el tercero 21. La respuesta correcta es la (A).

4. Si se traxa MN se forman 4 triángulos de igual área, luego $[MBND] = \frac{1}{2}[ABCD] = 5$. La respuesta correcta es la (A).

5. Los números son 36 y 1, pues $36 + 1 = 37$, $36 \times 1 = 36$. La respuesta es entonces $36 - 1 = 35$, opción (C).

6. La respuesta correcta es la (E).

7. Dos litros llenan $\frac{1}{4}$ de balde, luego la capacidad del balde es 8 litros (opción B).

8. Un cubo de lado 3 requiere $3^3 = 27$ cubitos unitarios, luego la respuesta es $27-7 = 20$ (opción A).

9. Observe que $44 \times 777 = 4 \times 7 \times 11 \times 111 = 28 \times 11 \times 111$. Análogamente $55 \times 666 = 30\times 11\times 111$, $77\times 444 = 28\times 11\times 111$, $88\times 333 = 24\times 11\times 111$ y $99\times 222 = 18\times 11\times 111$. Evidentemente el mayor es $55 \times 666 = 30 \times 11 \times 111$ (opción B).

10. Sacando 5 perlas por la derecha y 7 por la izquierda se logra sacar 7 blancas. La respuesta correcta es la (C).

11. En dos semanas Jaime toma 4 lecciones, Juana toma una y la diferencia es 3. Multiplicando por 5 vemos que en 10 semanas la diferencia será 15. La respuesta correcta es la (E),

12. $5 - \frac{4}{8} = \frac{9}{2}$ cm^2, opción (B).

13. $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$. La respuesta es 4, opción (D).

14. Los lados de los rectángulos miden 8 cm y 4 cm. La respuesta correcta es la (D).

15. Moverse cuatro lugares en sentido contrario a las agujas del reloj es equivalente a moverse tres lugares en el sentido de las agujas del reloj, luego la flecha y el corazón estarán siempre a la misma distancia uno del otro y nunca se encontrarán (opción E).

16. Si $\alpha = \angle DAB$, entonces $\angle DAC = \alpha$ y $\angle ABH = 90° - 2\alpha$. Si P es la intersección de AD y BH entonces $\angle APB = 4\alpha$, y en el triángulo APB se tiene $\alpha + 4\alpha + (90° - 2\alpha) = 180°$, de donde $\alpha = 30°$ y $\angle CAB = 2\alpha = 60°$. La opción correcta es la (E).

17. Hay que repartir los tiempos 8, 10, 12, 17, 21 y 22 en dos grupos lo más parejos posible. Como suman 90, lo ideal sería dos grupos de 45, pero eso no es posible. Lo mejor que se puede hacer es agrupar 8, 17, 21 (suma 46) y 10, 12, 22 (suma 44). Luego a las 7:46 ambos baños estarán desocupados (opción B).

18. La respuesta correcta es la (C).

19. Digamos que hay p piratas y que cada uno recibió k monedas. Entonces $pk = (p-4)(k+10)$ y $pk - 50 = p(k-5)$. De la segunda igualdad se sigue $-50 = -5p$ y $p = 10$. De la primera $0 = -4k + 10p - 40$, de donde $4k = 10p - 40 = 100 - 40 = 60$ y $k = 15$. Luego hay $pk = 150$ monedas, opción (D).

20. Si los números son a y b entonces el promedio es el 70 % de uno de ellos, digamos de a. Es decir que $(a+b)/2 = 0{,}7a$, $a + b = 1{,}4a$ y $b = 0{,}4a$. Luego $(a+b)/2 = 0{,}7a = 0{,}7b/0{,}4 = 1{,}75b$ y el promedio es 75 % mayor que b. La respuesta correcta es la (A).

21. El 9 no puede ir en el centro pues sus vecinos serían 5, 6, 7 y 8 que suman 26. Tampoco puede ir entre el 1 y el 2, entre el 1 y el 3, o entre el 2 y el 4, pues sus vecinos sumarían a lo sumo $2+4+8 = 14$. Luego el 9 debe ir entre el 3 y el 4, y el 8 en el centro. Así los vecinos del 8 son 5, 6, 7 y 9 que suman 27. La respuesta correcta es la (D).

22. En cada cara del cubo hay un cuarto de círculo grande, un cuarto de círculo pequeño, un cuadrado grande, un cuadrado pequeño, un triángulo grande o un triángulo pequeño. Comparando la primer vista del cubo con la cuarta, se ve que a la cara con el cuarto de círculo grande se opone la cara con el triángulo pequeño. Luego la respuesta correcta es la (A).

23. Como $[ABD] = [ABC]$ (pues tienen la misma base AB e igual altura) se tiene $10 + 5 = 5 + T$ y $T = 10$. Sea P el punto de intersección de las diagonales. Entonces

$$\frac{S}{T} = \frac{[DPC]}{[PBC]} = \frac{DP}{PB} = \frac{[DPA]}{[PBA]} = \frac{10}{5} = 2,$$

de donde $S = 2T = 20$ y $[ABCD] = 10+5+S+T = 10+5+20+10 = 45$. La respuesta correcta es la (E).

24. Sea x el número de problemas que fueron resueltos tanto por Luisa como por María. Entonces $60-x$ problemas fueron resueltos sólo por Luisa, reportándole $4(60-x)$ puntos. Otros $60-x$ problemas fueron resueltos sólo por María, reportándole $4(60-x)$ puntos. Cada uno de los x problemas reportó 4 puntos a una de ellas y 1 punto a la otra, para un total de $5x$ puntos. Entonces $4(60-x) + 4(60-x) + 5x = 312$, es decir $480 - 3x = 312$, $3x = 480 - 312 = 168$ y $x = 56$. La respuesta correcta es la (C).

25. Sea d la distancia a recorrer y t el tiempo planeado. Entonces la velocidad de David en el primer tramo fué $v_1 = (\frac{3}{4}d)/(\frac{2}{3}t) = \frac{9}{8}(d/t)$, y en el segundo tramo fué $v_2 = (\frac{1}{4}d)/(\frac{1}{3}t) = \frac{3}{4}(d/t)$. Luego $v_1/v_2 = \frac{9}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, opción (C),

26. Se sabe que $B+D \geq 1000$, $C+E \geq 1000$, $B+E = 800$, $B+C = 900$ y $A+E = 700$. De $B+D \geq 1000$ y $B+C = 900$ resulta $D-C \geq 100$. De $C+E \geq 1000$ y $B+E = 800$ resulta $C-B \geq 200$. De $B+E = 800$ y $A+E = 700$ resulta $B-A = 100$. Luego $D > C > B > A$. Finalmente de $B+C = 900$ y $B+E = 800$ resulta $C-E = 100$ y $C > E$. Luego el objeto más pesado es D.

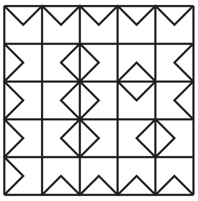
27. Digamos que hay h honestos, m mentirosos y a alternantes. A la primera pregunta tanto los honestos como los mentirosos respondieron SI. Supongamos además que, de los a alternantes, s respondieron SI (mintiendo). Luego $h + m + s = 17$. A la segunda pregunta sólo pueden haber respondido SI los mentirosos y los alternantes a los que les toca decir la verdad, que son los mismos s que mintieron en la primera pregunta. Luego $m + s = 12$, y $h = (h + m + s) - (m + s) = 17 - 12 = 5$, opción (B).

28. De los 13 múltiplos de 13 a lo sumo dos pueden ser pares, luego debe haber 11 múltiplos impares de 13. Como el undécimo impar es 21, $M \geq 13 \cdot 21 = 273$. Agregando por ejemplo 26 y 52 a 13, $13 \cdot 3$, $13 \cdot 5, \ldots, 13 \cdot 21$ se ve que efectivamente 273 es el mínimo valor de M. La respuesta correcta es la (C).

29. Se puede posar sobre todas las hojas (opción A). Una forma de hacerlo es la siguiente:

8	4	11	7
14	16	13	15
9	5	10	6
1	3	12	2

30. Hay 25 baldosas, cada una con 3 lados blanco. Estos 75 lados, si quedan en el interior, van agrupados de a pares. Luego en el borde exterior debe haber un número impar de lados negros. Pero en cada esquina debe haber al menos un lado negro, luego debe haber al menos 5 lados negros en el perímetro. Esto se puede lograr como muestra la figura. Luego 5 es efectivamente el mínimo (opción E).



1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año

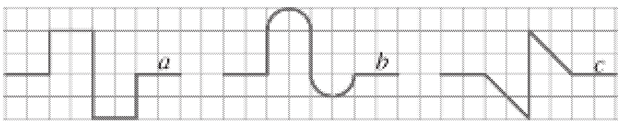
Problema 1. La prueba Canguro se aplica el tercer jueves del mes de marzo, cada año. ¿Cuál es el menor número posible del día en que se aplica la prueba?

(A) 14; (B) 15; (C) 20; (D) 21; (E) 22.

Problema 2. Un barco puede cargar 12500 contenedores que, si se pusieran en fila, formarían una cadena de 75 km. ¿Cuál es la longitud de cada contenedor?

(A) 16 m; (B) 160 m; (C) 60 m; (D) 6 m; (E) 600 m.

Problema 3. Si a, b y c denotan las longitudes de las líneas de la figura, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



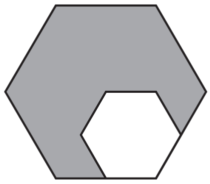
(A) $c < b < a$; (B) $b < a < c$; (C) $b < c < a$; (D) $a < b < c$; (E) $a < c < b$.

Problema 4. ¿Cuál es el promedio de los números $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$?

(A) $\frac{11}{15}$; (B) $\frac{7}{8}$; (C) $\frac{3}{4}$; (D) $\frac{6}{15}$; (E) $\frac{5}{8}$.

Problema 5. En el número 2014 el último dígito es mayor que la suma de los otros tres. ¿Cuántos años pasaron desde la vez anterior que ocurrió esto mismo?

Ⓐ 1; Ⓑ 3; Ⓒ 5; Ⓓ 7; Ⓔ 11.



Problema 6. El lado del hexágono regular grande es el doble del lado del hexágono regular pequeño. El área del hexágono pequeño es 4 cm^2. Cuál es el área del hexágono grande?

Ⓐ 8 cm^2; Ⓑ 10 cm^2; Ⓒ 12 cm^2; Ⓓ 14 cm^2; Ⓔ 16 cm^2.

Problema 7. ¿Cuál es la negación de la proposición «Todos resolvieron más de 20 problemas»?

Ⓐ Nadie resolvió más de 20 problemas.
Ⓑ Alguno resolvió menos de 21 problemas.
Ⓒ Todos resilvieron menos de 21 problemas.
Ⓓ Alguno resolvió exactamente 20 problemas.
Ⓔ Alguno resolvió mas de 20 problemas.

Problema 8. Tomás dibujó un cuadrado en un sistema de coordenadas. Dos de sus vértices pertenecen al eje de las x y sus coordenadas son $(-1, 0)$ y $(5, 0)$. ¿Cuál de las siguientes son las coordenadas de otro vértice del cuadrado?

Ⓐ $(2, 3)$; Ⓑ $(2, 0)$; Ⓒ $(2, -6)$; Ⓓ $(3, 5)$; Ⓔ $(3, -1)$.

Problema 9. En cierto pueblo, la razón entre el número de hombres adultos y el de mujeres adultas es $2 : 3$. La razón entre el número de mujeres adultas y el número de menores de edad (de ambos sexos) es $8 : 1$. ¿Cuál es la razón entre el número de personas adultas y el número de menores de edad?

Ⓐ $13 : 1$; Ⓑ $40 : 3$; Ⓒ $12 : 1$; Ⓓ $10 : 3$; Ⓔ $5 : 1$.

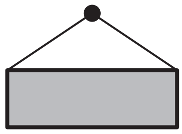
Problema 10. La circunferencia de la rueda grande de la bicicleta mide 4,2 m. La circunferencia de la rueda pequeña mide 0,9 m. En cierto momento, las válvulas de ambas ruedas están en su punto más bajo. Si la bicicleta comienza a rodar hacia la izquierda, ¿luego de cuántos metros volverán ambas válvulas a estar en su punto más bajo?

Ⓐ 4.2; Ⓑ 6.3; Ⓒ 12.6; Ⓓ 25.2; Ⓔ 37.8.

Problema 11. Hoy una abuela, su hija y su nieta cumplen años. Si la suma de sus edades es 100 y cada edad es una potencia de 2, ¿en qué año nació la nieta?

Ⓐ 1998; Ⓑ 2013; Ⓒ 2006; Ⓓ 2012; Ⓔ 2010.

Problema 12. Pablo colgó algunos cuadros rectangulares en la pared. A cada uno le puso un cordel de 2 metros de largo uniendo los dos vértices superiores. Cada cuadro lo colgó por el punto medio del cordel en un clavo colocado en la pared a 2,5 m de altura sobre el piso. ¿Cuál de los siguientes cuadros quedó más cerca del piso (formato: ancho en cm $\times$ altura en cm)?

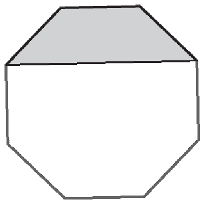


Ⓐ 60×40; Ⓑ 120×90; Ⓒ 120×50; Ⓓ 160×60; Ⓔ 160×100.

Problema 13. Seis muchachas comparten un apartamento con dos baños. Cada mañana, a partir de las 7:00, cada una va a uno de los baños libres. Ellas se tardan 9, 11, 13, 18, 22 y 23 minutos en el baño, respectivamente. Tan pronto como todas han ido al baño, se sientan a desayunar juntas. Si se organizan bien, ¿cuál es la hora más temprana a la cual pueden desayunar?

Ⓐ 8:03; Ⓑ 7:51; Ⓒ 7:50; Ⓓ 7:49; Ⓔ 7:48.

Problema 14. En la figura se ve un octágono regular. El área de la región sombreada es 3 cm^2. ¿Cuál es el área del octágono, en cm^2?



Ⓐ $8 + 4\sqrt{2}$; Ⓑ 9; Ⓒ $8\sqrt{2}$; Ⓓ 12; Ⓔ 14.

Problema 15. Una nueva clase de cocodrilo ha sido descubierta en Africa. La longitud de la cola es la tercera parte de la longitud total del animal. La cabeza mide 93 cm y es igual a un cuarto de la longitud del cocodrilo sin la cola. ¿Cuál es la longitud del cocodrilo en cm?

Ⓐ 186; Ⓑ 372; Ⓒ 490; Ⓓ 496; Ⓔ 558.

Problema 16. La figura muestra un dado especial. Los números en caras opuestas siempre suman lo mismo. Los números en las caras no visibles son todos primos. ¿Qué número está en la cara opuesta a la del 14?

Ⓐ 11; Ⓑ 13; Ⓒ 17; Ⓓ 19; Ⓔ 23.

Problema 17. Ana ha caminado 8 km a una velocidad de 4 km/h. Ahora ella correrá cierto tiempo a una velocidad de 8 km/h. ¿Cuánto tiempo debe ella correr para que su velocidad media sea de 5 km/h?

Ⓐ 15 min; Ⓑ 40 min; Ⓒ 20 min; Ⓓ 35 min; Ⓔ 30 min.

Problema 18. Un ajedrecista jugó 40 partidas y obtuvo 25 puntos (una partida ganada vale un punto, una empatada vale medio punto y una perdida vale cero puntos). ¿Cuál es la diferencia entre el número de partidas que ganó y el número de las que perdió?

Ⓐ 5; Ⓑ 7; Ⓒ 10; Ⓓ 12; Ⓔ 15.

Problema 19. Ana, Daniela y Juana querían comprar carteras idénticas. Sin embargo a Ana le faltaba un tercio del precio de la cartera, a Daniela un cuarto y a Juana un quinto. Pero la tienda rebajó el precio de cada cartera en 9,40 Bs y entonces las tres hermanas reunieron sus ahorros y les alcanzó exactamente para comprar tres carteras. ¿Cuál era el precio de una cartera antes de la rebaja?

Ⓐ 12 Bs; Ⓑ 16 Bs; Ⓒ 28 Bs; Ⓓ 36 Bs; Ⓔ 112 Bs.

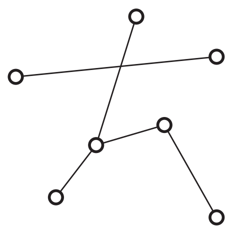
Problema 20. Sean p, q, r enteros positivos tales que $p + \dfrac{1}{q + \frac{1}{r}} = \dfrac{25}{19}$. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a pqr?

Ⓐ 18; Ⓑ 6; Ⓒ 36; Ⓓ 10; Ⓔ 42.

Problema 21. En la ecuación $N \times U \times (M + E + R + O) = 33$, cada letra representa un dígito diferente. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden escoger los valores de las letras para que la ecuación se satisfaga?

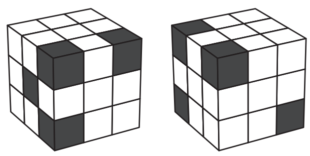
Ⓐ 12; Ⓑ 24; Ⓒ 30; Ⓓ 48; Ⓔ 60.

Problema 22. Carlos desea agregar algunos segmentos a la figura para que cada uno de los siete puntos tenga el mismo número de conexiones a otros puntos. ¿Cuál es el menor número posible de segmentos que debe trazar para lograrlo?



Ⓐ 9; Ⓑ 5; Ⓒ 4; Ⓓ 6; Ⓔ 10.

Problema 23. Un cubo de 3cm de lado se ha construido con 27 cubitos de 1 cm de lado cada uno, algunos de ellos blancos y otros negros. La figura muestra el cubo desde dos puntos de vista diferentes. ¿Cuál es el mayor número posible de cubitos negros que puede haber?



Ⓐ 5; Ⓑ 8; Ⓒ 7; Ⓓ 10; Ⓔ 9.

Problema 24. En cierta isla las ranas son azules o verdes. En el último año, el número de ranas azules aumentó un 60 % mientras que el número de ranas verdes disminuyó el

60 %. La proporción actual de ranas azules a ranas verdes es igual a la proporción de ranas verdes a ranas azules que había hace un año. ¿En qué porcentaje cambió el número total de ranas?

Ⓐ 0 %; Ⓑ 30 %; Ⓒ 20 %; Ⓓ 50 %; Ⓔ 40 %.

