Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Matemática en la Matemática, Música, Medicina y Aeronáutica

Flor de María Aceff
Emilio Lluis-Puebla

www.smm.org.mx

Serie: Divulgación. Vol. 1 (2006)

ISBN 968-9161-09-1

Matemática
en la
Matemática, Música, Medicina y Aeronáutica

Flor de María Aceff

y

Emilio Lluis-Puebla

Universidad Nacional Autónoma de México

Publicaciones Electrónicas

Sociedad Matemática Mexicana

Sociedad Matemática Mexicana
ISBN 968-9161-08-3 papel
ISBN 968-9161-09-1 CD
ISBN 968-9161-07-5 en línea

PREFACIO

Este volumen presenta el contenido de cuatro conferencias dictadas por invitación de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística correspondiente de Durango y del Instituto de Cultura de Durango durante el período septiembre-noviembre de 1999. Estas conferencias constituyeron un ciclo celebrado con la participación de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, la Escuela Superior de Música de la Universidad Juárez del Estado de Durango, el Instituto Tecnológico de Durango, la Sociedad Matemática Mexicana y la recientemente creada (en 1999) Academia Interinstitucional de Matemáticas de Durango.

Todas las conferencias contaron con llenos absolutos en los dos auditorios en que fueron presentadas con una participación notablemente entusiasta por parte de los asistentes, quienes muchos de ellos (más de ochenta), concurrieron al XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en Guadalajara, Jalisco en octubre de 1999, como una muestra y correspondencia a la invitación hecha al público asistente por el Dr. Emilio Lluis-Puebla (vicepresidente de la Sociedad Matemática Mexicana en ese entonces) durante la primera de las conferencias. Esto muestra el gran interés y motivación logrados con este tipo de conferencias y lo exitosas que han sido.

Por invitación, una versión de este texto fue enviada en ese entonces a Durango pero por diversas razones, en particular las económicas, no fue posible la publicación. Los autores han decidido publicar este volumen dejando un testimonio de su participación en ese ciclo. Se espera que sirva como motivación y orientación vocacional a los jóvenes deseosos de dedicarse a una de las aventuras más formidables del Ser Humano, la Matemática. También está dedicado a toda persona que desee obtener un concepto más aproximado acerca de la Matemática y sus practicantes.

Una agradable y hermosa consecuencia de este ciclo fue el conjuntar a las comunidades de músicos estudiantes y profesores de la Escuela Superior de Música de la UJED con los de la Escuela de Matemáticas de la UJED y a su vez con los del Instituto Tecnológico de Durango, tanto en las conferencias como fuera de ellas en conciertos organizados dedicados a los matemáticos. Esto en el espíritu y concordancia con el pensamiento expresado por el Dr. Lluis-Puebla al final de sus conferencias, a saber, la relación más importante entre la Matemática y la Música es, que ambas son "Bellas Artes". Poseen características similares. La Matemática es una de las "Bellas Artes", la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

Los autores desean reconocer la enorme labor de organización de las instituciones arriba mencionadas, en particular la del Lic. Gonzalo Salas, Presidente de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística correspondiente de Durango quien tuvo la visión de realizar este ciclo de conferencias y lograrlo con enorme éxito.

Cabe recalcar que fue, debido a la visión de este gran hombre de Durango, Don Gonzalo Salas, de reconocer la importancia de la Matemática en la Ciencia y en la Sociedad y de la colaboración mutua y honorífica con el Dr. Emilio Lluis-Puebla que culminara en la realización del XXXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana tres años después, es decir, en el 2002.

Durante la preparación del Congreso (más de un año antes de su inauguración) y durante el mismo, toda la comunidad matemática y de otras disciplinas de Durango, incluyendo las autoridades universitarias y estatales, se vincularon con la comunidad matemática nacional y con distinguidas personalidades del mundo matemático de otros países que asistieron, entre otras, las de la American Mathematical Society, la Sociedad Portuguesa de Matemática, la Sociedad Boliviana de Matemática, la Real Sociedad Matemática Española, etc.

Los autores desean agradecer las atenciones de muchas personas que hicieron de las conferencias, actos trascendentes dentro de la comunidad matemática y musical de Durango, entre ellas la del Lic. Héctor Palencia†, Director del Instituto de Cultura de Durango en ese entonces y de la Srita. Teresa García Castañeda, secretaria de Don Gonzalo Salas.

La edición del presente texto ha estado bajo el cuidado de varias personas, entre otras, del Lic. Gonzalo Salas, Presidente de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística correspondiente de Durango, a quien los autores le expresan su mayor agradecimiento.

"Matemática y matemáticos I" es un breve panorama sobre ese no tan desconocido mundo de la Música y de los músicos y de ese misterioso y prácticamente desconocido mundo del matemático y de la Matemática. ¿Cuáles son las fuentes de creación?, ¿Cuál es el papel del intérprete en la actualidad?, ¿Cuánta Matemática hay?, ¿Cómo se origina una teoría matemática?, ¿Qué significa la palabra Matemática?, ¿Cuáles son las fuentes de creación?, ¿Cómo es un matemático?, ¿Quienes ingresan a una carrera de matemática y qué los motiva?, ¿Qué es la Matemática Aplicada? ¿Cómo ven a la Matemática y a los matemáticos otros profesionistas? Estas son algunas de las preguntas, entre muchas otras, que se exponen con su respectiva respuesta. También se hace una reflexión acerca del momento histórico que nos ha tocado vivir en relación con éstas dos disciplinas y sus practicantes.

En “Matemática en la Música I” se expone el Juego de Dados Musical de Mozart K.294c y se analizan matemáticamente algunas de sus características. También se expone la Teoría de la Estética de George David Birkhoff y su aplicación a la Música en particular. Las sucesiones de Fibonacci, la razón áurea o proporción divina se presentan, así como su aplicación en la música de Bela Bartók. Brevemente se menciona el trabajo de Guerino Mazzola sobre su Teoría Matemática de la Música. También se hace otra reflexión acerca del momento histórico que nos ha tocado vivir en relación con éstas dos disciplinas y sus practicantes.

En “Matemática en la Matemática” se expone uno de los conceptos más antiguos de la misma, ampliamente desconocido por la gente común y los profesionales de múltiples disciplinas: la operación binaria o ley de composición. También se ve qué tan ciertos son unos "dichos populares" como son los de "tan claro como que dos y dos son cuatro" y "el orden de los factores no altera el producto" y se explica un poco la clasificación actual de la Matemática.

Dentro de "Matemática en la Medicina y en la Aeronáutica" se presenta la Teoría de Dispersión, (una parte muy interesante de la Física Matemática). Esta constituye la base matemática de la tomografía y de la tecnología de los más avanzados aviones militares.

Flor de María Aceff
y
Emilio Lluis-Puebla.

Marzo de 2006.

CAPÍTULO I

Matemática y matemáticos I

El presente texto tiene como finalidad la de exponer ese misterioso y prácticamente desconocido mundo del matemático y de la Matemática. Muchas de las ideas presentadas son mías y otras son tomadas de [Da], [D] y [M].

Una de las diferencias entre la Matemática y la Música, por ejemplo, es que la Matemática no cuenta con un instrumento donde tocarse.

El piano es un instrumento para la Música y el oyente la escucha por medio del sentido auditivo, el cual es capaz, si lo desea, de disfrutar, apreciar, etc. los sonidos emitidos en una secuencia dada. Por otro lado, el oyente de Matemática, si es lego, no podrá apreciarla ni disfrutarla a pesar de que ésta sea ofrecida en su propio idioma.

Reprinted from JOURNAL OF ALGEBRA

Vol. 101, No. 1, June 1986
Printed in Belgium

On K_3 of $\mathbb{F}_q[t]/(t^2)$ and $\mathbb{F}_q[t]/(t^3)$

JANET AISBETT

Department of Mathematics, University of Queensland, St. Lucia, Australia 4067

EMILIO LLUIS-PUEBLA

Department of Mathematics, U.N.A.M., Mexico 19 DF

AND

VICTOR SNAITH*

Department of Mathematics, The University of Western Ontario, London, Ontario N6A 5B7, Canada

Communicated by Richard G. Swan

Received March 24, 1984

1. INTRODUCTION

In this paper we prove the following result concerning the algebraic K-groups of truncated polynomial rings.