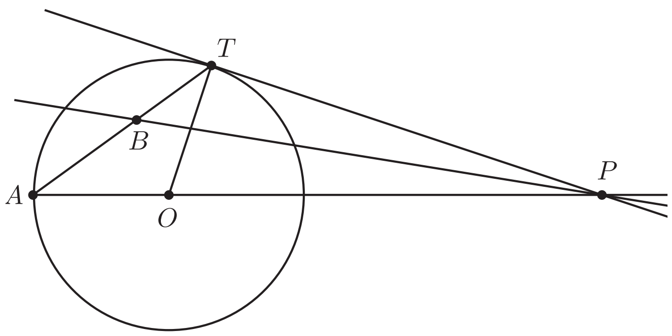
Problema 25. Diego escribió varios enteros positivos distintos, todos ellos menores o iguales a 100. Se sabe que su producto no es divisible entre 18. ¿Cuántos números puede haber escrito Diego, como máximo?

Ⓐ 5; Ⓑ 17; Ⓒ 68; Ⓓ 69; Ⓔ 90.

Problema 26. Tres vértices cualesquiera de un cubo forman un triángulo. ¿Cuántos de esos triángulos no tienen sus vértices en una misma cara del cubo?

Ⓐ 48; Ⓑ 24; Ⓒ 16; Ⓓ 32; Ⓔ 40.

Problema 27. En la figura PT es tangente a la circunferencia de centro O y PB bisecta el ángulo TPA. Calcule la medida del ángulo TBP.

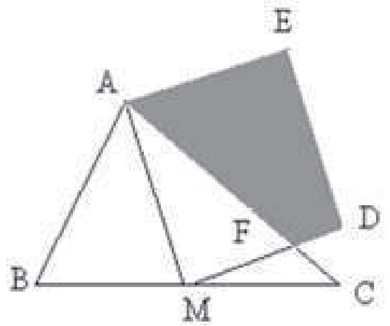


Ⓐ 30°; Ⓑ 45°; Ⓒ 60°; Ⓓ 75°; Ⓔ Depende de la posición de P.

Problema 28. Considere el conjunto de todos los números enteros de 7 dígitos en los cuales se usan todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Si esos números se escriben en una lista en orden creciente y la lista se parte exactamente a la mitad, ¿cuál es el último número de la primera mitad?

Ⓐ 1234567; Ⓑ 3765421; Ⓒ 4376521; Ⓓ 4352617; Ⓔ 4123567.

Problema 29. ABC es un triángulo tal que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm y $BC = 10$ cm. M es el punto medio de BC. $AMDE$ es un cuadrado y MD intersecta a AC en el punto F. Halle el área del cuadrilátero $AFDE$ en cm^2.



Ⓐ $\frac{125}{8}$; Ⓑ $\frac{127}{8}$; Ⓒ $\frac{63}{4}$; Ⓓ $\frac{31}{2}$; Ⓔ 16.

Problema 30. Hay 2014 hombres en una fila. Cada uno de ellos o bien es *mentiroso* (y siempre miente) o bien es *honesto* (y siempre dice la verdad). Cada uno de los 2014 hombres dice «Hay más mentirosos a mi izquierda que honestos a mi derecha». ¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

Ⓐ 0; Ⓑ 1; Ⓒ 2014; Ⓓ 1008; Ⓔ 1007.

1.3.1. Soluciones

1. Si el primero de marzo es jueves, el tercer jueves será el 15. La respuesta correcta es la (B).

2. 70000 m entre 12500 da 6 m. La respuesta correcta es la (D).

3. La respuesta correcta es la (A).

4. La respuesta correcta es la (A).

5. No ocurrió en 2013, ni en 2012, ni en 2011, ni en 2010, pero sí en 2009. Pasaron 5 años (opción C).

6. Si las dimensiones lineales de una figura se multiplican por r, el área se multiplica por r^2. La respuesta correcta es la (E).

7. La respuesta correcta es la (B).

8. La respuesta correcta es la (A).

9. Sean h, m y n el número de hombres adultos, de mujeres adultas y de menores de edad, respectivamente. Entonces $h/m = 2/3$, $m/n = 8$ y se nos pide $(h+m)/n$. Pero

$$\frac{h+m}{n} = \frac{h}{n} + \frac{m}{n} = \frac{h}{m} \cdot \frac{m}{n} + \frac{m}{n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{1} + \frac{8}{1} = \frac{16}{3} + \frac{8}{1} = \frac{40}{3}.$$

La respuesta correcta es la (B).

10. Digamos que ambas válvulas vuelven a estar en su punto más bajo luego de que la rueda grande haya dado x vueltas y la pequeña y vueltas. Entonces $4,2x = 0,9y$, o bien $42x = 9y$, o $14x = 3y$. Los enteros positivos más pequeños que satisfacen esta ecuación son $x = 3$, $y = 14$. Luego la respuesta es $3 \cdot 4,2 = 12,6$ m, opción (C).

11. $100 = 63 + 32 + 4$. La nieta tiene 4 años y nació en el 2010 (opción E).

12. Si un cuadro tiene ancho a y altura b en cm, entonces por Pitágoras la distancia del clavo al borde superior del cuadro es $\sqrt{100^2 - (a/2)^2}$ y la distancia del borde inferior del cuadro al piso en cm es $250 - b - \sqrt{100^2 - (a/2)^2}$. La opción C se descarta pues tiene igual ancho que la B pero menor altura, y la D pues tiene igual ancho que la E pero menor altura. Ahora se tiene, para A, $250 - 40 - \sqrt{100^2 - 30^2} = 210 - \sqrt{9100}$; para B, $250 - 90 - \sqrt{100^2 - (60)^2} = 160 - \sqrt{6400} = 80$ y para E, $250 - 100 - \sqrt{100^2 - (80)^2} = 150 - \sqrt{3600} = 120$. Como $210 - \sqrt{9100} > 210 - \sqrt{10000} = 110$ es claro que el menor valor se alcanza para la opción (B).

13. Hay que repartir los tiempos 9, 11, 13, 18, 22 y 23 en dos grupos lo más parejos posible. Como suman 96, lo ideal sería hacer dos grupos de 48, pero eso no es posible. Lo mejor que se puede hacer es agrupar 11, 13, 23 (suma 47) y 9, 18, 22 (suma 49). Luego a las 7:49 ambos baños estarán desocupados (opción D).

14. Sea L el lado del octágono. Si la región sombreada se rota 90°, 180° y 270° alrededor del centro del octágono, queda sin cubrir un cuadrado central de lado L, y quedan cubiertos dos veces cuatro triángulos isorrectángulos de hipotenusa L. Pero esos 4 triángulos tienen igual área que dos cuadrados de diagonal L, que a su vez tienen igual área que un cuadrado de lado L. Por lo tanto el área del octágono es 4 ve4ces el área de la región sombreada. La respuesta correcta es la (D).

15. Si la longitud del cocodrilo es x, la cola mide $x/3$ y el cocodrilo sin la cola $2x/3$. Luego la cabeza mide $93 = (2x/3)/4 = x/6$, de donde $x = 93 \times 6 = 558$ cm (opción E).

16. Sean p, q y r los primos que se encuentran en las caras opuestas a 14, 18 y 35, respectivamente. Entonces $p + 14 = q + 18 = r + 35$, de donde p y q tienen la misma paridad, pero diferente a la de r. Como hay un solo primo par, el 2, debe ser $r = 2$ y por lo tanto $p = 2 + 35 - 14 = 23$. La respuesta correcta es la (E).

17. Ana tardó 2 h en caminar los primeros 8 km. Si luego corrió durante t h a 8 km/h, habrá recorrido $8 + 8t$ km en $2 + t$ h, y su velocidad media será $(8 + 8t)/(2 + t)$. Para que ésta sea igual a 5 km/h debe ser $8 + 8t = 5(2 + t)$, o $3t = 2$, es decir $t = 2/3$ h o 49 min. La respuesta correcta es la (B).

18. Si ganó g partidas y perdió p, entonces empató $40 - p - g$ y $25 = p + \frac{1}{2}(40 - p - g) = 20 + \frac{1}{2}(p - g)$, de donde $p - g = 2(25 - 20) = 10$. La respuesta correcta es la (C).

19. Si el precio de la cartera era x, entonces

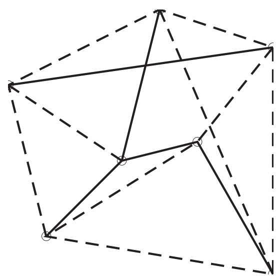
$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = 3 \cdot 9,40) = 28,2 = \frac{141}{5},$$

de donde $(47/60)x = 141/5$ y $x = 36$. La respuesta correcta es la (D).

20. Como $0 < \frac{1}{q+\frac{1}{r}} < 1$ y $\frac{25}{19}1 + \frac{6}{19}$, se sigue que $p = 1$ y $q + \frac{1}{r} = \frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6}$, de donde $q = 3$ y $r = 6$. Entonces $pqr = 18$ (opción A).

21. Como $33 = 3 \cdot 11$, N y U deben ser 1 y 3 en algún orden, y $M + E + R + O = 11$. Los dígitos más pequeños que quedan, 0, 2, 4 y 5, suman 11, luego ellos son M, E, R, O en algún orden. La respuesta es $2 \times 4! = 48$ (opción D).

22. Hay que llevar todos los puntos a grado k (es decir a k conexiones), con $k \geq 3$ pues ya hay un punto de grado 3. Pero $k = 3$ es imposible pues la suma de todos los grados es igual al doble del número de segmentos, que es par, mientras que $7 \times 3 = 21$ es impar. El siguiente valor a ensayar es $k = 4$, para el cual sí se puede lograr como muestra la figuram agregando 9 segmentos (opsión A).



23. Además de los 5 visibles sólo puede haber 4 cubitos negros adicionales: el central del cubo grande, el central de la base y dos en la cara opuesta a la que tiene 3. La respuesta correcta es la (E).

24. Digamos que hace un año había A ranas azules y V ranas verdes. Entonces hoy hay $1,6A$ ranas azules y $0,4V$ ranas verdes. el último año, el número de ranas azules aumentó un 60 % mientras que el número de ranas verdes disminuyó el 60 %. Como $\frac{1,6A}{0,4V} = \frac{V}{A}$ se deduce que $(V/A)^2 = 1,6/0,4 = 4$ y $V/A = 2$, es decir que $V = 2A$. Entonces hace un año había $A+V = A+2A = 3A$ ranas en total, y hoy hay $1,6A+0,4V = 1,6A+0,8A = 2,4A$. Es decir que la población de ranas disminuyó en $0,6A$, que es un 30 % de la población de hace un añp. La opción correcta es entonces la (C).

25. Si no escribe números pares, Diego puede escribir a lo sumo 50 números. Si escribe algún número par, entonces la única restricción que tiene es que puede escribir a lo sumo un múltiplo de 3, que no lo sea de 0. Así el máximo posible es 68, que se consigue con los $100 - 33 = 67$ números que no son múltiplos de 3, y un múltiplo de 3 pero no de 9 (como por ejemplo el 3 o el 6). La respuesta correcta es la (C).

26. Los triángulos que tienen sus vértices en una misma cara del cubo son $6 \times 4 = 24$. Como el total de triángulos es $\binom{8}{3} = 56$, la respuesta es $56 - 24 = 32$, opción (D).

27. Sea $\alpha = \angle TPB = \angle BPA$. Entonces $\angle TOP = 90° - 2\alpha$, y como $\triangle OAT$ es isósceles, $\angle OAT = \angle OTA = 45° - \alpha$. Luego $\angle BTP = \angle OTA + 90° = 135° - \alpha$ y $\angle TBP = 180° - \alpha - (135° - \alpha) = 45°$. La respuesta correcta es la (B).

28. Observe que los números de la lista pueden agruparse de a pares $abcdefg$, $(8-a)(8-b)\dots(8-g)$ de números simétricamente ubicados respecto al 4444444 (que no es de la lista). Así el número buscado debe ser el mayor de la lista que sea menor que 4444444, y ese es 4376521. La respuesta correcta es la (C).

29. Como $6^2 + 8^2 = 10^2$, ABC es rectángulo en A y $MA = MB = MC = 5$. Luego $\triangle MAC$ es isósceles, $\angle MAF = \angle ACB$ y $\triangle FMA \sim \triangle BAC$. Luego $FA/BC = MA/AC = 4/8$, de donde $FA = 50/8$. Ahora $FA/AC = 50/64$, $[AFM] = [ACM]50/64 = 75/8$, $[AFDE] = 25 - 75/8 = 125/8$. La respuesta correcta es la (A).

30. Numeremos los hombres del 1 al 2014, de izquierda a derecha. Claramente el 1 miente y el 2014 dice la verdad. Si $1,2,\dots,k$ son mentirosos y $2014,2013,\dots,2015-k$ son honestos, para algún k con $1 \le k < 1007$, entonces $k+1$ es mentiroso y $2014-k$ es honesto. De esto se sigue que $1,2,\dots,1007$ son are mentirosos y $1008,\dots,2014$ son honestoss. Luego la opción correcta es la (E).

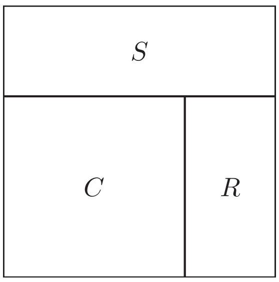
Capítulo 2

Prueba Regional

La prueba regional de la OJM consta de cinco problemas, que se valoran en una escala de 1 a 7. Los participantes disponen de tres horas y media para resolverlos.

2.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. La figura muestra un cuadrado que ha sido dividido en un cuadrado más pequeño C y dos rectángulos R y S. Se sabe que el perímetro de R es 16 cm y que el área de S es 24 cm^2. Calcule el área de C.



Problema 2. En un partido de fútbol el ganador obtiene 3 puntos y el perdedor 0. Si empatan, cada equipo obtiene 1 punto. Los equipos A, B, C y D jugaron un torneo. Cada uno de ellos jugó exactamente una vez contra cada uno de los otros. El equipo A obtuvo 7 puntos y los equipos B y C obtuvieron 4 puntos cada uno. ¿Cuántos puntos obtuvo el equipo D?

Problema 3. Halle el menor entero positivo múltiplo de 9 cuyos dígitos sean todos pares.

Problema 4. (a) Reemplace cada $\diamond$ por un signo de operación aritmética $(+, -, \times, \div)$ de nodo que se cumpla la siguiente igualdad:

$$1 \diamond 2 \diamond 3 \diamond 4 \diamond 5 \diamond 6 \diamond 7 \diamond 8 \diamond 9 = 100.$$

(b) Halle otra solución para la parte (a).

Problema 5. ¿Cuántos años está cumpliendo hoy el abuelo de Juan, si tiene menos de 100 años y su año de nacimiento es un cuadrado perfecto?

2.1.1. Soluciones

1. Llamemos U al cuadrado grande. Como C es un cuadrado, la diferencia entre la base de U y la base de C es igual a la diferencia entre la altura de U y la altura de C, de donde el ancho de R es igual a la altura de S. Luego la altura de R más el ancho de R es igual a la altura de R más la altura de D, que es el lado de U. Se sigue que el perímetro de R es el doble del lado de U, por lo tanto el lado de U mide 8 cm. Entonces la altura de S es $24/8 = 3$ cm. Se sigue que el lado de C es $8 - 3 = 5$ cm. Luego el área de C es $5^2 = 25$ cm^2.

2. La única manera de sumar 7 puntos en 3 juegos es $3+3+1$, luego A debió ganar dos partidos y empatar uno. La única manera de sumar 4 puntos en 3 juegos es $3 + 1 + 0$. Luego tanto B como C debieron ganar un partido, empatar otro y perder otro. Como por cada juego ganado hay uno perdido, por cada 3 en la tabla debe haber un 0. Y los unos deben aparecer en la tabla en cantidad par, pues al empatar dos equipos cada uno de ellos se anota un 1. Como entre A, B y C hay tres 3, un 1 y un 0, en los resultados de D deben haber dos ceros y un 1. Luego D obtuvo 1 punto.

3. Si es múltiplo de 9 entonces la suma de sus dígitos también es múltiplo de 9, y como los dígitos son pares esa suma es al menos 18. Para alcanzar esa suma se necesitan al menos tres dígitos: 2, 8 y 8 ó 4, 6 y 8 ó 6, 6 y 6. El menor es 288.

4. He aquí algunas soluciones:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 = 100,$$

$$1 + 2 - 3 \times 4 + 5 \times 6 + 7 + 8 \times 9 = 100,$$
$$1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 + 7 + 8 \times 9 = 100,$$
$$1 + 2 - 3 \times 4 - 5 + 6 \times 7 + 8 \times 9 = 100,$$
$$1 - 2 + 3 \times 4 \times 5 + 6 \times 7 + 8 - 9 = 100.$$

5. Como $43^2 = 1849$, $44^2 = 1936$ y $45^2 = 2025$, el abuelo sólo pudo haber nacido en 1936 y por lo tanto está cumpliendo $2014 - 1936 = 78$ años.

2.2. Prueba de Segundo Año

Los primeros cuatro problemas de Segundo Año fueron los mismos que los de Primer Año (ver pág. 29). Las pruebas sólo se diferenciaron en el problema 5, que se enuncia a continuación.

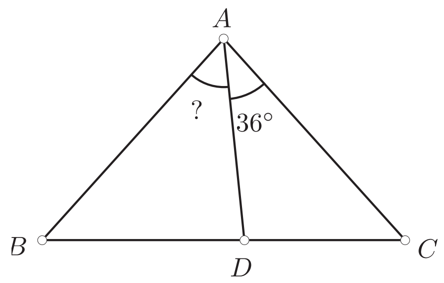
Problema 5. Iván multiplica los enteros pares positivos consecutivos ($2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots$) hasta que el resultado sea divisible entre 2014. ¿Cuál es el último factor por el cual multiplicó Iván?

2.2.1. Soluciones

5. Como $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, Iván debe multiplicar hasta por 106 para que el factor 53 aparezca en el producto. En ese momento ya ha aparecido el 38, así que el producto será divisible entre 2014.

2.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Si $AB = AC$, $AD = BD$ y $\angle DAC = 36°$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle BAD$?



Problema 2. Idéntico al Problema 2 de Primer Año (ver pág. 29).

Problema 3. Idéntico al Problema 5 de Segundo Año (ver pág. 31).

Problema 4. Si $x + y = 4$ y $x^2 + y^2 = 10$, determine el valor de $x^4 + y^4$.

Problema 5. Halle todos los números naturales de tres dígitos tales que el producto de sus dígitos es igual a diez veces la suma de sus dígitos.

2.3.1. Soluciones

1. Sea $x = \angle BAD$. Entonces $\angle ABD = x$ (pues $\triangle ABD$ es isósceles) y $\angle ACB = \angle ABC = x$ (pues $\triangle ABC$ es isósceles). Sumando los ángulos del $\triangle ABC$ resulta $3x+36 = 180$, de donde $3x = 144$ y $x = 48°$.