Let R^* denote the units in R.

1.1. THEOREM. *Let p be an odd prime. There are isomorphisms* $(m \geqslant 1)$

(a) $((1+t\mathbb{F}_{p^m}[t])/t^6)^*/\langle 1+at^3;\, a\in\mathbb{F}_{p^m}\rangle \oplus K_3(\mathbb{F}_{p^m}) \xrightarrow{\cong} K_3(\mathbb{F}_{p^m}[t]/(t^3))$,

(b) $(1+t\mathbb{F}_{p^m}[t]/(t^4))^*/\langle 1+at^2;\, a\in\mathbb{F}_{p^m}\rangle \oplus K_3(\mathbb{F}_{p^m}) \xrightarrow{\cong} K_3(\mathbb{F}_{p^m}[t]/(t^2))$.

We use some group cohomology calculations supplemented by partial results of Stienstra—an approach first used by the third author in characteristic two. The basic cohomology results from which we start appear in [ALSS]. When $p \geqslant 5$ calculations sufficient to derive $K_3(\mathbb{F}_{p^m}[t]/(t^2))$ appear in [EF] for $m=1$ and in [LS] for $m \geqslant 1$. The study is taken further in [A].

* Research partially supported by Natural Sciences and Engineering Research Council Grant A4633.

69

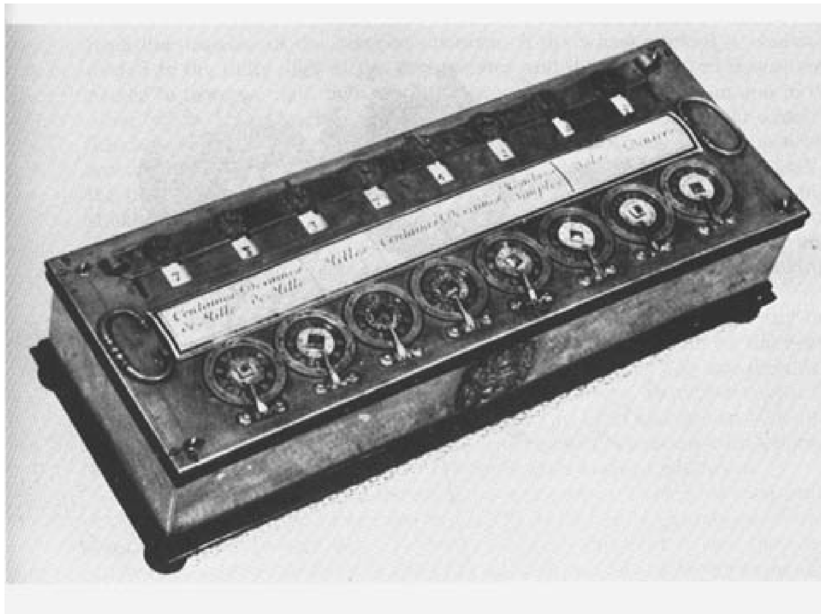
Aquí hay una diferencia importante. Mientras el oyente de Música puede ser totalmente ignorante de la estructura musical, así como de sus aspectos técnicos, etc., puede sentir a través de sus sentidos alguna emoción o placer estético, mientras que el espectador lego en Matemática no experimentará absolutamente ningún placer estético. La Matemática se transmite directamente de cerebro a cerebro o directamente de una "partitura" de Matemática al cerebro. Sin embargo, para el oyente preparado en Matemática el experimentar placer estético puede darse.

La Matemática existe desde que existe el ser humano. Prácticamente todo ser humano es un matemático en algún sentido. Desde los que utilizan la Matemática hasta los que la crean. También todos son hasta cierto punto filósofos de la Matemática. Efectivamente, todos los que miden, reconocen personas o cosas, cuentan o dicen que "tan claro como que dos y dos son cuatro" son matemáticos o filósofos de la Matemática.

Sin embargo, hay un número muy reducido de personas que se dedican a crear, enseñar, cultivar o divulgar la Matemática.