4. $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 4^2 - 10 = 6$, de donde $xy = 3$. Como $(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$ resulta $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 = 10^2 - 2\cdot 3^2 = 82$.

5. Como el producto de los dígitos es múltiplo de 10, uno de los dígitos debe ser 5 ó 0. Pero 0 no puede ser, pues el producto de los dígitos sería 0 y su suma debería también ser 0, lo cual es imposible (al menos el dígito de las centenas debe ser positivo). Sean b y c los otros dígitos. Entonces $5bc = 10(5+b+c)$, de donde $bc = 2(5+b+c)$, $(b-2)(c-2) = 14$, y $b-2$ y $c-2$ deben ser 2 y 7, es decir que b y c son 4 y 9, en algún orden. Con 5, 4 y 9 se forman los 6 números 459, 495, 549, 594, 945 y 954.

2.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Una caja contiene 900 tarjetas numeradas del 100 al 999 (cada número aparece en una y sólo una tarjeta). María toma algunas tarjetas sin mirar y calcula la suma de los dígitos en cada una de ellas. ¿Cuántas tarjetas debe tomar, como mínimo, para asegurarse de tener tres tarjetas con la misma suma de dígitos?

Problema 2. Sea ABC un triángulo. En el lado AC se toma un punto D tal que $AD = AB$. Si $\angle ABC - \angle ACB = 30°$, ¿cuál es la medida de $\angle CBD$?

Problema 3. Halle todas las ternas de enteros (a,b,c) tales que $a > b > c > 1$ y $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$.

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 31).

Problema 5. Idéntico al Problema 5 de Tercer Año (ver pág. 31).

2.4.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es 53. Hay 27 sumas posibles que van desde $1+0+0 = 1$ hasta $9+9+9 = 27$. Pero el 1 y el 27 sólo se presentan una vez cada uno (tarjetas 100 y 999) mientras que las demás sumas se presentan al menos 2 veces.

Si se toman 52 tarjetas no puede asegurarse que haya tres con la misma suma, ya que podrían tomarse la 100, la 999 y 25 parejas de igual suma (por ejemplo 101 y 110, 102 y 111,..., hasta 989 y 998). De esta manera no habría tres tarjetas con igual suma.

Pero si se toman 53 tarjetas, necesariamente debe haber tres con igual suma. En efecto, parejas de igual suma puede haber a lo sumo 25 (con sumas desde 2 hasta 26). De las 3 tarjetas restantes, una puede ser 100 y otra 999, pero la tercera debe tener igual suma que la de alguna pareja.

2. Como ADB es isósceles, se tiene $\angle ABD = \angle ADB$. Y como $\angle ADB$ es ángulo exterior del triángulo CBD, se tiene $\angle ADB = \angle ACB + \angle CBD$. Por lo tanto $\angle ABD - \angle ACB = \angle ADB - \angle ACB = \angle CBD$. Entonces

$$30^\circ = \angle ABC - \angle ACB = \angle CBD + \angle ABD - \angle ACB = 2\angle CBD,$$

de donde $\angle CBD = 15^\circ$.

3. Si $c \geq 3$ entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} < 1$. Por lo tanto debe ser $c = 2$. Entonces debe cumplirse $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, con $a > b \geq 3$. Si $b \geq 4$ entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Luego debe ser $b = 3$. Finalmente debe sumplirse $\frac{1}{a} > \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, es decir que a puede ser 4 ó 5. En definitiva hay dos ternas que cumplen las condiciones: $(4, 3, 2)$ y $(5, 3, 2)$.

2.5. Prueba de Quinto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Cuarto Año (ver pág. 32).

Problema 2. Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año (ver pág. 32).

Problema 3. Idéntico al Problema 5 de Tercer Año (ver pág. 31).

Problema 4. (a) Halle números racionales x, y, z diferentes de cero tales que $x+y+z = 0$ y $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

(b) Sean x, y, z números racionales diferentes de cero tales que los números $a = x+y+z$ y

$b = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ sean enteros. Pruebe que $a^2 + b^2 \geq 1$.

Problema 5. Dos polígonos regulares de lado 1 tienen un lado común AB y se hallan a distinto lado de la recta AB. Uno de ellos tiene 15 vértices $A, B, C, D, \ldots$ y el otro tiene n vértices $A, B, Z, Y, \ldots$. Determine el valor de n para que la distancia de C a Z sea 1.

2.5.1. Soluciones

4. (a) Aquí basta con dar una solución racional, por ejemplo $x = y = 3/2$, $z = -3$. Pero pueden hallarse todas poniendo $y = tx$, con lo cual $z = -x - y = -(1+t)x$ y

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{tx} - \frac{1}{(1+t)x} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right),$$

de donde $x = 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$. Así por ejemplo para $t = 1$ se obtiene $(x, y, z) = (3/2, 3/2, -3)$, y para $t = 2$ se obtiene $(7/6, 7/3, -7/2)$.

(b) Como a y b son enteros, el único valor menor que 1 que podría tomar $a^2 + b^2$ es 0, y eso si y sólo si a y b son 0 simultáneamente. Pero eso no puede ocurrir pues entonces $z = -x - y$, $1/x + 1/y = -1/z = 1/(x + y)$, y multiplicando ambos miembros por xy resulta $x + y = xy/(x + y)$, de donde $(x + y)^2 = xy$ y $x^2 + y^2 + xy = 0$. Pero esto es absurdo pues $x^2 + y^2 + xy = (x + y/2)^2 + 3y^2/4$ sólo puede ser 0 si $x = y = 0$.

5. Para que $CZ = 1$ el triángulo BCZ debe ser equilátero y $\angle CBZ = 60°$. Como $\angle ZBA = 180(n - 2)/n$ y $\angle CBA = 180 \cdot 13/15 = 156°$, debe cumplirse entonces que $180(n - 2)/n + 156 + 60 = 360$, o sea $180(n - 2)/n = 144$, de donde $180(n - 2) = 144n$, $36n = 360$ y $n = 10$.

Capítulo 3

Prueba Final

La prueba final de la OJM 2014 se realizó en la Universidad Central de Venezuela, Caracas, el sábado 21 de junio. La prueba constó de cuatro problemas, cada uno de ellos con un valor de 7 puntos. Los participantes dispusieron de tres horas y media para resolverlos.

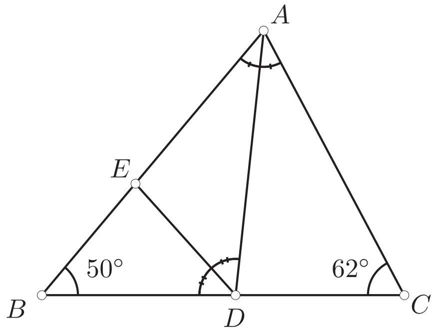
3.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. Juan escribe una sucesión de números: 2, 3, 6, 8,... en la cual cada término, a partir del tercero, es igual al dígito de las unidades del producto de los dos términos que lo preceden. Por ejemplo $2 \times 3 = 6$, luego el tercer término es 6, y como $3 \times 6 = 18$, el cuarto término es 8. ¿Qué número escribirá Juan en la posición 2014?

Problema 2. A cada fila de un tablero de 3×3 Juan le ha asociado un número (a, b, c en la figura). Igualmente a cada columna le ha asociado un número (d, e, f). En cada casilla Claudia debe escribir la suma de los números correspondientes a su fila y su columna, por ejemplo en la casilla superior izquierda debe escribir el valor de la suma $a + d$. El problema es que Claudia no conoce los números a, b, c, d, e y f. Pero Juan, como pista, ha escrito algunos de los números que van en el tablero. ¿Podrá Claudia completar los que faltan? En caso afirmativo, explique cómo.

	d	e	f
a	6		13
b			14
c	9	12	

Problema 3. Sea ABC un triángulo con $\angle ABC = 50°$ y $\angle ACB = 62°$. Por el vértice A se traza la bisectriz del $\angle BAC$, que corta al lado BC en D. Por D se traza la bisectriz del $\angle ADB$, que corta al lado AB en E. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo ADE?



Problema 4. En una reunión internacional hay hombres y mujeres de diversas nacionalidades. En total hay 25 personas, y se sabe que en cualquier grupo formado por cinco de ellas hay al menos dos de la misma nacionalidad. Pruebe que en la reunión hay cuatro personas de la misma nacionalidad y el mismo sexo.

3.1.1. Soluciones

1. Los primeros términos son 2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, y se observa que el par 6, 8 (tercer y cuarto términos) se repite en las posiciones novena y décima. Por lo tanto, a partir del tercer término la sucesión será periódica con período de longitud 6. La posición 2014 es lo mismo que la 2012 si se comienza a contar desde el tercer término, y como $2012 = 6 \cdot 335 + 2$, el término buscado es igual al segundo contando desde el tercero, es decir 8.

2. Si cuatro casillas son vértices de un rectángulo y están en las filas x, y y las columnas z, w, entonces las sumas de las casillas de cada par de vértices opuestos son iguales, ya que una suma es $(x + z) + (y + w)$ y la otra es $(x + w) + (y + z)$. En el rectángulo que tiene en 3 de sus vértices 6, 13 y 14, el cuarto vértice (la casilla debajo del 6) debe ser entonces $6 + 14 - 13 = 7$. Análogamente 6, 9 y 12 nos dan que a la derecha del 6 va $12 + 6 - 9 = 9$. Entonces en el centro del tablero va $7 + 9 - 6 = 10$ y en la casilla inferior izquierda va $9 + 13 - 6 = 16$.

3. $\angle BAC = 180° - 50° - 62° = 68°$, luego $\angle DAC = 34°$ y $\angle ADB = 34° + 62° = 96°$ (por ser exterior del $\triangle DAC$). Entonces $\angle ADE = 48°$, $\angle EAD = 34°$ y $\angle AED = 180° - 34° - 48° = 98°$.

4. Debe haber 13 personas de un mismo sexo, ya que si hubiese a lo sumo 12 hombres y a lo sumo 12 mujeres, el total de personas no llegaría a 25. Entre esas 13 personas del mismo sexo no puede haber 5 de nacionalidades diferentes, luego son de a lo sumo 4 nacionalidades. Si hubiese menos de 4 de cada nacionalidad, serían a lo sumo $4 \times 3 = 12 < 13$. Luego debe haber 4 de la misma nacionalidad, que son también del mismo sexo.

Solución alternativa: Como no puede haber 5 personas de nacionalidades diferentes, hay a lo sumo 4 nacionalidades diferentes. Si hubiese menos de 7 personas de cada nacionalidad, el número de personas sería a lo sumo $4 \times 6 = 24 < 25$. Luego debe haber al menos 7 personas de una misma nacionalidad. Entre esas 7 personas debe haber 4 de un mismo sexo, pues si hubiese a lo sumo 3 de cada sexo, en total serían a lo sumo 6. Luego hay 4 personas del mismo sexo y la misma nacionalidad.

3.2. Prueba de Segundo Año

Los problemas 1, 2 y 3 de Segundo Año son los mismos que los problemas 1, 2 y 3 de Primer Año (ver pág. 35).

Problema 4. En una isla mágica hay leones, lobos y chivos. Los lobos pueden comer chivos y los leones pueden comer tanto lobos como chivos. Pero si un león se come un lobo, el león se convierte en chivo. Igualmente si un lobo come un chivo, el lobo se convierte en león. Y si un león come un chivo, el león se convierte en lobo. Inicialmente en la isla hay 17 chivos, 55 lobos y 6 leones. Si comienzan a comerse hasta que ya no sea posible comer más, ¿cuál es el máximo número de animales que pueden quedar vivos?

3.2.1. Soluciones

4. Cuando un animal se come a otro, el número de una de las especies aumenta en 1 y el número de cada una de las otras dos disminuye en 1. Por lo tanto todas cambian de paridad. Inicialmente el número de lobos y el de chivos tienen igual paridad, y diferente a la del número de leones. Esta situación se mantendrá siempre.

La única forma de que cese la comilona es que queden animales de un solo tipo, y sólo pueden ser leones, ya que el número de lobos y el de chivos son siempre de igual paridad (y distinta a la de los leones). El número inicial de leones (6) sólo puede aumentar cuando un lobo se come a un chivo. Hay 17 chivos originales, y pueden surgir otros como reencarnación de leones. Pero cada vez que un lobo se come a un chivo que no sea original, antes debe haber desaparecido un león. Así que el número de leones como máximo puede llegar a $6+17 = 23$. Sólo falta ver un ejemplo en el cual queden 23 leones, lo cual es fácil: inicialmente (leones, lobos, chivos)$= (6, 55, 17)$. Si 17 lobos se comen 17 chivos quedan (23,38,0). Luego 19 leones se comen 19 lobos y quedan (4,19,19). Finalmente 19 lobos se comen 19 chivos y quedan (23,0,0).

3.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Primer Año (ver pág. 35).

Problema 2. Halle dos enteros positivos diferentes cuyo producto sea igual a 13 veces su suma.

Problema 3. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero $ABCD$ se cortan en un punto interior E. El área del triángulo ABE mide 6 cm^2, la del triángulo CDE mide también 6 cm^2 y la del triángulo BCE mide 12 cm^2.

(a) Pruebe que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio.

(b) ¿Cuánto mide el área del cuadrilátero $ABCD$?

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Segundo Año (ver pág. 37).

3.3.1. Soluciones

2. Se deben hallar dos naturales $m \neq n$ tales que $mn = 13(m+n)$. Entonces 13 divide al menos a uno de ellos, digamos a m. Pongamos $m = 13M$ y nos queda $13Mn = 13(13M+n)$, de donde $Mn = 13M+n$, $M(n-13) = n$ y $n-13$ divide a $n = (n-13)+13$. Entonces $n-13$ divide a 13. Como $n-13$ debe ser positivo (pues $M(n-13) = n$), sólo hay dos posibilidades: que $n-13$ sea 1 o que sea 13. Si $n-13 = 1$ entonces $n = 14$, $M = n = 14$ y $m = 13M = 182$. Si $n-13 = 13$ entonces $n = 26$, $13M = 26$, $M = 2$ y $m = 26$, que se descarta pues debe ser $m \neq n$. Luego la única solución es 14 y 182.

Solución alternativa I: Se deben hallar dos naturales $m \neq n$ tales que $mn = 13(m+n)$, o bien $mn-13m-13n = 0$. Sumando 13^2 a ambos miembros queda $mn-13m-13n+13^2 = 13^2$, que se factoriza como $(m-13)(n-13) = 13^2$. Como $m \neq n$, debe ser también $m-13 \neq n-13$. Como 13 es primo, la única manera de expresar 13^2 como producto de dos factores diferentes es $1 \cdot 169$. De $m-13 = 1$ y $n-13 = 169$ se obtienen $m = 14$ y $n = 182$, luego la respuesta es 14 y 182.

Solución alternativa II: Se deben hallar dos naturales $m \neq n$ tales que $mn = 13(m+n)$, o sea $mn - 13m = 13n$, de donde $m(n-13) = 13n$ y

$$m = \frac{13n}{n-13} = \frac{13(n-13)+13^2}{n-13} = 13 + \frac{169}{n-13}.$$

Entonces $n-13$ debe ser un divisor de 169. Las posibilidades para $n-13$ son entonces 1, 13, 169, -1, -13 y -169, que nos dan para n los valores 14, 26, 182, 12, 0 y -156. Los dos últimos valores se descartan pues no son positivos. También se descarta $n = 12$ pues da $m = -156$. $n = 26$ se descarta pues da $m = 26 = n$. Finalmente $n = 14$ da $m = 182$, y $n = 182$ da $m = 14$. Luego hay una única solución, 14 y 182.

3. (a) El área del $\triangle ABC$ es $6+12 = 18$ cm^2, y el área del $\triangle BCD$ es $12+6 = 18$ cm^2. Como estos dos triángulos tienen áreas iguales y la misma base BC, sus alturas respecto a ésta también deben ser iguales. Por lo tanto A y D están a igual distancia de la recta BC, de donde AD es paralela a BC y $ABCD$ es un trapecio.

(b) Como el área del $\triangle BCE$ es el doble del área del $\triangle ABE$ y ambos triángulos tienen la misma altura respecto a la recta AC, el segmento EC debe ser el doble del AE. Entonces el $\triangle CDE$ debe tener área doble del $\triangle ADE$, y por lo tanto el área del $\triangle ADE$ es 3 cm^2. Finalmente, el área del cuadrilátero es la suma de las áreas de los triángulos ABE, BCE, CDE y DEA, es decir $6 + 12 + 6 + 3 = 27$ cm^2.

3.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Todos los boletos para la primera fila en un teatro fueron vendidos. Los asientos están numerados en forma consecutiva a partir del 1. Por error, para uno de los asientos se vendieron dos boletos. Si la suma de los números de asiento en los boletos vendidos de esa fila es 857, ¿cuál es el número del asiento del cual se vendieron dos boletos?

Problema 2. Sea f una función de los reales positivos en los reales positivos, tal que

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

para todos los $x, y > 0$.

(a) Halle $f(1)$.

(b) Halle una expresión para $f(x)$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea D el pie de la perpendicular desde A a BC, sea E el punto donde la bisectriz del ángulo en A corta al lado BC y sea F el punto medio del lado BC. Pruebe que $\angle DAE = \angle EAF$.

Problema 4. Diego construye una sucesión de enteros de la siguiente manera: comienza por escribir 2, 0, 1, 4, y a partir de aquí suma los últimos cuatro números escritos y escribe el dígito de las unidades de esa suma. Así, los primeros términos de la sucesión son 2, 0, 1, 4, 7, 2, 4,...

(a) ¿Aparecerán de nuevo en esta secuencia los números iniciales 2, 0, 1, 4, consecutivos y en ese orden?

(b) ¿Aparecerán en esta secuencia los números 2, 0, 1, 5, consecutivos y en ese orden?

3.4.1. Soluciones

1. La respuesta es 37. Si hay n asientos en la primera fila, sus números suman $S(n) = n(n+1)/2$. Si el asiento que se vendió dos veces es x, entonces se tiene que $S(n)+x = 857$. Pero $1 \leq x \leq n$, luego $S(n) + 1 \leq 857 \leq S(n) + n$. Probando con algunos valores de n se encuentra que $S(41) + 1 = 41 \cdot 42/2 + 1 = 862 > 857$, luego debe ser $n \leq 40$. Para $n = 40$ se tiene $S(40) = 820$ y de $S(n) + x = 857$ se obtiene $x = 857 - 820 = 37$, que es la solución pues $1 \leq 37 \leq 40$. Esta solución es única, ya que si $n \leq 39$ entonces $S(n) + n \leq S(39) + 39 = 780 + 39 = 819 < 857$.