Este capítulo no es de Matemática pero es acerca de la Matemática y de quienes la practican. Poseo amigos que no son matemáticos pero que están ampliamente deleitados cuando asisten a una reunión de matemáticos y son contagiados de esa pasión por esta "Bella Arte".

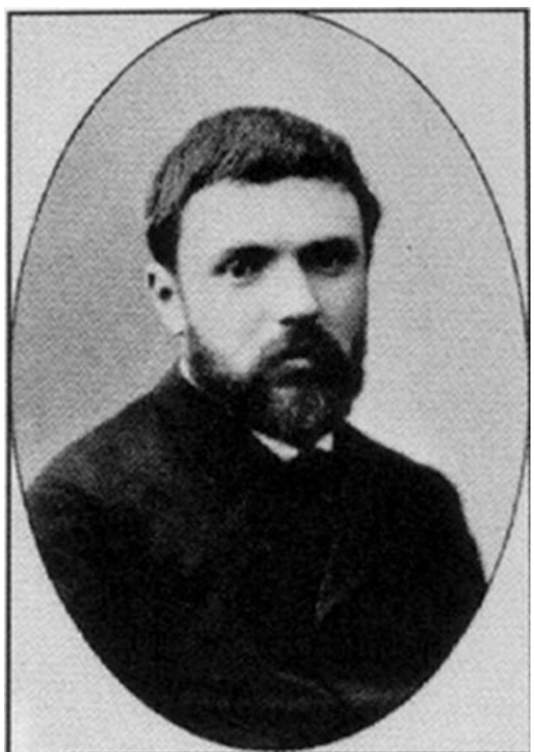
Siempre es muy interesante que no solamente practiquemos una actividad sino también hablemos de ella, conozcamos cómo es su desarrollo, su papel en la historia, en la sociedad y a quienes la practican.



Máquina de Pascal

Es muy común la creencia de que un matemático es una persona que se dedica a realizar enormes sumas de números naturales durante todos los días. También la gente supone que un matemático sabe sumar y multiplicar los números naturales muy rápidamente. Si pensamos un poco acerca de este concepto que la mayoría de la gente tiene podríamos concluir que no se requieren matemáticos ya que una calculadora de bolsillo realiza este trabajo. También, cuando uno les pregunta que cuál es la diferencia entre un matemático y un contador, no la saben. Los matemáticos no son los que calculan o hacen cuentas sino los que inventan cómo calcular o hacer cuentas. Hacer Matemática es imaginar, crear, razonar.

A pesar de que la Matemática es la más simple de las disciplinas sistemáticas que el ser humano ha creado, pues se concentra en conceptos abstractos nada comparables a la complejidad de los seres humanos, a muchas personas no les gusta la Matemática. Generalmente dicen que porque no la entienden. En su mayoría se refieren a lo que se enseña en la escuela primaria o secundaria. Una razón de esto es que son personas que nunca estudiaron constantemente y deseaban entender algún concepto sin antes haber entendido los anteriores. También es común entre estas personas el estudiar solamente para pasar algún examen y, de preferencia, solamente la noche anterior al examen. Se jactan de que nunca entendieron nada y de que nunca las han utilizado para nada. Dicen que son horribles y que nunca han podido hacer cuentas. Otra razón muy frecuente es la tradición familiar, en la cual algún papá o mamá comenta a sus hijos que ellos nunca pudieron entender nada, de que son muy difíciles y de que son horribles. Si esto es lo que le parece a papá o mamá ya podemos suponer qué pensarán o sentirán sus hijitos.



Henri Poincaré

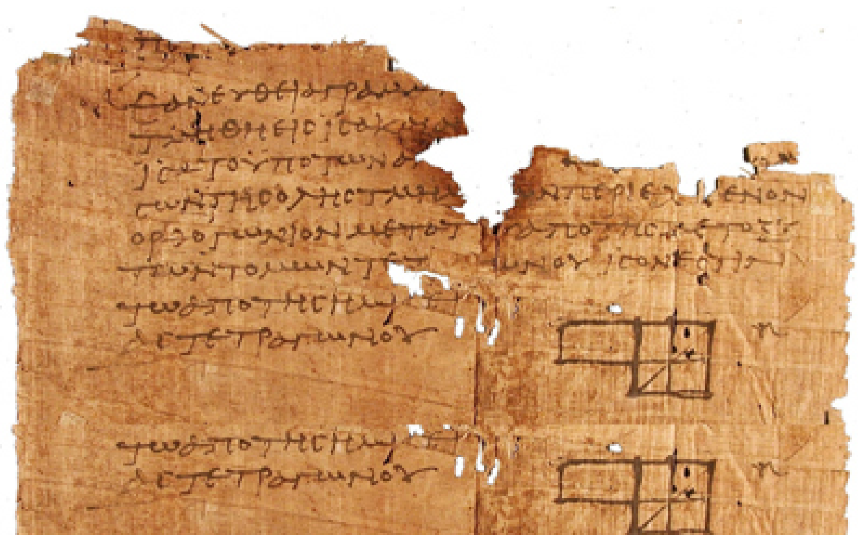
(1854-1912)

Poincaré se preguntaba cómo es posible que haya personas que no entienden matemática si éstas están basadas en leyes de la lógica aceptadas por el común de las personas. Pero el problema no es éste, sino que no se puede entender bien el argumento de una película si no se ha visto desde el principio.

Las definiciones de la Matemática de los diccionarios, los cuales no son muy consultados por la mayoría de la gente, no ayudan a elucidar qué es la Matemática. Por ejemplo el diccionario de la Real Academia Española dice que la Matemática es la ciencia que trata de la cantidad. Otro dice que es una ciencia que trata de las cantidades, magnitudes, formas y sus relaciones por medio de números y símbolos. En otros diccionarios se describe a la Matemática como la ciencia del espacio y de la cantidad, las cuales en su expresión más simple se llaman Geometría y Aritmética.

Según me comentó mi querido amigo, Arrigo Coen, *Mathema* significa erudición, *manthánein* el infinitivo de aprender, el radical *mendh* significa en pasivo, ciencia, saber. Luego, es lo relativo al aprendizaje. Así que en sentido implícito, Matemática significa: "lo digno de ser aprendido". También se dice que Matemática significa "ciencia por excelencia".

Se dice ¿Matemática o Matemáticas? Esta última denominación obedece a circunstancias históricas. En la Edad Media la clasificación en ramas estaba dada por la de Aritmética, Música, Geometría y Astronomía las que constituyeron el *Cuadrivium*. A éstas se les agregaron otras más, como el Álgebra y posteriormente la Teoría de Números. Sin embargo, desde la primera mitad del siglo XIX, debido al progreso en diversas ramas se le dio unidad a la Ciencia Matemática y justificaron el nombre en singular.



Uno de los más antiguos diagramas de los Elementos de Euclides
encontrados por B. P. Grenfell y A. S. Hunt.
Está en la Universidad de Pennsylvania.
El diagrama acompaña a la Proposición 5 del segundo libro.
www.mathsisgoodforyou.com/

Folio de los Elementos impreso por Erhard Ratdolt,
Venecia, 1482.
(Colección especial de la Biblioteca de la
Universidad de Glasgow, Sp Coll BD7-c.5)
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

Trescientos años antes de Cristo, Euclides estableció los fundamentos de la Geometría. Su libro es el segundo libro más traducido y copiado después de la Biblia y todavía se enseña en nuestras escuelas primarias. Pero la importancia mayor de los Elementos de Euclides radica en que los presentó como un *sistema deductivo*. Presentó unas ideas elementales evidentes, las cuales se pueden combinar a través de manipulaciones lógicas para dar resultados cada vez más complejos. El proceso deductivo se conoce con el nombre de *demostración*. Así que la Geometría Euclidiana es el primer modelo formal de un sistema deductivo, el cual se ha convertido en un modelo a seguir. La Geometría se convirtió y sigue utilizándose como un modelo de entrenamiento para el razonamiento lógico en los niños (desgraciadamente no bien enseñado y mucho menos bien aprendido por parte de los estudiantes).

En cuanto a la Aritmética, el aspecto deductivo de ésta, realmente tuvo impacto en el siglo XIX, cuando se dieron cuenta que lo importante no eran los números de por sí, sino las operaciones binarias definidas en conjuntos, así como sus estructuras.