2. (a) Poniendo $x = y = 1$ resulta $f(1)^2 - f(1) = 1 + 1 = 2$. Esto es una ecuación de segundo grado en $f(1)$, que tiene raíces $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{9})$, es decir 2 y -1. Descartamos -1 pues f sólo toma valores positivos, es decir que $f(1) = 2$.

(b) Poniendo $y = 1$ en la ecuación y usando que $f(1) = 2$ resulta $2f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x}$, de donde $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

3. La circunferencia de diámetro BC pasa por A, por ser $\angle BAC$ recto. Luego F es el circuncentro del triángulo ABC, y en particular $FA = FB$. Luego el triángulo FAB es isósceles y

$$\angle FAB = \angle FBA = 90^\circ - \angle ACD = \angle CAD.$$

Como $\angle EAB = \angle EAC$, restando miembro a miembro las dos últimas igualdades se tiene

$$\angle FAB - \angle EAB = \angle CAD - \angle EAC,$$

o sea $\angle EAF = \angle DAE$.

Por supuesto que la misma demostración puede realizarse intercambiando los roles de B y C.

4. (a) La respuesta es que sí. En efecto, como solo hay un número finito de posibles cuaternas de dígitos consecutivos (de hecho, hay $10^4 = 10000$) en la sucesión necesariamente debe haber una cuaterna que se repita. Sea a, b, c, d la primera cuaterna que aparece en la sucesión y que más tarde se repite. Si esta cuaterna no fuese la inicial 2, 0, 1, 4, entonces estaría precedida por un término x tal que $x + a + b + c$ termina en d. Sea y el término que precede a la *segunda* aparición de a, b, c, d. Es claro que también $y+a+b+c$ termina en d. Como $|x - y| = |(x + a + b + c) - (y + a + b + c)|$ termina en cero, y x e y son dígitos, se sigue que $x = y$. Pero entonces la cuaterna x, a, b, c se repite y aparece por segunda vez antes que la a, b, c, d, contra lo supuesto de que ésta era la primera que se repetía. Por lo tanto 2, 0, 1, 4 no sólo se repite, sino que es la primera cuaterna que lo hace.

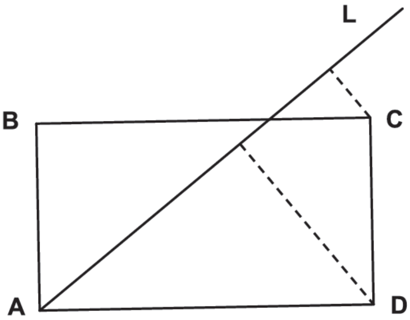
(b) La respuesta es que no. Si observamos la paridad de los términos de la secuencia, poniendo P para un par e I para un impar, los cinco primeros son $PPIPI$. Afirmamos que este patrón se repite en los 5 siguientes. En efecto, la suma $P + I + P + I$ es par, luego sigue P y se tiene $PPIPIP$; $I + P + I + P$ también es par, y se tiene $PPIPIPP$; ahora $P + I + P + P$ es impar, y se tiene $PPIPIPPI$. Ahora $I + P + P + I$ es par, y se tiene $PPIPIPPIP$. Y como $P + P + I + P$ es impar, sigue I y se tiene $PPIPIPPIPI$. Es claro que este patrón se repite indefinidamente, y que nunca aparecerán dos impares juntos. Luego la secuencia 2, 0, 1, 5 no puede aparecer, ya que es del tipo $PPII$.

3.5. Prueba de Quinto Año

Problema 1. Considere las dos operaciones siguientes que pueden ser aplicadas a una fracción: (1) aumentar el numerador en 8; (2) aumentar el denominador en 7. Comenzando con la fracción $\frac{7}{8}$, luego de realizar un total de n operaciones de los tipos descritos, en algún orden, se obtuvo una fracción de igual valor. ¿Cuál es el menor valor posible de n?

Problema 2. Idéntico al Problema 2 de Cuarto Año (ver pág. 39).

Problema 3. La recta L pasa por el vértice A de un rectángulo $ABCD$. La distancia del punto C a L es 2, y la distancia del punto D a L es 6. Si AD mide el doble que AB, ¿cuánto mide AD?



Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año (ver pág. 39).

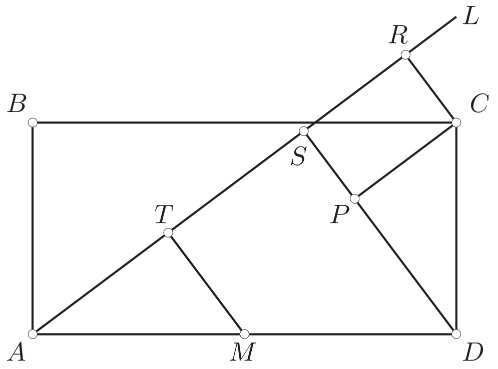
3.5.1. Soluciones

1. Supongamos que se realizaron k operaciones de tipo 1 y $n-k$ operaciones de tipo 2. Entonces debe cumplirse que

$$\frac{7+8k}{8+7(n-k)} = \frac{7}{8}.$$

Esto equivale a $8(7+8k) = 7(8+7n-7k)$, o bien $64k = 49(n-k)$, o finalmente $113k = 49n$. Como 113 es primo, para que esto ocurra n debe ser múltiplo de 113. Entonces el menor número posible de operaciones es 113, con 49 de tipo 1 y 64 de tipo 2.

3. Sea M el punto medio de AD. Sean R, S y T los pies de las perpendiculares trazadas desde C, D y M, respectivamente, a la recta L. Sea P el pie de la perpendicular trazada desde C a DS. Como $AD = 2AB$, se tiene $AM = CD$. Además $\angle ATM = \angle DPC = 90°$ y $\angle AMT = \angle ADS = 90° - \angle CDP = \angle DCP$. Luego $\triangle ATM$ y $\triangle DPC$ son congruentes y $CP = TM$.



Ahora bien, como $DS = 6$ y $CR = 2$, se tiene $MT = DS/2 = 3$ y $DP = DS - PS = 6 - CR = 4$. Por lo tanto $CP = TM = 3$, y por Pitágoras en el $\triangle CPD$ resulta $CD = \sqrt{CP^2 + DP^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Finalmente, $AD = 2CD = 10$.

Capítulo 4

Olimpiada de Mayo

La Olimpiada de Mayo es una competencia matemática internacional coordinada por la Olimpiada Matemática Argentina (OMA). Consiste en una prueba escrita de 3 horas de duración y consta de dos niveles: el primer nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 13 años hasta el 31 de diciembre del año anterior a la prueba, y el segundo nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 15 años hasta el 31 de Diciembre del año anterior a la prueba. Cada país participante envía las diez mejores pruebas de cada nivel a la Argentina para ser puntuadas junto con las de los demás países y premiadas por OMA.

4.1. Problemas del Primer Nivel

Problema 1. Un número natural N es *bueno* si sus dígitos son 1, 2 ó 3 y todos los números de 2 dígitos formados por dígitos ubicados en posiciones consecutivas de N son números distintos. ¿Hay algún número bueno de 10 dígitos? ¿Y de 11 dígitos?

Problema 2. Beatriz tiene tres dados en cuyas caras están escritas letras diferentes. Al tirar los tres dados sobre una mesa, y eligiendo cada vez solamente las letras de las caras de arriba, formó las palabras OSA, VIA, OCA, ESA, SOL, GOL, FIA, REY, SUR, MIA, PIO, ATE, FIN y VID. Determinar las seis letras de cada dado.

Problema 3. Se tienen nueve cajas. En la primera hay 1 piedra, en la segunda hay 2 piedras, en la tercera hay 3 piedras, y así siguiendo, en la octava hay 8 piedras y en la novena hay 9 piedras. La operación permitida es sacar el mismo número de piedras de dos cajas distintas y colocarlas en una tercera caja. El objetivo es que todas las piedras estén en una sola caja. Describir cómo hacerlo con el número mínimo de operaciones permitidas. Explicar porqué es imposible lograrlo con menos operaciones.

Problema 4. Sea ABC un triángulo rectángulo e isósceles, con $\angle ACB = 90°$. Sean M el punto medio de AB y N el punto medio de AC. Sea P tal que MNP es un triángulo equilátero con P en el interior del cuadrilátero $MBCN$. Calcular la medida del ángulo $\angle CAP$.

Problema 5. Dadas 6 bolitas: 2 blancas, 2 verdes, 2 rojas, se sabe que hay una blanca, una verde y una roja que pesan 99 g cada una y que las demás bolitas pesan 101 g cada una. Determinar el peso de cada bolita usando dos veces una balanza de dos platos.

ACLARACIÓN: Una balanza de dos platos sólo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

4.2. Soluciones del Primer Nivel

1. Un número bueno N de k dígitos define $k-1$ números de dos dígitos formados por dígitos consecutivos de N. Estos $k-1$ números son distintos. Por otra parte, hay en total 9 números de dos dígitos que se forman con los dígitos 1, 2 y 3. Luego $k-1 \leq 9$, o sea $k \leq 10$. Entonces no hay número bueno con 11 dígitos. Sí los hay con 10 dígitos, por ejemplo $N = 1121322331$.

2. Ubicamos las letras en la siguiente tabla, evitando que las letras que forman una misma palabra estén en el mismo dado y eligiendo las palabras que nos permitan armar la tabla. Teniendo en cuenta que no hay letras repetidas, la C, E, T, L y G quedan sucesivamente determinadas. Por VIA y PIO, la I debe estar en el dado 2, luego V, P, D, M, F y N quedan determinadas. Por REY y SUR la R queda en el dado 3, y quedan determinadas Y, U.

Palabra	Dado 1	Dado 2	Dado 3
OSA	O	S	A
OCA		C	
ESA	E		
ATE		T	
SOL			L
GOL		G	
VIA	V	I	
PIO			P
VID			D
MIA	M		
FIA	F		
FIN			N
REY		Y	R
SUR	U		

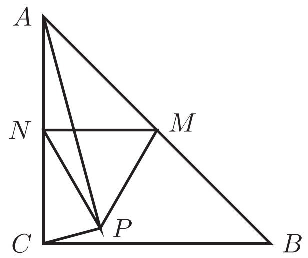
Las letras que están en los dados son: O, E, V, M, F, U; S, T, G, I, Y, C; A, L, P, D, N, R.

3. Sacamos una piedra de cada una de las cajas 2 y 4 y las colocamos en la caja 5. De este modo tenemos la distribución 1, 1, 3, 3, 7, 6, 7, 8, 9. Ahora pasamos las piedras de las cajas 1 y 2 (hay una en cada una) a la caja 6. Tenemos 0, 0, 3, 3, 7, 8, 7, 8, 9. Hay tres pares de cajas con el mismo número de piedras: 3, 3; 7, 7; 8, 8. Las siguientes tres operaciones llevan las piedras de estas 6 cajas a la última caja:

$0, 0, 3, 3, 7, 8, 7, 8, 9 \to 0, 0, 0, 0, 7, 8, 7, 8, 15$
$\to 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 8, 29 \to 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 45.$

Hicimos, en total, 5 operaciones. Veamos que 4 operaciones no son suficientes. Reunir a todas las piedras en una sola caja significa vaciar 8 cajas. En una operación se pueden vaciar a lo sumo 2 cajas, de manera que si hubiera una solución con 4 operaciones entonces cada una de ellas debe vaciar exactamente 2 cajas. Esto vale en particular para la primera operación. Sin embargo, es imposible porque la distribución inicial no tiene dos cajas con la misma cantidad de piedras.

4. Sea $\alpha = \angle CAP$. Como M y N son puntos medios de los lados AB y AC, tenemos que MN es paralelo a BC, y en consecuencia el triángulo AMN es rectángulo e isósceles, pues sus ángulos son iguales a los del ABC. Luego $AN = MN$. Por otra parte, dado que MNP es equilátero, es $MN = NP$. Por lo tanto, $AN = NP$ y tenemos que el triángulo ANP es isósceles, con $\angle APN = \angle PAN = \alpha$. En este triángulo, el ángulo $\angle CNP$ es exterior, luego $\angle CNP = 2\alpha$. Calculemos este ángulo: $\angle CNP = \angle CNM - \angle MNP = 90° - 60° = 30°$, pues MN es perpendicular a AC y $\angle MNP$ es un ángulo del triángulo equilátero MNP. Finalmente, de $2\alpha = 30°$ se deduce que $\alpha = 15°$.



5. Rotulamos las bolitas B_1, B_2 (blancas), V_1, V_2 (verdes), R_1, R_2 (rojas). En la primera pesada comparamos B_1, V_1 con B_2, R_1. Si hay equilibrio, como una de B_1, B_2 es liviana y la otra pesada, lo mismo ocurre con V_1, R_1. Además cada plato contiene una liviana y una pesada, y si conocemos de qué clase es una de las bolitas B_1, B_2, V_1, V_2, sabemos de qué clase es cada bolita. Entonces, en la segunda pesada comparamos V_1 y R_1. No puede haber equilibrio (una es pesada y la otra liviana). Luego, con esta pesada conocemos de qué clase son V_1 y R_1, y entonces también conocemos B_1 y B_2, como hemos explicado.

Si $B_1 + V_1 < B_2 + R_1$ (el caso $B_1 + V_1 > B_2 + R_1$ es simétrico del anterior, basta intercambiar los colores V y R) entonces B_2 debe ser pesada y B_1 liviana. Luego, hay tres posibilidades para el par V_1, R_1: liviana, liviana; pesada, pesada; liviana, pesada. En efecto, V_1 pesada y R_1 liviana queda excluido. Ahora comparamos B_1, B_2 con V_1, R_1. Si hay equilibrio, V_1 liviana, R_1 pesada; si $B_1 + B_2 < V_1 + R_1$, entonces V_1, R_1 son pesadas; si $B_1 + B_2 < V_1 + R_1$ entonces V_1, R_1 son livianas.

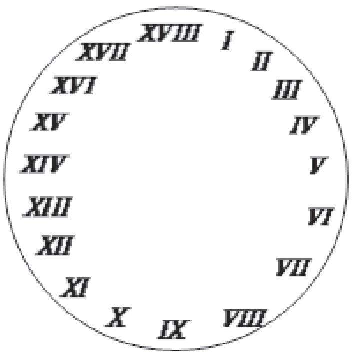
4.3. Problemas del Segundo Nivel

Problema 1. El sendero que va del pueblo hasta el refugio en la montaña tiene 76 km. Un grupo de andinistas lo recorrió en 10 días, de manera tal que en dos días consecutivos nunca caminaron más de 16 km, pero en tres días consecutivos siempre caminaron por lo menos 23 km. Determinar la máxima cantidad de kilómetros que pudieron haber recorrido en un día.

Problema 2. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, sean M, N, P y Q los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Si los segmentos MP y NQ dividen al $ABCD$ en cuatro cuadriláteros con la misma área, demostrar que $ABCD$ es un paralelogramo.

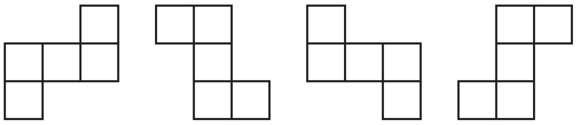
Problema 3. Ana y Luca juegan al siguiente juego. Ana escribe una lista de n números enteros distintos. Luca gana si puede elegir cuatro números distintos a, b, c y d, de modo que el número $a + b - (c + d)$ sea múltiplo de 20. Determinar el mínimo valor de n para el que, cualquiera que sea la lista de Ana, Luca pueda ganar.

Problema 4. En una excavación en la antigua Roma se encontró un reloj inusual con 18 divisiones marcadas con números romanos (ver figura).



Desgraciadamente el reloj estaba roto en 5 pedazos. La suma de los números en cada pedazo era la misma. Mostrar de qué manera pudo estar roto el reloj.

Problema 5. Cada casilla de un tablero de $n \times n$, con $n \geq 3$, está coloreada con uno de 8 colores. ¿Para qué valores de n se puede afirmar que alguna de estas figuras



incluida en el tablero, contiene dos casillas del mismo color?

4.4. Soluciones del Segundo Nivel

1. Sea k_i el número de kilómetros recorridos el día i. Por las condiciones del problema se tiene

$$\begin{array}{rl} k_1+k_2 \le 16, & k_1+k_2+k_3 \ge 23, \\ k_2+k_3 \le 16, & k_2+k_3+k_4 \ge 23, \\ \dots & \dots \\ k_8+k_9 \le 16, & k_8+k_9+k_{10} \ge 23. \\ k_9+k_{10} \le 16. & \end{array}$$

y $k_1+k_2+\cdots+k_9+k_{10}=76$. Entonces,

$$76 = k_1+(k_2+k_3+k_4)+(k_5+k_6+k_7)+(k_8+k_9+k_{10}) \ge k_1+3\cdot 23,$$

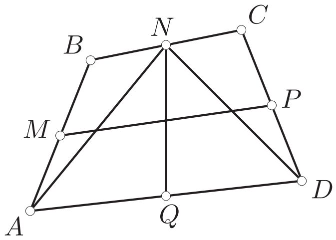
de donde $k_1 \le 76-69=7 \qquad (1)$.

Además $23 \le k_1+k_2+k_3 \le 7+k_2+k_3$, de donde $16 \le k_2+k_3$. Y como $k_2+k_3 \le 16$, resulta $k_2+k_3=16$. Ahora de $23 \le k_1+k_2+k_3 \le k_1+16$ resulta $k_1 \le 7$, y de aquí y (1) resulta $k_1=7$.

Análogamente se prueba que $k_4=k_7=k_{10}=7$ y que $k_5+k_6=k_8+k_9=16$. Finalmente, como $16 \ge k_1+k_2=7+k_2$ se tiene $k_2 \le 16-7=9$. La mayor cantidad de kilómetros que pudieron recorrer en un día es 9 km. Una posible distribución de los kilómetros recorridos cada día es:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}
7	9	7	7	9	7	7	9	7	7

2. Como $AQ=QD$ entonces $[ANQ]=[QND]$. Pero por el dato del problema se tiene que $[ABNQ]=[QNCD]$, entonces $[ABN]=[NCD]$. También se conoce que $BN=NC$, entonces A y D están a la misma distancia de la recta BC, y los lados AD y BC son paralelos. Análogamente se demuestra que los lados AB y CD son paralelos, con lo cual $ABCD$ es un paralelogramo.