La Matemática existe en la mente de los seres humanos, después existe en los libros, en videos o en las memorias de las computadoras.

Prácticamente toda cultura ha creado Matemática de alguna forma y en la actualidad casi todos los países poseen matemáticos los cuales no están aislados como en la antigüedad, y podría decirse que la Matemática actual está unificada y se transmite libremente y casi totalmente. Se realizan congresos nacionales e internacionales donde se realizan intercambios de ideas libremente entre los participantes y son un medio adecuado para el desarrollo de la Matemática.

La investigación matemática ya no es un pasatiempo de la aristocracia ni es patrocinada por la iglesia o la monarquía. Desde el siglo XIX ésta se desarrolla principalmente patrocinada por las universidades (las cuales reciben un subsidio proveniente de los impuestos o de donativos de corporaciones de diversa índole) permitiéndole o exigiéndoles a sus académicos que realicen investigación. Pero desgraciadamente supervisada por burócratas que desconocen qué es la Matemática. Existe un número pequeño de matemáticos en todo el mundo comparado con la población total. En México (en 1999) se estima que es aproximadamente alrededor de 3000 licenciados en matemática en toda su historia, de los cuales aproximadamente 900 están activos y la Sociedad Matemática Mexicana cuenta con alrededor de 1000 miembros al final de 2001. Así que el .001 de la población mexicana es un licenciado en Matemática activo, aproximadamente. Existen cerca de dos mil revistas en todo el mundo donde se publica Matemática periódicamente.

El matemático requiere para su trabajo de papel y lápiz, gis y pizarrón. Requiere de tiempo adecuado y disponibilidad para pensar, acceso a información en bibliotecas y una situación libre de problemas económicos. El uso de una computadora, contra lo que se cree, es mucho más utilizada por los ingenieros, físicos, astrónomos, químicos, economistas, secretarias, médicos, bibliotecarios o contadores y ha permanecido, salvo en un porcentaje pequeño, como máquinas para escribir o procesadoras de textos para los matemáticos puros. Sin embargo, cada día aumenta el uso de ella para resolver algunos problemas matemáticos. Casi toda la investigación matemática se sigue realizando como si no hubiera computadoras (u ordenadores como algunos prefieren llamarlas).

En general un estudiante de la licenciatura de matemática trabaja durante toda su carrera con alrededor de 20 libros básicos, mas quizás, otros 20 de consulta, a diferencia de otras carreras donde la cantidad de libros puede superar los 500. Esta notable diferencia se debe a que el estudiante de Matemática lee, razona, asimila cada palabra, cada renglón, medita y vuelve a releer, etc. de tal manera que puede pasar días con 1 hoja. Una excelente biblioteca de Matemática posee alrededor de 100,000 volúmenes. Esta cantidad de información está muy por encima del alcance de asimilación del ser humano. Esta biblioteca, comparada con las de otras ramas del conocimiento es de menor tamaño. En el medio matemático es o debe ser bien conocido este hecho. De aquí la modestia, en general, de los matemáticos, pues sabemos de lo mucho que ignoramos. (A diferencia de otros profesionistas donde el egresado no sabe lo que ignora y se cree el dueño del saber).

¿Cuánta Matemática hay? Actualmente la Matemática está clasificada en 63 áreas con alrededor de 5000 subclasificaciones. Es política de los profesionales de la Matemática eludir la mayor o menor importancia de un área o de otra. En la práctica, cada miembro está convencido de la existencia e importancia de su propia área sin importar cuan sospechoso esté de las otras áreas y de sus adeptos. En general adoptan el principio de no agresión o de total indiferencia. Así que todos aceptan o toleran la existencia de las otras áreas, para algunos superfluas, de la Matemática. El dividir la Matemática en ramas con fronteras rígidas es absurdo y va contra el espíritu de la Matemática. La clasificación tradicional de la Matemática en Álgebra, Análisis, Geometría, etc., es ahora totalmente obsoleta.

Véanse http://www.ams.org/msc/ y
http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/index.html

¿Cómo se origina una teoría matemática? La historia de la Matemática nos muestra que una teoría casi siempre se origina de los intentos para resolver un problema específico.