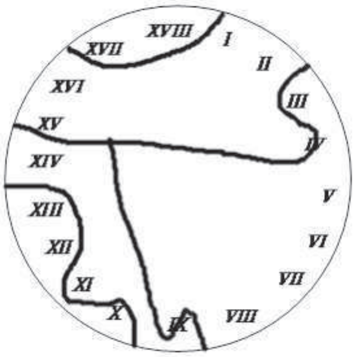


3. El menor valor posible es $n = 9$. Veamos que con cualquier lista de 9 números enteros, Luca puede ganar. Sean a_1, a_2,..., a_9 los nueve números de la lista de Ana y sean r_1, r_2,..., r_9 sus restos en la división por 20. Si entre estos restos hay al menos 7 diferentes, con 7 de estos podrán formarse $\binom{7}{2} = 21$ parejas distintas; es seguro entonces que Luca podrá elegir dos parejas (a, b) y (c, d) tales que las sumas $a + b$ y $c + d$ den el mismo resto en la división entre 20 y a, b, c, d sean distintos (pues si dos parejas tienen un elemento común y sus sumas son iguales, los otros dos elementos también serían iguales y las parejas serían idénticas). Esas dos parejas permiten que Luca gane.

Si entre los r_i hay como mucho seis valores diferentes, puede entonces asegurarse que habrá o bien uno de ellos que figure cuatro veces, o bien dos distintos que figuren al menos dos veces cada uno. En el primer caso, supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Entonces Luca elige las parejas (a_1, a_2) y (a_3, a_4) y gana. En el segundo, supongamos que $x_1 = x_2$ y $x_3 = x_4$. Entonces Luca elige las parejas (a_1, a_3) y (a_2, a_4) y gana.

Con menos de 8 números Luca no puede asegurarse la victoria. Si Ana le presenta, por ejemplo la lista 1, 2, 4, 7, 12, 20, 40, 60, entonces cualquiera que sea la elección de cuatro números a, b, c y d que Luca haga, el número $a + b - (c + d)$ no será múltiplo de 20. En efecto, es claro que se puede sustituir cada número por su resto en la división por 20, con lo que nos queda la lista (reordenada) 0, 0, 0, 1, 2, 4, 7, 12, en la cual dos términos cualesquiera suman menos de 20 y cada número es mayor que la suma de dos cualesquiera más pequeños. De esta forma, $a + b - (c + d)$ será múltiplo de 20 si y sólo si $a + b - (c + d) = 0$, es decir si y sólo si $a + b = c + d$. Pero si por ejemplo a es el mayor de los cuatro números, entonces $a + b \geq a > c + d$.

4. La suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 18 = 171$ no es divisible por 5. Esto significa que algunos de los números romanos deben estar "rotos" (algunos caracteres en un pedazo y los demás en otro). Pero para la mayoría de los números romanos, al dividirse de esta manera, no cambia la suma total, por ejemplo $XIII = XII + I = XI + II = X + III$; $VIII = VII + I = VI + II = V + III$, etc. Las únicas excepciones son IV, IX y XIV, y sólo con las divisiones $IV \to I + V$, $IX \to I + X$, $XIV \to XI + V$. Con cada una de estas rupturas, la suma 171 aumenta en 2. Para hacerlo divisible por 5, exactamente dos de los números IV, IX y XIV se deben romper como se explicó. La suma es $172 + 2 + 2 = 175$; la suma de cada pedazo debe ser $175/5 = 35$. En la figura se muestra una posibilidad de ruptura.



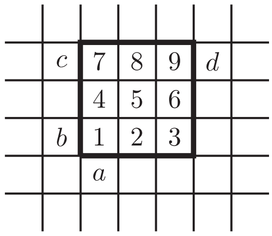
5. La respuesta es para todo $n \geq 5$. Para $n = 3$ y $n = 4$ consideremos las coloraciones de las figuras:

6	7	8
3	4	5
1	2	1

4	2	1	3
2	7	8	1
3	5	6	4
1	3	4	2

En ellas falla la propiedad enunciada. Para $n = 3$ no hay figura de la forma deseada que cubra las dos casillas con 1. Para $n = 4$, por simetría, basta probar que no hay dos casilla con 1 cubiertas por una forma como la deseada. Si una de estas casillas fuera la inferior izquierda, toda forma que la contenga no posee casillas fuera del cuadrado inferior izquierdo de 3×3. Si no, las dos casillas con 1 son vecinas en diagonal. Si una forma las contiene a ambas, entonces también contiene una tercera casilla que completa a una diagonal de longitud 3. Sin embargo el tablero de 4×4 no contiene una tal diagonal. Ahora sea $n \geq 5$. El hecho clave es que en tal caso el tablero de $n \times n$ contiene un cuadrado Q de 3×3 cuyas casillas son interiores (no del borde). Mostraremos que para todo par de casillas de Q hay una forma que las contiene a ambas. Luego, como en Q hay 9 casillas coloreadas con 8 colores, 2 de las casillas llevan el mismo color. De modo que la forma que las contiene es la que necesitamos para completar nuestra solución.

Rotulemos las casillas de Q con 1, 2,..., 9. Por simetría, basta justificar la afirmación si una de las dos casillas es 1, 2 ó 5. Rotulemos cuatro casillas adicionales con a, b, c y d como en la figura.



Para la casilla 1 consideramos las formas $a1236$, $b1478$ y 12589. Cada una de ellas contiene a 1, y cada una de las restantes casillas de Q está en una de las formas. De modo similar, para la casilla 2 consideramos las formas $2147c$, $2369d$ y 12589. Cada una de ellas contiene a 2, y cada una de las restantes casillas de Q está en una de las formas. Para la casilla 5 basta considerar las formas 12589 y 36547.

Capítulo 5

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe tuvo lugar en San José, Costa Rica, desde el 6 hasta el 14 de junio de 2014. Participaron doce países: Colombia, Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Amanda Vanegas (San Francisco, Edo. Zulia), Iván Rodríguez (Santiago de León, Caracas) y Wemp Pacheco (Calicantina, Edo. Aragua). El Jefe de la delegación fue José Heber Nieto y la tutora Estefanía Ordaz.

Iván Rodríguez obtuvo medalla de bronce, Amanda Vanegas y Wemp Pacheco sendas menciones honoríficas.

5.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Un entero positivo se denomina *tico* si es el producto de tres números primos diferentes que suman 74. Verifique que 2014 es tico. ¿Cuál será el próximo año tico? ¿Cuál será el último año tico de la historia?

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD, inscrito en una circunferencia de centro O. Sea P la intersección de las rectas BC y AD. Una circunferencia por O y P corta a los segmentos BC y AD en puntos interiores F y G, respectivamente. Muestre que $BF = DG$.

Problema 3. Sean a, b, c y d números reales todos distintos entre sí, tales que

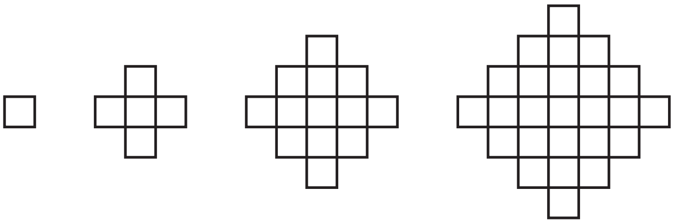
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4, \qquad y \qquad ac=bd.$$

Determine elo máximo valor posible de

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}.$$

Segundo Día

Problema 4. Con cuadrados de lado 1 se forma en cada etapa una figura en forma de escalera, siguiendo el patrón del dibujo.



Por ejemplo, la primera etapa utiliza 1 cuadrado, la segunda utiliza 5, etc. Determine la última etapa para la cual la figura correspondiente utiliza menos de 2014 cuadrados.

Problema 5. Se marcan los puntos A, B, C y D sobre una recta, en esae orden, con AB y CD mayores que BC. Se construyen triángulos equiláteros APB, BCQ y CDR, con P, Q y R en el mismo lado respecto a AD. Si $\angle PQR = 120°$, pruebe que

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{BC}.$$

Problema 6. Un entero positivo n es *divertido* si para todo d divisor positivo de n, $d+2$ es un número primo. Encuentre todos los números divertidos que tengan la mayor cantidad posible de divisores.

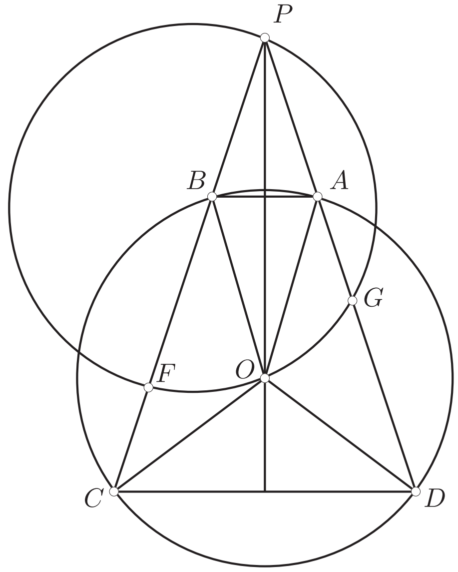
5.2. Soluciones

1. 2014 es tico pues $2014 = 2\cdot 19\cdot 53$ y $2+19+53=74$.

Si la suma de tres números primos diferentes es 74, uno de ellos debe ser el 2 (si no los tres serían impares y su suma también). Es decir que los números ticos son los de la forma $2p(72-p)$ con p y $72-p$ primos. Como $p(72-p)=36^2-(p-36)^2$ es mayor cuanto más cercano a 36 sea p, para hallar los ticos mayores que 2014 debemos buscar los primos

p tales que $72 - p$ sea primo y $19 < p < 36$. El 23 no sirve pues $72 - 23 = 49$ no es primo. Aólo quedan $p_1 = 29$ y $p_2 = 31$. Entonces el siguiente año tico será el $2 \cdot 29 \cdot 43 = 2494$ y el siguiente y último será el $2 \cdot 31 \cdot 41 = 2542$.

2. Como las bases AB y CD del trapecio son paralelas, la perpendicular a ellas m por O es mediatriz de ambas. Por lo tanto el trapecio es isósceles y $AD = BC$. Además P está en m y $\angle CPO = \angle DPO$, de donde los arcos $\widehat{OF}$ y $\widehat{OG}$ de la circunferencia por O, P, F y G son iguales, y por lo tanto las cuerdas también, es decir $OF = OG$.



Los triángulos CBO y DAO son isósceles y congruentes, entonces $\angle FBO = \angle GDO$. Como $FOGP$ es cíclico y convexo, entonces $\angle BFO = \angle OGD$, y se sigue que $\angle BOF = \angle DOG$. Dado que $OB = OD$ porque son radios, por el criterio LAL los triángulos BFO y DGO son congruentes y se concluye que $BF = DG$.

3. Sean $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$. Dado que $ac = bd$ se tiene

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{a} = \frac{c}{b} = \frac{1}{y}, \quad \frac{a}{c} = xy, \quad \frac{b}{d} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{y}{x}.$$

por lo tanto lo que se busca es el máximo valor de

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

sujeto a la condición

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 4. \qquad (*)$$

Pongamos $m = x + \frac{1}{x}$, $n = y + \frac{1}{y}$. Se debe hallar el máximo de mn sujeto a la condición $m + n = 4$.

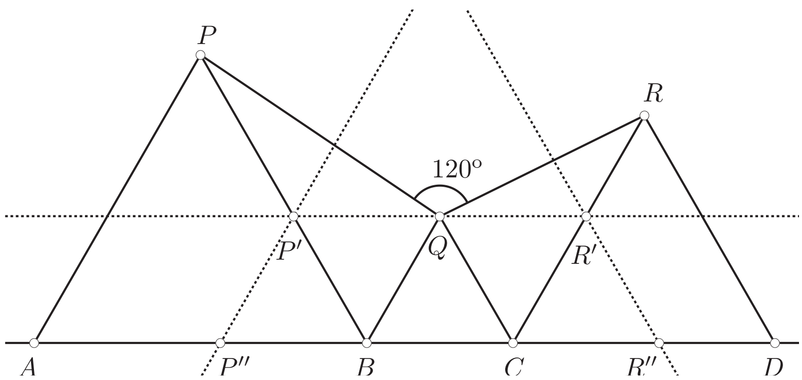
Ahora bien, si $w > 0$ entonces $w + \frac{1}{w} = \left(\sqrt{w} - \frac{1}{\sqrt{w}}\right)^2 + 2 \geq 2$, con igualdad si y sólo si $\sqrt{w} = \frac{1}{\sqrt{w}}$, es decir si $w = 1$. Por consiguiente, si tanto x como y son positivos, de (*) se sigue que $x = y = 1$, de donde $a = b = c$ contradiciendo el enunciado.

Por (*) tampoco pueden ser x e y ambos negativos, Entonces debe ser uno positivo y el otro negativo, Supongamos $y < 0 < x$ (el caso $x < 0 < y$ es análogo). Entonces $n \leq -2$, de donde $m = 4 - n \geq 6$ y $mn \leq -12$. Para probar que -12 es el máximo buscado, basta mostrar un ejemplo en el cual se alcance ese valor. Y para eso basta tomar $x = 3 + 2\sqrt{2}$ (este valor sale de resolver $x + \frac{1}{x} = 6$), $y = -1$, y

$$a = 3 + 2\sqrt{2}, b = 1, c = -1, d = -3 - 2\sqrt{2}.$$

4. La fila central de la etapa n tiene $2n + 1$ cuadrados. Las n filas superiores tienen entonces $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2$ cuadrados, y las $n - 1$ filas inferiores $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = (n - 1)^2$ cuadrados, para un total de $n^2 + (n - 1)^2$ cuadrados. Para la etapa 32 se necesitan $31^2 + 32^2 = 961 + 1024 = 1985$ cuadrados, y para la etapa 33 se necesitan $32^2 + 33^2 = 1024 + 1089 = 2113$, luego la última etapa que se puede completar con menos de 2014 cuadrados es la 32.

5. Consideramos la recta paralela a AD que pasa por el punto Q y llamamos P' al punto de intersección de dicha recta con PB y R' al punto de intersección con RC. Trazamos las rectas por P' y R' que sean paralelas a AP y DR respectivamente y llamamos P'' y R'' a sus puntos de intersección con la recta AD, respectivamente.



Como $P''P'B$, $P'BQ$, BQC, QCR' y $CR'R''$ son triángulos equiláteros, entonces tenemos que $P''B = P'Q = BC = QR' = R''C$, y por lo tanto $PP' = AP'' = AB - P''B = AB - BC$ y $RR' = DR'' = CD - R''C = CD - BC$.

Además se tiene que $CQR'R = \angle ACR = \angle DBP = \angle PP'Q = 120°$, y que

$$\begin{aligned}\angle R'RQ &= \angle CRQ = 180° - \angle QCR - \angle RQC = 120° - \angle RQC \\ &= 360° - \angle BQC - \angle PQR - \angle BQP' - \angle RQC = \angle P'QP,\end{aligned}$$

por lo que $\triangle R'RQ \sim \triangle P'QP$ y $\frac{PP'}{P'Q} = \frac{QR'}{RR'}$, de donde

$$\frac{AB - BC}{BC} = \frac{BC}{CD - BC}.$$

Sumando 1 a ambos lados obtenemos

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{CD - BC},$$

de donde

$$\frac{BC}{AB} = 1 - \frac{BC}{CD}$$

y finalmente

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}.$$

6. Sea n un número divertido. Observemos que n debe ser impar, ya que $2+2 = 4$ no es primo. Además n no puede tener factores primos $p \equiv 1 \pmod 3$, pues $p+2 \equiv 0 \pmod 3$ no sería primo. Y si tiene un factor primo $p \equiv 2 \pmod 3$, éste debe aparecer en n con exponente 1, ya que $p^2 + 2 \equiv 2 \cdot 2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ no es primo. por la misma razón no puede tener dos factores primos distintos, ambos $\equiv 2 \pmod 3$. Luego n debe ser de alguna de las formas 3^k, p o $3^k p$, con $p \equiv 2 \pmod 3$ primo.

De la forma 3^k se verifica que solamente 3, 3^2, 3^3 y 3^4 son divertidos, y de ellos el que tiene más divisores es 3^4, con 5 divisores.

Los de la forma p sólo tienen 2 divisores.

De la forma $3^k \cdot 5$ el divertido con más divisores es $3^3 \cdot 5 = 135$, con 8 divisores ($3^4 \cdot 5 = 405$ no es divertido pues $407 = 11 \cdot 37$ no es primo).

Para los de la forma $3^k p$ con $p > 5$, observamos que:

Si $p \equiv 1 \pmod 5$ entonces $3p + 2 \equiv 0 \pmod 5$.

Si $p \equiv 2 \pmod 5$ entonces $3^2 p + 2 \equiv 0 \pmod 5$.

Si $p \equiv 3 \pmod 5$ entonces $p + 2 \equiv 0 \pmod 5$.

Si $p \equiv 4 \pmod 5$ entonces $3^3 p + 2 \equiv 0 \pmod 5$.

Por lo tanto $k \le 2$ y estos números tienen a lo sumo $3 \cdot 2 = 6$ divisores.

En definitiva el máximo número de divisores que puede tener un número divertido es 8, y se alcanza únicamente para el 135.

Capítulo 6

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

La XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemática tuvo lugar en San Pedro Sula, Honduras, del 19 al 27 de septiembre de 2014. En la misma participaron 22 países: Argentina, Bolivia, Brasil, Cuba, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, república Dominicana, Uruguay y Venezuela. México ganó la Copa Puerto Rico. Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Rafael Aznar (Los Arcos, Distrito Capital) y (Bella Vista, Edo. Aragua). La jefa de la delegación fue Estefanía Ordaz y la tutora Sofía Taylor.

En esta Olimpiada Rafael Aznar y José Guevara obtuvieron sendas Medallas de Bronce.

6.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Para cada entero positivo n, se define $s(n)$ como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

Problema 2. Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c, se cumple que

$$xP(x-c) = (x-2014)P(x).$$

Problema 3. Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Segundo Día

Problema 4. Se tienen N monedas, de las cuales $N-1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersecta a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Problema 6. Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ y, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de f si $f(a) = a$.
Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x.
Dado un número entero positivo n, decimos que $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ es *catracha* si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Pruebe que:

a) Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

b) Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

6.2. Soluciones

1. Supongamos que k tiene menos de 4 dígitos. Como $s(k) = s(1001k) = s(1000k + k) = 2s(k)$ se llega a $s(k) = 0$, lo cual es una contradicción.

Supongamos que k tiene exactamente 4 dígitos, $k = \overline{abcd}$. Notemos que $1001k = \overline{abcd000} + \overline{abcd}$ que termina en $\overline{bcd}$, por lo tanto $s(\overline{abcd} + a) = a$. Si $\overline{abcd} + a \leq 9999$, su dígito de la izquierda sería al menos a y entonces $s(\overline{abcd} + a) > a$ pues $9999 \geq \overline{abcd} + a > \overline{a000}$, una contradicción. Por lo tanto $\overline{abcd} + a > 9999$. De aquí se concluye que $a = b = c = 9$ y finalmente como $s(\overline{999d} + 9) = a = 9$ se tiene que $d = 9$, por lo tanto $k = 9999$ es la única posibilidad de 4 dígitos.

Ahora veamos que $k = 9999$ cumple la condición, es decir que para $r = 1, 2, 3, \ldots, 2014$, se tiene que $s(kr) = s(k) = 36$. A esos valores de r los pensamos como números de 4 dígitos $\overline{wxyz}$ (agregando ceros a la izquierda si es necesario), además podemos suponer que r no termina en 0 ya que si t es el número que resulta de quitarle a r los ceros de la derecha hasta que el dígito de las unidades sea diferente de cero, es claro que $s(9999r) = s(9999t)$. Entonces

$$\begin{aligned} s(9999r) &= s(10000r - r) = s(\overline{wxyz0000} - \overline{wxyz}) \\ &= s(\overline{wxy(z-1)(9-w)(9-x)(9-y)(10-z)}) \\ &= w + x + y + z - 1 + 9 - w + 9 - x + 9 - y + 10 - z \\ &= 36, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba de que $k = 9999$ es el mínimo.

2. Observemos que no hay ninguna solución con P constante, pues debería ser $P(x) = 1$ y entonces $x = x - 2014$, absurdo. Busquemos soluciones de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Entonces

$$x(a_n(x-c)^n + a_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + a_0) = (x - 2014)(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0),$$

de donde

$$a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - nca_n)x^n + \cdots = a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - 2014a_n)x^n + \cdots$$

Entonces $a_{n-1} - nca_n = a_{n-1} - 2014a_n$, o sea $nc = 2014$. Por lo tanto n debe ser un divisor entero positivo de 2014, es decir un elemento del conjunto $\{1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007, 2014\}$, y $c = 2014/n$.

Dado un par (n, c) de éstos, poniendo $x = nc = 2014$ en $xP(x - c) = (x - 2014)P(x)$ resulta que $P((n-1)c) = 0$. Poniendo ahora $x = (n-1)c$ resulta $P((n-2)c) = 0$, y así sucesivamente se llega a que $P((n-1)c) = P((n-2)c) = \cdots = P(2c) = P(c) = P(0) = 0$. Por lo tanto $P(x) = bx(x-c)(x-2c)\cdots(x-(n-1)c)$ para alguna constante b. Poniendo $x = 2014$ se tiene

$$1 = P(2014) = P(nc) = bnc(n-1)c(n-2)c \cdots 2c \cdot c = bc^n n!,$$

luego hay 8 soluciones de la forma

$$P(x) = \frac{1}{c^n n!} x(x-c)(x-2c)\cdots(x-(n-1)c),$$

para $n \in \{1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007, 2014\}$ y $c = 2014/n$. Por ejemplo para $n = 1$ se tiene $\frac{1}{2014}x$, para $n = 2$ se tiene $\frac{1}{2 \cdot 1007^2}x(x - 1007)$, etc.

3. Resolveremos el problema para $2n$ puntos, suponiendo sin pérdida de generalidad que estos puntos forman un $2n$-gono regular. La respuesta es $n^2/2$. Primero daremos un ejemplo con esta suma, y luego probaremos que ella no puede ser sobrepasada.

Ejemplo: Sobre los segmentos que unen puntos consecutivos de la circunferencia, escribimos $1/2n$. Sobre los segmentos que unen puntos a "distáncia" de 2 arcos, escribimos $2/2n$. En general, sobre los segmentos que unen puntos a "distáncia" de $k \leq n$ arcos, escribimos $k/2n$. Como para cada $k < n$ hay $2n$ segmentos con extremos a distancia k arcos, y para $k = n$ hay sólo n de esos segmentos (los diámetros), la suma total será:

$$2n\left(\frac{1}{2n} + \frac{2}{2n} + \cdots + \frac{n-1}{2n}\right) + n\frac{n}{2n} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

Para este ejemplo se cumple que la suma de los números escritos en los lados de cualquier polígono convexo cuyos vértices sean algunos de los 2014 puntos es menor o igual que 1. En efecto, numeremos los puntos de 1 a 2014 en sentido antihorario y supongamos que los vértices del polígono son los puntos $i_1, i_2, \ldots, i_k$, con $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2n$. Si todos los arcos orientados de i_r a i_{r+1} y el de i_k a i_1 son menores o iguales que una semicircunferencia, la suma será

$$\frac{i_2 - i_1}{2n} + \frac{i_3 - i_2}{2n} + \cdots + \frac{i_k - i_{k-1}}{2n} + \frac{2n - (i_1 - i_k)}{2n} = \frac{2n}{2n} = 1.$$

Si uno de los arcos es mayor que una semicircunferencia, suponiendo sin pérdida de generalidad que sea el que va de i_k a i_1 (es decir que $i_k - i_1 < n$), entonces la suma será

$$\frac{i_2 - i_1}{2n} + \frac{i_3 - i_2}{2n} + \cdots + \frac{i_k - i_{k-1}}{2n} + \frac{i_k - i_1}{2n} = \frac{2(i_k - i_1)}{2n} = \frac{i_k - i_1}{n} < \frac{n}{n} = 1.$$

Probemos ahora que la suma S no puede superar a 1. Sea S_1 la suma de los números correspondientes a diámetros. Considere la suma sobre todos los lados de todos los rectángulos com vértices en los $2n$ puntos. Cada segmento que no es diámetro es lado de exactamente un rectángulo. Por otro lado, como cada rectángulo queda determinado por sus dos diagonales no ordenadas, que son diámetros, hay $\binom{n}{2}$ rectángulos. Por lo tanto:

$$S - S_1 \leq \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1}$$

Ahora considere la suma sobre todos los triángulos rectángulos con véetices en los $2n$ puntos. Cada lado que no es diámetro es lado de exactamente 2 de esos triángulos, mientras qye cada diámetro es lado de exactamente $2n - 2$ de esos triángulos. Por otro lado, hay exactamente $n(2n-2)$ triángulos rectángulos (pues cada uno de ellos queda determinado por un diámetro y un vértice no perteneciente al diámetro). Por lo tanto $2(S - S_1) + (2n-2)S_1 \leq n(2n-2)$, es decir que

$$2S + (2n-4)S_1 \leq n(2n-2). \tag{2}$$

Ahora, si se multiplica (1) por $2n-4$ y se suma a (2), resulta:

$$(2n-2)S \leq \frac{n(n-1)(2n-4)}{2} + n(2n-2),$$

de donde $S \leq n^2/2$.

4. Es claro que ni $N=1$ ni $N=2$ son admisibles. Tampoco lo es $N=3$, pues la única manera de proceder es comparar dos monedas, una en cada plato: si hay equilibrio, las dos son auténticas y no se pueden usar más. Luego la tercera moneda es falsa pero no se puede decidir si es más pesada o más liviana que las auténticas. De modo que, en general no se puede lograr el objetivo. Una inducción simple nos permite concluir lo mismo para todo N impar. Ya hemos visto los casos base $N=1$ y $N=3$; supongamos que los impares menores que $2k+1$ no son admisibles. Dadas $2k+1$ monedas, la primera pesada debe involucrar m monedas en cada plato ($1 \leq m \leq k$), en total $2m$ monedas. Si el resultado es de equilibrio, entonces esas $2m$ monedas son auténticas y deben ignorarse en las siguientes pesadas. Entonces la tarea se reduce al caso $2(k-m)+1$, que no es admisible por hipótesis inductiva. Veamos ahora que todo $N \geq 4$ par es admisible. De nuevo procedemos por inducción, con casos base $N=4$ y $N=6$ y paso inductivo $2k \to 2k+4$. Para $N=4$ comenzamos comparando las monedas 1 y 2 con las 3 y 4. No puede haber equilibrio, de modo que todas las monedas se pueden volver a usar. Supongamos que el grupo 1, 2 es más liviano que el 3, 4. Entonces la falsa está entre 1 y 2 si es más liviana, y entre 3 y 4 si es más pesada. Comparamos 1 y 2. Si hay equilibrio, ambas son auténticas (y no se pueden usar de nuevo) y la falsa está entre 3 y 4, y es más pesada que las auténticas. Luego comparamos 3 con 4, que serán de pesos distintos. La más pesada será la falsa. Si una entre 1 y 2 es más liviana, entonces ésa es la falsa (ésta tiene que estar entre 1 y 2 en este caso, y por ende, ser la más liviana).

Para $N=6$ comparamos 1, 2, 3 con 4, 5, 6. No puede haber equilibrio y todas las monedas pueden volver a usarse. Supongamos que el grupo 1, 2, 3 es más liviano que el 4, 5, 6. Entonces la falsa está entre 1, 2, 3 (entre 4, 5, 6) si y solo si es más liviana (más pesada). Ahora comparamos 1, 2 con 3, 4. Si hay equilibrio entonces 1, 2, 3, 4 son auténticas (y no se pueden volver a usar). La falsa es 5 o 6, luego es más pesada. De modo que comparamos 5 y 6; una de ellas es más pesada y es la moneda falsa. Supongamos que el grupo 1, 2 es más pesado que el grupo 3, 4. Entonces lo anterior implica que la moneda falsa es 3, y es más liviana. Finalmente, si el grupo 1, 2 más liviano que el grupo 3, 4, entonces la moneda falsa está entre 1, 2 (y es más liviana) o es 4, y es más pesada. Comparamos 1 y 2. Si son del mismo peso entonces 4 es la falsa y es más pesada; si no, la más liviana entre 1, 2 es la falsa.

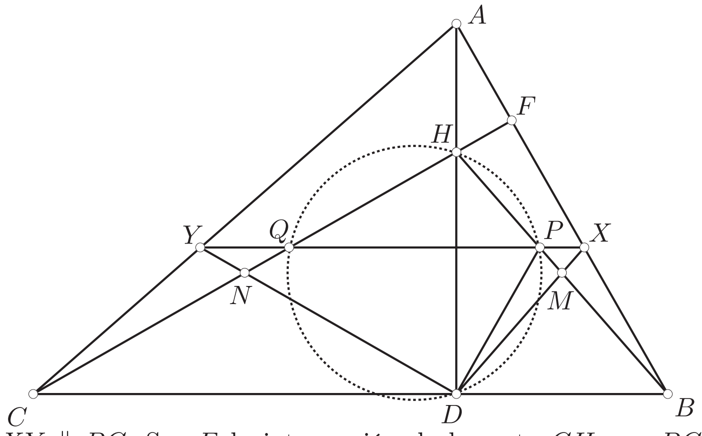
Para el paso inductivo $2k \to 2k+4$ consideremos $2k+4$ monedas con la propiedad dada, y comparemos 1, 2 con 3, 4. Si hay equilibrio, ignoramos esas cuatro monedas. Se aplica la hipótesis inductiva a las $2k$ monedas restantes y listo. Si en cambio no hay equilibrio, la moneda falsa es una de las cuatro. Como las cuatro se pueden usar de nuevo, la tarea se reduce al caso base $N=4$ que ya hemos analizado.

5. Aplicando el Teorema de Menelao a los triángulos ACH y ABH con las rectas CH y BH respectivamente, se tiene que

$$\frac{AY}{YC}\frac{CN}{NH}\frac{HD}{DA} = -1 = \frac{AX}{XB}\frac{BM}{MH}\frac{HD}{DA}.$$

Pero $CN = NH$ y $BM = MH$, entonces

$$\frac{AY}{CY} = \frac{AX}{BX}.$$



Por lo tanto $XY \parallel BC$. Sea F la intersección de la recta CH con BC. Por ser AD y CF alturas, se tiene que el cuadrilátero $BDHF$ es cíclico, de esto se obtiene que $\angle AHF = \angle ABD$. Como M es punto medio de la hipotenusa del triángulo HBD entonces M es su circuncentro, por lo tanto $\angle PBD = \angle XDB$. De esto se sigue que $PXBD$ es un trapecio isósceles, por lo tanto $\angle XBD = \angle PDB$. Entonces

$$\begin{aligned}\angle HQP = \angle HCD = 90^\circ - \angle CHD &= 90^\circ - \angle AHF \\ = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - \angle PDB &= \angle HDP,\end{aligned}$$

lo cual implica que el cuadrilátero $HPDQ$ es cíclico.

6. a) Primero probamos que f es biyectiva. En efecto, es claro que f es sobre, y como f va de un conjunto finito en sí mismo, esto implica que es biyectiva. Así podemos considerar al conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ como una unión disjunta de ciclos de la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, donde $f(a_i) = a_{i+1}$ tomando los índices módulo k, es decir $f(a_i) = a_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y $f(a_k) = a_1$. Para cada uno de estos ciclos $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, si tomamos cualquier elemento a_i tenemos que $a_i = f^{f(a_i)}(a_i)$, entonces $f(a_i)$ debe ser múltiplo de k para todo i, de donde k divide a $a_i = f(a_{i-1})$ para todo i. Ahora bien, si p es primo y $\sqrt{n} < p \leq n$, p pertenece a algún ciclo $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Se sigue que k divide a p, de modo que $k = 1$ o $k = p$. Si $k = p$ entonces p divide a a_1, $a_2, \ldots, a_p$, pero esto es imposible pues como $\sqrt{n} < p$ se tiene $n < p^2$ y no hay p múltiplos distintos de p entre 1 y n. Luego

$k=1$, es decir, p es un punto fijo de f. Esto nos da $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})$ puntos fijos. Por otra parte, sea a tal que $f(a)=1$. Luego $a=f^{f(a)}(a)=f(a)=1$, es decir que 1 también es un punto fijo. Así f tiene al menos $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})+1$ puntos fijos.

b) Supongamos que se tiene una partición de $\{1,2,\ldots,n\}$ en conjuntos disjuntos C_1, C_2,..., C_s, tales que si $k_i=|C_i|$ entonces $k_i \mid x$ para todo $x\in C_i$. Si $C_i=\{a_{i,1},a_{i,2},a_{i,k_i}\}$, definamos $f(a_{i,j})=a_{i,j+1}$ para $j=1,2,\ldots,k_i-1$ y $f(a_{i,k_i})=a_{i,1}$. Esta función cumple la condición $f^{f(k)}(k)=k$ para todo $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Entonces para probar la parte (b) basta hallar la partición C_1, C_2,..., C_s de modo que exactamente $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})+1$ de los C_i tengan un solo elemento.

Haremos la construcción de la siguiente manera: sean $2=p_1<p_2<\cdots<p_k$ los primos menores o iguales que $\sqrt{n}$. Como $n\geq 36$, $p_k\geq 5$. Consideramos todos los múltiplos de p_k que sean $\leq n$ y los ponemos en conjuntos de a p_k números, tomando los p_k mayores múltiplos primero, después los siguientes p_k múltiplos más grandes, y siguiendo así, hasta que nos queden a lo sumo p_k-1 números sobrantes. Si no queda ninguno nos detenemos, y si no, sean p_k, $2p_k$,..., mp_k los múltiplos restantes, con $m\leq p_k-1$. Como $p_k\leq\sqrt{n}$, se tiene $p_k^2\leq n$, lo cual nos asegura haber agrupado al menos p_k números. Ahora intercambiamos p_k por el $p_k(p_k+1)$, que debe estar en algún conjunto (pues si $p_k(p_k+1)>n$ entonces habría sólo p_k múltiplos de p_k y nos habríamos detenido). Entonces nos sobran a lo sumo los múltiplos $2p_k$,..., $(p_k-1)p_k$ y el $p_k(p_k+1)$. En general, tras haber hecho esto para el primo p_{i+1}, tomamos el siguiente primo p_i, y si $p_i>3$ repetimos el mismo proceso: consideramos sus múltiplos $\leq n$ y notamos que quedan al menos los múltiplos p_i, $2p_i$,..., p_i^2, pues ninguno ha sido removido antes (ya que todos sus divisores primos son a lo sumo p_i). Por lo tanto podemos agruparlos en conjuntos de p_i números, con un sobrante de a lo sumo p_i-1 de ellos, que serán p_i, $2p_i$,..., mp_i para algún $m\leq p_i-1$. Si sobra al menos uno, intercambiamos p_i con $p_i(p_i+1)$, que debe estar en algún conjunto pues $p_i(p_i+1)\leq(p_{i+1}-2)(p_{i+1}-1)<p_{i+1}^2\leq n$. Notemos que $p_i(p_i+1)$ no ha sido removido durante los pasos previos pues no tiene divisores primos mayores que p_i.

Al llegar a $p_2=3$ hacemos algo diferente. Agrupamos los múltiplos de 3 que quedan sin agrupar en grupos de 3, salvo el 6, el 12 y el 18. Van a sobrar a lo sumo 2 múltiplos de 3, que podemos lograr que sean un subconjunto de $\{24,36\}$ (que no se agruparon en pasos anteriores pues sus únicos divisores primos son 2 y 3).

Finalmente agrupamos todos los pares que queden. Si queda una cantidad par, podemos agruparlos todos de a pares y listo. Si queda una cantidad impar, formamos el conjunto $\{6,12,18\}$ de múltiplos de 3 y nos queda una cantidad par de números, que se agrupan de a pares.

De esta manera conseguimos agrupar todos los pares. Además no sobra ningún múltiplo de 3, pues los múltiplos de 3 que elegimos para que puedan sobrar también son pares.

Sea m un entero entre 2 y n inclusive que no quedó en ningún grupo, y sea p su menor divisor primo. Por lo que acabamos de ver $p>3$. Si $p^2\leq n$ entonces en el paso en que agrupamos múltiplos de p, p quedó agrupado. Luego $m=pk$ con $k>1$. Pero como p es el menor divisor primo de m, $k \geq p$. Esto nos dice que $n \geq m \geq p^2$, por lo que en algún momento hicimos un paso con p. Pero el único m que pudo haber sobrado en el paso de p, que sea múltiplo de p y $m \geq p^2$, es $(p+1)p$ y $p+1$ es par, luego el menor primo que divide a m sería 2, absurdo pues vimos que $p > 3$.

Luego m es 1 o es un primo $> \sqrt{n}$. De esta manera nos quedan sin agrupar $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ números, que son los puntos fijos de f.