Dieudonné [D] establece varias categorías de problemas para la Matemática pura. Puede suceder que los esfuerzos para resolver algún problema no produzcan frutos, teniendo así la categoría I de problemas muertos al nacer.

Puede ser que el problema sea resuelto pero que los intentos por resolverlo no den lugar a un progreso en cualquier otro problema teniendo así la categoría II, es decir, la establece como la de problemas sin consecuencia, por ejemplo algunos problemas que surgen de la combinatoria.

Otra categoría consiste en examinar las técnicas utilizadas para resolver un problema, las cuales pueden aplicarse para resolver otros problemas similares o más difíciles, sin necesariamente entender el porqué funciona, es decir, la categoría III de problemas que proporcionan un método, como por ejemplo la teoría de grupos finitos o la teoría de números analítica.

La categoría IV es la que consiste de problemas que pertenecen a una teoría general fértil y activa que revelan la existencia de estructuras subyacentes insospechadas que no sólo iluminan la pregunta original sino que proporcionan métodos para dilucidar problemas huéspedes de otras áreas, por ejemplo la Topología Algebraica o la Teoría de grupos de Lie.

La categoría V que consiste de teorías en decadencia, las cuales no han florecido por varias razones, por ejemplo, una vez que han sido resueltos los problemas de mayor importancia así como las conexiones con otras ramas la teoría parecería concentrarse en problemas especiales y aislados, y probablemente muy difíciles. Por ejemplo, la teoría de invariantes.

Finalmente se tiene la categoría VI la cual consiste de teorías en estado de dilución, es decir, si se modifica una colección de axiomas de una teoría exitosa ya sea quitándole o agregándole axiomas sin ninguna razón aparente tratando de lograr el éxito de la teoría original, a menudo resulta en un esfuerzo infructuoso.

Menciona Dieudonné que la mayoría de los temas tratados por el Seminario Bourbaki pertenecen a las categorías IV y con menos extensión a la III. (El grupo Bourbaki ha escrito y continúa escribiendo un compendio de la Matemática comenzando con los conceptos más generales y concluyendo con los más particulares desde 1939).

La Matemática posee fundamentalmente dos fuentes para la creación de nueva Matemática. La Matemática por sí misma es una y la otra es la demanda que producen de ella otras ciencias y la tecnología. Un reto sin par en la Matemática es el de relacionar dos áreas de la Matemática aparentemente desconectadas.

Mucha Matemática se crea por simple curiosidad. Pero esta simple curiosidad sólo la poseen los grandes matemáticos. Uno de los problemas más difíciles para un matemático principiante (o no tan principiante) es el de encontrar un problema. A menudo sucede que casi toda la emoción de la creación y penetración está concentrada en formular la pregunta adecuada. Podría decirse que esto es más de la mitad del trabajo y a menudo la que requiere de inspiración. Esta es una gran diferencia con la investigación en otras áreas del conocimiento y es precisamente por esto el que la investigación matemática es extremadamente difícil. La respuesta puede ser también difícil, puede requerir mucho ingenio, puede utilizar técnicas conocidas y en el mejor de los casos requiere de la invención de nuevas técnicas. El matemático no procede como un detective para encontrar la solución de su problema. No es una computadora de deducciones, sino procede mediante experimentación (que no utiliza tubos de ensayo o equipos costosos), mediante la inducción y, si hay suerte, inspiración.

Poincaré escribe a principios del siglo XX, que una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados con cierto orden y que el orden en que son colocados es mucho más importante que los silogismos por sí solos. Comenta que no tiene miedo de que alguno de éstos se le olvide pues cada uno de ellos tomará su lugar en el arreglo sin el menor esfuerzo. También describe el proceso de creación: primero se realiza un trabajo consciente acerca del problema, después deja madurar esas ideas en el subconsciente, luego aparece la solución, quizás cuando menos se espera, y finalmente ésta se escribe.