Capítulo 7

Olimpiada Internacional de Matemática

Esta sección está dedicada a la 55^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Ciudad del Cabo, Sudáfrica, del 3 al 13 de julio con la participación de 560 jóvenes provenientes de 101 países de los cinco continentes. La delegación venezolana estuvo integrada por dos estudiantes, Rafael Aznar Segrera del colegio Los Arcos de Caracas y José Tomás Guevara, del colegio Bella Vista de Maracay, ambos ganadores de Mención Honorífica. La tutora de la delegación fue la Lic. Sofía Taylor Coronel y el jefe de la delegacoón el Prof. Rafael Sánchez Lamoneda, ambos de la Universidad Central de Venezuela.

7.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Sea $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ una sucesión infinita de números enteros positivos. Demostrar que existe un único entero $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problema 2. Sea $n \geq 2$ un entero. Consideremos un tablero de tamaño $n \times n$ formado por n^2 cuadrados unitarios. Una configuración de n torres en este tablero se dice que es *pacífica* si en cada fila y en cada columna hay exactamente una torre. Hallar el mayor entero positivo k tal que, para cada configuración pacífica de n torres, existe un cuadrado de tamaño $k \times k$ sin torres en sus k^2 cuadrados unitarios.

Problema 3. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ se tiene $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. La perpendicular a BD desde A corta a BD en el punto H. Los puntos S y T están en los lados AB y AD, respectivamente, y son tales que H está dentro del triángulo SCT y

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Demostrar que la recta BD es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo TSH

Segundo Día

Problema 4. Los puntos P y Q están en el lado BC del triángulo acutángulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Los puntos M y N están en las rectas AP y AQ, respectivamente, de modo que P es el punto medio de AM y Q es el punto medio de AN. Demostrar que las rectas BM y CN se cortan en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

Problema 5. Para cada entero positivo n, el Banco de Ciudad del Cabo produce monedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada una colección finita de tales monedas (no necesariamente de distintos valores) cuyo valor total no supera $99 + \frac{1}{2}$, demostrar que es posible separar esta colección en 100 o menos montones, de modo que el valor total de cada montón sea como máximo 1.

Problema 6. Un conjunto de rectas en el plano está en *posición general* si no hay dos que sean paralelas ni tres que pasen por el mismo punto. Un conjunto de rectas en posición general separa el plano en regiones, algunas de las cuales tienen área finita; a estas las llamamos sus *regiones finitas*. Demostrar que para cada n suficientemente grande, en cualquier conjunto de n rectas en posición general es posible colorear de azul al menos $\sqrt{n}$ de ellas de tal manera que ninguna de sus regiones finitas tenga todos los lados de su frontera azules.

7.2. Soluciones

1. Para $n = 1, 2, \ldots$ definamos

$$d_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_n.$$

Obsérvese que

$$d_n > 0 \Leftrightarrow a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Por otra parte

$$na_{n+1} - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = (n+1)a_{n+1} - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) = -d_{n+1},$$

y entonces la segunda desigualdad es equivalente a $d_{n+1} \leq 0$. Por lo tanto debemos demostrar que existe un único entero $n \geq 1$ tal que $d_n > 0 \geq d_{n+1}$.

Ahora bien, $d_1 = (a_0 + a_1) - a_1 = a_0 > 0$, y como $d_{n+1} - d_n = n(a_n - a_{n+1}) > 0$, se tiene que $d_{n+1} < d_n$ y la sucesión d_1, d_2,... es estríctamente decreciente. Por lo tanto (como no podemos descender infinitamente en enteros positivos), existe un único entero $n \geq 1$ tal que $d_n > 0 \geq d_{n+1}$. Precisamente n es el último lugar en la sucesión donde hay un entero positivo.

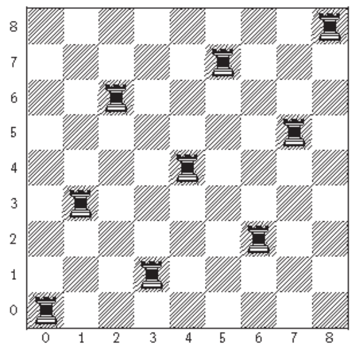
2. El número buscado es $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$. Como $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor = \text{máx}\{\ell \in \mathbb{Z}^+ : \ell \leq \sqrt{n}\}$, bastará demostrar dos cosas:

1. Si $n > \ell^2$ entonces cada configuración pacífica contiene un cuadrado $\ell \times \ell$ vacío.

2. Si $n \leq \ell^2$ entonces existe una configuración pacífica que no contiene ningún cuadrado $\ell \times \ell$ vacío.

Demostración de 1: Supongamos que $n > \ell^2$. Consideremos cualquier configuración pacífica. Entonces cada fila y cada columna contiene una sola torre y por ello existe una fila F que tiene una torre en su cuadrado que está más a la izquierda. Tomemos ahora ℓ filas consecutivas, siendo F una de ellas. La unión de estas filas U contendrá exactamente ℓ torres. Eliminemos ahora las $n - \ell^2 \geq 1$ columnas que están más a la izquierda de U. (Obsérvese que al hacer esto también removeremos al menos una torre). Nos queda ahora un rectángulo $\ell \times \ell^2$, el cual podremos descomponer en ℓ cuadrados de tamaño $\ell \times \ell$, y esta parte contiene a lo sumo $\ell - 1$ torres, por lo que uno de estos ℓ cuadrados estará vacío.

Demostración de 2: Supongamos que $n \leq \ell^2$. Lo primero que haremos será construir una configuración pacífica sin cuadrados vacíos de tamaño $\ell \times \ell$, para $n = \ell^2$. Después la modificaremos de tal manera que también sirva para valores menores de n. Supongamos entonces $n = \ell^2$. Enumeremos las filas de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha con los números $0, 1, 2 \ldots, \ell^2 - 1$. Cada cuadrado del tablero será denotado por (f, c) indicando de esta forma el número de la fila y de la columna que le corresponden. Pongamos ahora las torres en todos los cuadrados de la forma $(i\ell + j, j\ell + i)$, con $i, j = 0, 1, \ldots, \ell - 1$. Por ejemplo, el caso $\ell = 3$ sería así



Obsérvese que si hacemos variar i y j entre 0 y $\ell - 1$ en la expresión $i\ell + j$, entonces tendremos ℓ^2 números distintos entre 0 y $\ell^2 - 1$ y por ello cada número entre 0 y $\ell^2 - 1$ tiene una representación única de la forma $i\ell + j$. Por lo tanto cada fila y cada columna contiene exactamente una torre.

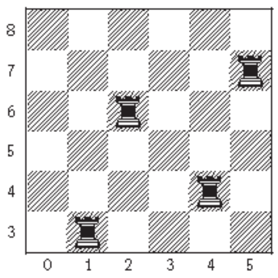
Demostremos ahora que cada cuadrado $\ell \times \ell$ en el tablero, contiene una torre. Considere un cuadrado C de $\ell \times \ell$ y considere también ℓ filas consecutivas, de tal manera que la unión de ellas contenga a C. Sea $p\ell + q$ con $0 \leq p, q \leq \ell - 1$ el número de la fila que está más abajo. Observemos que $p\ell + q \leq \ell^2 - \ell$ y las ℓ columnas consecutivas son, $p\ell+q, p\ell+q+1, \ldots, p\ell+q+\ell-1$. Entonces las torres en esta unión están ubicadas en las columnas numeradas $q\ell+p$, $(q+1)\ell+p$,..., $(\ell-1)\ell+p$, $p+1$, $\ell+p+1$,...,$(q-1)\ell+(p+1)$, o poniendo estos números en orden creciente,

$$p+1, \ell+(p+1), \ldots, (q-1)\ell+(p+1), q\ell+p, (q+1)\ell+p, \ldots, (\ell-1)\ell+p.$$

En esta lista se puede ver que el primer número es a lo sumo igual a $\ell - 1$, esto se obtiene haciendo $p = \ell - 1$, y $q = 0$), pues entonces $q\ell + p = \ell - 1$, el último número es al menos $(\ell - 1)\ell$ y la diferencia entre dos números consecutivos es a lo sumo ℓ. Luego, una de las ℓ columnas consecutivas intersectando a C contiene un número de los listados arriba y la torre de esa columna está dentro de C, como se quería. De esta forma tenemos la construcción requerida para $n = \ell^2$.

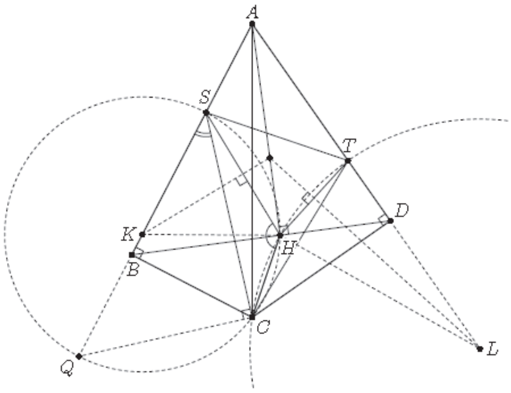
Nos queda construir para finalizar, una configuración pacífica de torres que no contenga un cuadrado $\ell \times \ell$ vacío para $n < \ell^2$. Para hacer esto tomemos la construcción para un cuadrado $\ell^2 \times \ell^2$ como la descrita antes y removamos las $\ell^2 - n$ filas de abajo, junto con las $\ell^2 - n$ columnas más a la derecha. Nos quedará un arreglo de torres sin cuadrado $\ell \times \ell$ vacío, pero varias filas y columnas podrían estar vacías. Claramente el número de filas vacías es igual al número de columnas vacías, por lo que puede establecerse una biyección entre ellas, y así poner una torre en el cruce de cada fila vacía con la columna vacía que le corresponde mediante la biyección.

Como ejemplo de esto tomemos en el caso del tablero dibujado antes, $n = 6$, $\ell = 3$. Quitemos las $9-6 = 3$ filas de abajo hacia arriba y las 3 columnas de derecha a izquierda, queda entonces el siguiente tablero:



Tenemos las filas 5 y 8 y las columnas 0 y 3 vacías, Hagamos la biyección que mande 5 al 0 y 8 al 3, ahora pongamos torres en $(5,0)$ y $(8,3)$ y tendremos una configuración pacífica sin cuadrados 3×3 vacíos.

3. Sea Q el punto de intersección de la perpendicular a SC por C con la recta AB (ver figura)

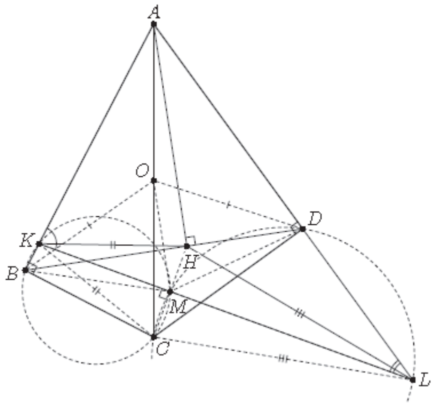


Entonces $\angle SQC = 90^\circ - \angle BSC = 180^\circ - \angle SHC$, por lo tanto los puntos C, H, S y Q son concíclicos. Además SQ es un diámetro de la circunferencia donde están los puntos C, H, S y Q, pues el triángulo SCQ es rectángulo en C. Por los tanto el circuncentro K del triángulo SHC está en la recta AB. Analogamente se demuestra que el circuncentro L del triángulo CHT está en la recta AD.

Para demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo SHT es tangente a BD, será suficiente demostrar que las mediatrices de HS y HT se intersectan sobre la recta AH. Sin embargo estas dos mediatrices coinciden, respectivamente, con las bisectrices de los ángulos $\angle AKH$ y $\angle ALH$, pues los triángulos SKH y TLH son isósceles. Por lo tanto, de acuerdo al teorema de la bisectriz, la demostración estará completa si

$$\frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH}.$$

Veamos esto. Sea M el punto de intersección KL y HC (ver figura)



Como $KH = KC$ y $LH = LC$, los puntos H y C son simétricos con respecto de la recta KL. Por lo tanto M es el punto medio de HC. Sea O el circuncentro del cuadrilátero $ABCD$. Entonces O es el punto media de AC, que es un diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ABCD$. En consecuencia AM es paralela a AH y por lo tanto perpendicular a BD. Como $OB = OD$, entonces OM es la mediatriz de BD y por lo tanto $BM = DM$.

Como CM es perpendicular a 4 KL, los puntos B, C, M y K están en una circunferencia de diámetro KC. Como $\angle CML = \angle CDL = 90°$, los puntos L, C, M y D están en una circunferencia de diámetro LC. Ahora, por el teorema del seno,

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\operatorname{sen}\angle ALK}{\operatorname{sen}\angle AKL}.$$

Pero $\angle AKL = \angle AKM$ y $\angle ALK = \angle DLM$, entonces $\operatorname{sen}\angle AKL = \operatorname{sen}\angle AKM$ y $\operatorname{sen}\angle ALK = \operatorname{sen}\angle DLM$, y por el teorema extendido del seno

$$\frac{DM}{\operatorname{sen}\angle DLM} = CL,$$

de donde

$$\operatorname{sen}\angle DLM = \frac{DM}{CL}.$$

Por otra parte, como $\angle BKM + \angle BCM = 180°$ y $\angle AKL + \angle BKM = 180°$, tenemos que $\angle AKM = \angle BCM$ y de nuevo por el teorema extendido del seno, en el triángulo BMC, tenemos

$$\frac{BM}{\operatorname{sen}\angle BCM} = CK,$$

o bien

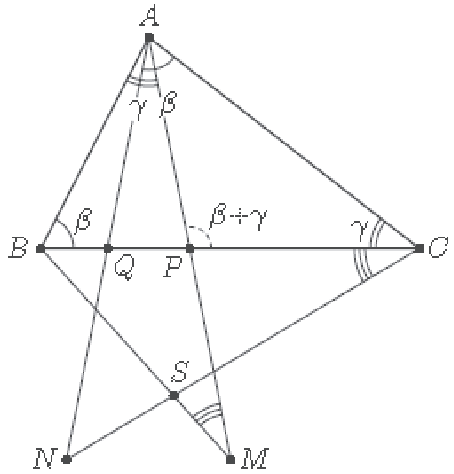
$$\operatorname{sen}\angle BCM = \frac{CK}{BM}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{AK}{AL} = \frac{sen\angle ALK}{sen\angle AKL} = \frac{DM}{CL} \cdot \frac{CK}{BM} = \frac{CK}{CL} = \frac{KH}{LH},$$

es decir $\dfrac{AK}{KH} = \dfrac{Al}{LH}$, como queríamos demostrar.

4. Denotemos por S el punto de intersección de las rectas BM y CN. Llamemos $\beta = \angle QAC = \angle CBA$ y $\gamma = \angle PAB = \angle ACB$.



Se sigue que los triángulos ABP y CAQ son semejantes, por lo tanto

$$\frac{BP}{PA} = \frac{AQ}{CQ}.$$

Pero $PA = PM$ y $AQ = QN$, entonces

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BP}{PA} = \frac{AQ}{QC} = \frac{NQ}{QC}.$$

Por otra parte $\angle BPM = \angle APC = \beta + \gamma$ y además $\angle CQN + \angle CQA = 180°$ de donde $\angle CQN = 180° - \angle CQA = \beta + \gamma$. En consecuencia $\angle BPM = \beta + \gamma = \angle CQN$ y los triángulos BPM y NQC son semejantes. Esto nos dice además que $\angle BMP = \angle NCQ$, por lo que entonces como también $\angle NCQ = \angle SCB$, los triángulos BPM y BSC son semejantes.

Tenemos entonces que

$$\angle CSB = \angle BPM = \beta + \gamma = 180° - \angle BAC.$$

Por lo tanto, $\angle CSB + \angle BAC = 180°$ y los puntos A, B, C y S son concíclicos, como queríamos demostrar.

5. Demostraremos algo más general, que tiene como un caso particular nuestro problema: Para todo $N \in \mathbb{Z}^+$, cualquier colección de monedas de valor total $N - \frac{1}{2}$ se descompone en N grupos, cada uno de valor máximo 1. Si hacemos $N = 100$ tenemos como caso particular el problema planteado.

Observemos que si varias monedas juntas tienen un valor total que también es de la forma $\frac{1}{k}$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces se pueden unir en una nueva moneda. Tenemos entonces una nueva colección de monedas y si podemos descomponerla en la forma deseada, también podremos descomponer la colección original.

Después de cada unión el número total de monedas decrece, por lo tanto en algún momento llegaremos a un punto en el cual no será posible hacer más uniones de monedas. Llegado este momento, para todo entero positivo par k habrá como máximo una sola moneda de valor $\frac{1}{k}$, pues en caso contrario dos de esas monedas se podrían unir ($\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$). Por otra parte, para todo entero positivo impar $k > 1$, existen a lo sumo $k-1$ monedas de valor $\frac{1}{k}$, pues en caso contrario podemos unir k de esas monedas. Ahora, claramente, cada moneda de valor 1debe formar un solo grupo. Si existen d de estas monedas, las podemos remover de la colección y reemplazamos N por $N - d$. Por lo tanto de ahora en adelante supondremos que no hay monedas d evalor 1.

Finalmente podemos separar todas las monedas como sigue: Para cada $k = 1, 2, \ldots, N$, pongamos todas las monedas de valor $\frac{1}{2k-1}$ y $\frac{1}{2k}$ en un grupo que llamaremos G_k. El valor total de G_k no excede a

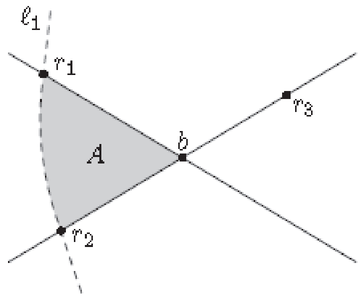
$$(2k-2) \cdot \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} < 1,$$

pues hay a lo sumo $(2k-1) - 1$ monedas de valor $\frac{1}{2k-1}$ y 1 de valor $\frac{1}{2k}$.

Nos queda ahora distribuir las monedas de valores menores a $\frac{1}{2N}$. Procedemos agregándolas una por una. En cada paso tomaremos una sola de estas monedas "pequeñas". El valor total de monedas en los grupos es hasta ahora a lo sumo $N - \frac{1}{2}$. Por lo tanto existe un grupo de valor total a lo sumo $\frac{1}{N}(N - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2N}$, pues hay N grupos G_k cada uno de valor total a lo sumo $N - \frac{1}{2}$. Por lo tanto podemos poner nuestra moneda pequeña en este grupo. Continuando de esta manera, finalizamos distribuyendo todas las monedas.

6. Sea L el conjunto de las n rectas dadas. Elijamos un subconjunto B de L que sea maximal por inclusión, con respecto a la siguiente propiedad: Cuando coloreamos de azul las rectas de B, ninguna región finita tiene frontera totalmente azul. Supongamos que B tiene k elementos. Demostremos que $k \geq \lceil \sqrt{n} \rceil$.

Coloreemos de rojo las rectas de L que no pertenecen a B. Diremos que un punto es azul, si es la intersección de dos rectas azules. Por lo tanto habrá $\binom{k}{2}$ puntos azules, pues no hay en L tres rectas concurrentes ni dos rectas paralelas . Llamemos a un punto rojo si está en la intersección de una recta roja y una azul. Consideremos ahora una recta roja cualquiera ℓ. Por la maximalidad de B, existe al menos una región finita A cuyo único lado rojo está sobre ℓ, pues de lo contrario podemos pintar la recta donde está uno de los lados rojos de azul, agregar esa recta a B y contradecir la maximalidad. Consideremos entonces cualquier recta roja de ℓ y tomemos una región finita arbitraria, cuyo único lado rojo esté sobre ℓ. Sean r', r, b_1,..., b_k sus vértices, enumerados en el sentido de las agujas del reloj, r y r' pertenecientes a ℓ. Entonces los puntos r y r' son rojos, mientras que $b_1, \ldots, b_k$ son azules. Asociemos a ℓ los puntos r y b_1. Observemos que a cada par formado por un punto rojo r y un punto azul b, le podemos asociar a lo sumo una recta roja, ya que existe a lo sumo una sola región A que tiene a r y b como vértices consecutivos en el sentido de las agujas del reloj, (recuérdese que no hay tres rectas concurrentes en L). Afirmamos que a lo sumo solo dos rectas rojas se pueden asociar a cada punto azul b y por lo tanto como $n-k$ es la cantidad de rectas rojas, tendremos que $n - k \leq \binom{k}{2}$, pero esto es equivalente a que $n \leq k^2$ y se terminaría la demostración. Supongamos para llegar a una contradicción que hay tres rectas rojas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 asociadas a un mismo punto azul b. Sean r_1, r_2 y r_3 tres puntos rojos distintos asociados a estas tres rectas, respectivamente. El punto b define cuatro rayos azules y cada punto r_i es el punto rojo más cercano a b sobre uno de esos rayos. Como no hay tres rectas concurrentes podemos supones que r_2 y r_3 están en una recta azul que pasa por b y r_1 está en otra distinta.



Consideremos ahora la región A usada para asociar r_1 y b con ℓ_1. Tres de sus vértices consecutivos en el sentido de las agujas del reloj son r_1, b y o bien r_2 o bien r_3. Digamos que es r_2. Como A tiene un solo lado rojo, A solo puede ser el triángulo r_1br_2, pero entonces ℓ_1 y ℓ_2 pasan por r_2 así como también una recta azul y esto es una contradicción. Por lo tanto a lo sumo dos rectas rojas se pueden asociar a cada punto b y en consecuencia $n \leq k^2$ y tenemos que $k \geq \lceil \sqrt{n} \rceil$, como queríamos demostrar.

Glosario

Ángulo inscripto. Si A, B y C son puntos de una circunferencia de centro O, se dice que el ángulo $\angle ABC$ está *inscripto* en la circunferencia y que *subtiende* el arco $\widehat{AC}$ que no contiene a B. La medida de $\angle ABC$ es igual a la mitad del ángulo central $\angle AOC$.

Ángulo semiinscripto. Es el que tiene el vértice en una circunferencia, un lado tangente a la misma y el otro secante.

Baricentro. (o centroide, o centro de gravedad, o gravicentro) Es el punto donde concurren las tres medianas de un triángulo.

Bisectriz. Recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

Centro radical. Dadas tres circunferencias con centros no alineados, es el único punto que tiene igual potencia respecto a todas ellas.

Ceviana. Es cualquier segmento que una un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto.

Cíclico Se dice de un polígono que puede ser inscripto en una circunferencia, es decir, tal que alguna circunferencia pasa por todos sus vértices.

Círculo de Apolonio. Es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su razón de distancias a dos puntos dados A y B es una constante dada $r > 0$, $r \neq 1$. Es una circunferencia cuyo centro está sobre el segmento AB. (Si $r = 1$ el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB).

Circuncírculo. Es la (única) circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo.

Circunferencia circunscripta. Ver *Circuncírculo.*

Circunscribible. (o circunscriptible) Dícese de un polígono para el cual existe una circunferencia tangente a todos sus lados.

Coeficiente binomial. Es el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(1+x)^n$. También es igual al número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto de n elementos. Se denota $\binom{n}{k}$ y puede calcularse así:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

Colineales. Dícese de un conjunto de puntos que están sobre una misma línea recta.

Concíclicos. Dícese de un conjunto de puntos que están sobre una misma circunferencia.

Congruencia (de números) Dos enteros a y b son *congruentes* módulo el entero $n > 0$ si n divide a $a - b$. Simbólicamente se representa así: $a \equiv b \pmod{n}$.

Convexo Se dice de un conjunto C tal que, para cualquier par de puntos A, B en C, el segmento AB está totalmente contenido en C.

Coprimos (o **primos relativos**). Dícese de dos números enteros sin factores primos comunes (o, equivalentemente, cuyo máximo común divisor es 1).

Cuaterna armónica. Es una cuaterna de puntos alineados A, B, C, D tales que exactamente uno de los puntos A y B pertenece al segmento CD y además se cumple que $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

Eje radical de dos circunferencias no concéntricas es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas. Siempre es una recta perpendicular a la que une los centros de ambas circunferencias.

Excentro. Es el punto en que concurren la bisectriz de un ángulo y las bisectrices exteriores de los otros dos ángulos de un triángulo. Como equidista de los tres lados del triángulo, es el centro de una circunferencia tangente a ellos y exterior al triángulo.

Factorial de un entero $n \geq 0$ es el producto de los primeros n enteros positivos $1 \cdot 2 \cdots n$. Se denota por $n!$. Por convención $0! = 1$.

Incentro. Es el punto en que concurren las tres bisectrices de un triángulo. Como equidista de los tres lados del triángulo, es el centro de una circunferencia tangente internamente a ellos.

Incírculo. Es la circunferencia tangente internamente a los tres lados de un triángulo.

Inscriptible. Ver cíclico.

Media aritmética de los números $a_1, a-2, \ldots, a_n$ es $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

Media geométrica de los números $a_1, a-2, \ldots, a_n$ es $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ (se suponen los $a_i \geq 0$).

Mediana. (de un triángulo) Es el segmento que tiene como extremos a un vértice de un triángulo y al punto medio del lado opuesto.

Mediatriz. (de un segmento) Es la recta perpendicular al segmento por su punto medio. Se ùede caracterizar como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Ortocentro. (de un triángulo) Es el punto donde concurren las tres alturas.

Permutación Una permutación del conjunto A es una biyección $\sigma : A \to A$. Las permutaciones de un conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ se denotan también mediante $a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}$, donde σ es una biyección de $\{1, \ldots, n\}$.

Potencia. Sean P un punto, Γ una circunferencia y r una recta que pase por P y corta a la circunferencia en A y B (si r es tangente a Γ consideramos que $A = B$). Entonces el producto $PA \cdot PB$ no depende de r, y su valor es por definición la *potencia* de P respecto a Γ, $\mathrm{Pot}(P, \Gamma)$. Las distancias PA y PB se consideran orientadas, es decir que la potencia es positiva o negativa según que P sea exterior o interior a Γ. Obviamente $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = 0$ si y sólo si P pertenece a Γ.

Primo Es un entero $p > 1$ cuyos únicos divisores positivos son 1 y p.

Principio de las casillas. Si n objetos se distribuyen en k cajas, y $n > k$, entonces alguna caja recibe más de un objeto.

Progresión aritmética. Se dice que a_0, a_1, a_2,... forman una progresión aritmética si las diferencias $a_{i+1} - a_i$ entre términos consecutivos son todas iguales.

Progresión heométrica. Se dice que a_0, a_1, a_2,... forman una progresión aritmética si las razones a_{i+1}/a_i entre términos consecutivos son todas iguales.

Razón áurea. Se dice que un punto C divide a un segmento AB en *media y extrema razón* si $AB/BC = AC/AB$. En este caso a la razón AC/AB se le conoce como *razón áurea*, *número áureo*, *divina proporción* y varios otros nombres. Se suele denotar con la letra griega φ y su valor es

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Recta de Euler. Es la recta que contiene el baricentro G, el circuncentro O y el ortocentro H de un triángulo. Se cumple $HG = 2GO$.

Representación en base b Si $b > 1$ es entero, la representación en base b de un entero positivo n es $(a_k a_{k-1}, \ldots, a_1 a_0)_b$ si:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

con $0 \leq a_i < b$ para $i = 0, 1, \ldots, k$.

Teorema de Ceva. Sea ABC un triángulo y sean P, Q y R tres puntos ubicados respectivamente en las rectas BC, CA y AB y diferentes de A, B y C. Entonces AP, BQ y CR son concurrentes si y sólo si

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

Nota: las medidas en cada recta se toman orientadas.

Teorema de la bisectriz. Sean ABC un triángulo, V el punto en que la bisectriz desde A corta al lado BC y U el punto en que la bisectriz exterior por A corta a la prolongación del lado BC. Entonces

$$\frac{VB}{VC} = \frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB + AC}.$$

Admite los siguientes recíprocos:

1. Si V es un punto del lado BC del $\triangle ABC$ y $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}$ entonces AV es la bisectriz del $\angle BAC$.

2. Si U es un punto de la prolongación del lado BC del $\triangle ABC$ y $\frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC}$ entonces AU es la bisectriz exterior del $\angle BAC$.

3. Si V y U son puntos del lado BC y de su prolongación, respectivamente, del $\triangle ABC$, y si $\frac{VB}{VC} = \frac{UB}{UC}$ y $\angle UAV = 90°$, entonces AV es la bisectriz interior y AU es la bisectriz exterior del $\angle BAC$.

Teorema de Menelao. Sea ABC un triángulo y sean P, Q y R tres puntos ubicados respectivamente en las rectas BC, CA y AB y diferentes de A, B y C. Entonces P, Q y R están alineados si y sólo si

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

Nota: las medidas en cada recta se toman orientadas.

Teorema de Stewart. Sean ABC un triángulo, D un punto del lado AB, $p = CD$, $m = AD$ y $n = DB$. Este teorema afirma que $c(mn + p^2) = a^2m + b^2n$.

Terna pitagórica. Es un conjunto de tres enteros positivos a, b y c que cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Si $\text{mcd}(a, b, c) = 1$ la terna se dice *primitiva*. En ese caso a y b deben ser de diferente paridad, digamos a impar y b par, y se puede probar que existen enteros u y v, coprimos y de diferente paridad, tales que $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ y $c = u^2 + v^2$.

Premiación de las Olimpiadas Matemáticas del 2014

Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas

Primer Año

Medallas de Oro

Nombre	Instituto	Estado
Arturo Poleo	San Vicente De Paul	Lara
Pablo Ramírez	Escuela Comunitaria	Miranda
Alejandro Troconis	El Peñón	Caracas
Gianfranco Radomile	San Vicente De Paul	Lara
Corrado Govea	Bellas Artes	Zulia

Medallas de Plata

Emilio Tiso	San Pedro	Lara
Andrés Betancourt	San Lázaro	Sucre
Martin Fernandes	Colegio Cumbres	Caracas
Vicente Mirabal	San Pedro	Lara
Kimberly Rodríguez	Bella Vista	Zulia
Adrian Sánchez	Madre Teresa Titos	Mérida
Nicole Castellanos	Bella Vista	Zulia
Shayan Dalirian	Bella Vista	Zulia

Medallas de Bronce

Nicolle Giraud	San José Maristas	Maracay
Daniel Nuñez	Bellas Artes	Zulia
Isabel Yramaquin	Pedro Leleux	Falcon
Gerardo Arriaga	La Esperanza	Carabobo
Estefany Quiroz	Ntra. Sra. Del Camino	Miranda
Hanan Saab	Bellas Artes	Zulia
David Bitar	Bella Vista	Zulia
Fernando Durán	Monte Carmelo	Bolívar
José Suárez	San Lázaro	Sucre

Menciones de Honor

Herson La Riva	Bella Vista	Zulia
Daniel Ríos	Ramon Pierluissi	Carabobo

Segundo Año

Medallas de Oro

Iván Rodríguez	Santiago De León	Caracas
Cristian Inojosa	Loyola Gumilla	Bolívar
Amanda Vanegas	San Francisco de Asís	Zulia

Medallas de Plata

Michelle Curiel	Juan XXIII	Falcon
Samuel Ochoa	Andrés Bello	Vargas
Javier Pulido	Hipocampitos	Miranda
José Sánchez	Claret	Zulia
Sohrab Vafa	I. E. Aragua	Maracay
Laura Andara	Iberoamericano	Bolívar
Daniel Arismendi	Iberoamericano	Bolívar

Medallas de Bronce

Onice Aguilar	La Presentación	Mérida
Santiago González	El Peñón	Caracas
Nicole Pineda	Bella Vista	Zulia
Jayka Tisminezky	Bella Vista	Zulia
Andrés Suárez	IDEA	Carabobo
Alessandra D'Agrosa	Angel De La Guarda	Portuguesa
Verónica Raga	Bella Vista	Zulia
Rey Barbera	Nueva Segovia	Lara
Mark Epelbaum	Moral y Luces	Caracas
Jesús Lárez	Ángel De La Guarda	Guárico

Menciones de Honor

Andrés Graterol	Santa Rosa	Carabobo
Christian Guerrero	Belagua	Miranda
Carynes Romero	Joaquín del Tigre	Monagas

Tercer Año

Medallas de Oro

Gabriel Matute	Academia Washington	Caracas
Wemp Pacheco	Calicantina	Maracay

Medallas de Plata

Luis Kuffner	Colegio Francia	Caracas
Johann Bastardo	Iberoamericano	Bolívar

Medallas de Bronce

Leonardo Boccardo	U.E. USB	Caracas
Juan Cabrera	Santiago De León	Caracas
León Herdan	Moral y Luces	Caracas
Ignacio Muñoz	Santiago De León	Caracas
David Bromberg	Moral y Luces	Caracas

Menciones de Honor

Luciano Salvetti	Emil Friedman	Caracas
Alejandro Velasco	Andrés Bello	Lara
Eduardo Jerez	El Peñón	Caracas
María Dávila	Paideia	Mérida
Alejandro Salazar	Madre Guadalupe	Nueva Esparta

Cuarto Año

Medallas de Oro

Rafael Aznar	Los Arcos	Caracas

Medallas de Plata

José Guevara	Bella Vista	Maracay
Nicolas Raga	Bella Vista	Zulia

Medallas de Bronce

Luis Uzcátegui	Los Próceres	Bolívar
Marcos Lerones	Cristo Rey Santa Mónica	Caracas

Quinto Año

Medallas de Oro

Daniel Calderas	Colegio Francia	Caracas

Medallas de Plata

Rebeca Giménez	Los Próceres	Bolívar
Luis Ruiz	Las Colinas	Lara

Medallas de Bronce

Ricardo Mathison	El Peñón	Caracas
Juan Cramer	San José Maristas	Maracay
Alejandro Da Silva	Santiago De León	Caracas

Premios Especiales

Arturo Poleo (San Vicente de Paul, Edo. Lara)

Premio de la Fundación Empresas Polar a la mejor prueba.

Ignacio Muñoz (Santiago León, Capital)

Premio UNEXPO a la respuesta más creativa.

Olimpiada de Mayo 2014 — Premiación Nacional

Nivel I

Medallas de Oro

César Carranza	Iberoamericano	Puerto Ordaz
Jatniel Mirabal	Andrés Eloy Blanco	Barquisimeto

Medallas de Plata

Román Rodríguez	Monte Carmelo	Puerto Ordaz
Valentina Villalba	Academia Washington	Caracas
Andrés Romero	Academia Washington	Caracas

Medallas de Bronce

Nicole López	Las Fuentes	Barquisimeto
Andrés Betancourt	San Lázaro	Cumaná
Bernardo Patiño	Independencia	Barquisimeto

Menciones de Honor

Daniela Matute	U.E. Academia Washington	Caracas
Salvador Hernández	U.E. Academia Washington	Caracas
Carmen López	San Lázaro	Cumaná
Ramón Figuera	Santo Angel de la Guarda	Cumaná
Rodrigo Velásquez	Las Colinas	Barquisimeto

Nivel II

Medallas de Oro

Amanda Vanegas	San Francisco de Asis	Maracaibo
Wemp Pacheco	Calicantina	Maracay

Medallas de Plata

Franklin Bello	Iberoamericano Puerto Ordaz	
Vafa Sohrab	IEA Aragua	Valencia

Medallas de Bronce

Luis Kuffner	Colegio Francia	Caracas

Menciones de Honor

José Hernao	Liceo Los Robles	Maracaibo
Iván Rodríguez	Santiago León	Caraca
Victoria Álvarez	Bella Vista	Maracay
Daniel Napoli	San José	Maracay
Juan Catala	San Ignacio	Caracas
David Sánchez	San José	Maracay

Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2014

Amanda Vanegas	Mención de Honor
Iván Rodríguez	Mención de Honor
Wemp Pacheco	Mención de Honor

Olimpiada Iberoamericana 2014

Rafael Aznar	Medalla de Bronce
Tomás Guevara	Medalla de Bronce

Olimpiada Internacional (IMO) 2014

Rafael Aznar	Mención de Honor
Tomás Guevara	Mención de Honor

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2014

Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Laura Vielma Herrero (Coordinadora de Entrenamientos)
Sophia Taylor, Estefanía Ordaz, Diego Peña,
Rubmary Rojas, Mauricio Marcano (Colaboradores)

Coordinadores Regionales

Prof. Luis Alberto Rodríguez (Anzoátegui)
Prof. Rafael Antonio Valdez Tovar (Apure)
Prof. Jesús Acosta (Aragua)
Prof. Orlando Mendoza (Aragua-Cagua-Turmero)
Prof. Mary Acosta (Bolívar)
Prof. Mirba Romero (Carabobo)
Prof. Addy Goitía (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Carruci (Lara)
Prof. José Toloza (Mérida)
Prof. Lisandro Alvarado (Miranda)
Prof. Yelenny Guanipa (Monagas)
Prof. Emilia Valdez de Peña (Nueva Esparta)
Prof. María Nyhobe Martínez (Portuguesa)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Alvaro Mendoza (Táchira)
Prof. Ramón Blanco (Trujillo)
Prof. Larry Mendoza (Vargas)
Prof. José Heber Nieto Said (Zulia)
Prof. Lisbardo Serrudo (Zulia-Santa Bárbara)

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Association Le Kangourou des Mathématiques Kangourou sans frontiéres

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331
Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 212.6051512
email:asomatemat8@gmail.com. Página Web:www.acfiman.org