¿Cómo es un matemático? ¿A qué problemas se enfrenta en la vida real? ¿Cuál es su estereotipo y qué imagen posee de sí mismo? ¿Cuál es la imagen de un matemático para los demás? Cuando a un matemático le preguntan que de qué se trata su área de trabajo, le están preguntando algo que requiere de mucho tiempo para contestarla. En lo personal les contesto con otra pregunta: ¿de cuánto tiempo dispone usted para escuchar la respuesta? Luego, el matemático le trata de explicar que la tal teoría algebraica requiere de dos años de estudio del posgrado para que pueda entender más o menos la definición de los objetos de estudio de la tal teoría. Inmediatamente, la cara sospechosa del interlocutor menciona que ¡si se está seguro de que esa es una teoría válida! Más aún, su desconfianza aumenta cuando se pregunta si algo que no puede explicarse con palabras existe o si el tipo se está haciendo tonto. Sin embargo insiste en que se le dé una idea vaga de lo que se está haciendo o de los problemas más relevantes del área. Así, el matemático le dice que el cálculo del n-ésimo grupo de homotopía de la construcción más de Quillen del espacio clasificante del grupo lineal general del anillo de los números enteros es el problema más importante de su rama, el cual lleva más de dos décadas sin poder resolverse... Luego viene la pregunta de para qué sirve eso, a la cual el matemático solamente puede decir que, efectivamente tiene aplicación en otras ramas de la Matemática y quizás tenga aplicaciones en el futuro a otras disciplinas pero que de momento no las tiene. Después le pregunta que cuál es el resultado más importante en los últimos años en esa rama, a lo que el matemático le contesta que no le puede explicar pues requeriría de mucho tiempo (probablemente años o quizás nunca) para que tuviera algún sentido para el cuestionante. Luego viene la pregunta de qué tan relevante es su trabajo y si las empresas o el gobierno lo utilizarían, cuántas personas lo entenderían y si el señor gobernador lo puede inaugurar.

Lo que sucede es que el trabajo de frontera en la Matemática, en una subdivisión de alguna rama, solamente es inteligible para unas cuantas decenas de matemáticos de todo el mundo. Es muy probable que la rama a la cual se dedica un matemático no haya existido en la fecha de su nacimiento. Piensa que su rama es muy importante y que está firmemente establecida en el mundo real. Es decir, no duda de su existencia. Está etiquetado por su campo de trabajo, por cuánto publica, por el de quién es el trabajo que utiliza en su investigación y por la selección de los problemas que escoge. Pasa años contemplando y estudiando, meditando, pensando y su éxito puede llegar si produce un resultado nuevo. A menudo cree haber probado una conjetura importante o producido un teorema nuevo pero también a menudo algún colega le encuentra una pequeña falla en su argumento con lo cual la conjetura sigue abierta. Se siente un poco incomunicado, (ya hay correo electrónico) y solamente en su Universidad existe un colega que puede medio entender lo que a él le apasiona. No se diga que para el resto de los matemáticos su área de trabajo es totalmente desconocida, hasta de nombre, o que sus colegas creen que se trata de tal o cual cosa pero resulta todo lo contrario.

El matemático asiste, cuando por cuestiones financieras se le permite, a congresos nacionales o internacionales. La gran mayoría realiza las actividades de preparación adecuadamente y a la altura de su profesión. Los más, asisten a los congresos de una manera usual sin llamar la atención por sus atavíos y en la mayoría de los casos sí preparan con mucho cuidado y esmero sus ponencias, llegando a ser de los mejores expositores de entre cualquier disciplina científica ya que la claridad adquirida como parte del cotidiano meditar sobre su área les han permitido dicha cualidad. Pero hay otros que no. Estos últimos preparan su uniforme (sobre todo si es de un área creada en la segunda mitad del siglo XX): Un pantalón vaquero, de preferencia el menos limpio, roto y viejo. Una camiseta y los tenis más sucios y viejos, de preferencia mordidos por su perro. No llevará jabón ni peine, tampoco cepillo de dientes ni pasta, pues debe de "viajar ligero". Preparará su plática de ser posible unas cuantas horas antes de llegar, en el tren o en el avión (y no olvidará mencionar esto al comenzarla) o bien horas antes en su cuarto de hotel. Tratará de ser lo más desorganizado posible al exponer, olvidando hechos y resultados importantes para su clara comprensión y suponer que todo oyente es una copia de él mismo en cuanto al conocimiento requerido para entenderla. Todo esto es para que no se salga del modelo, del común denominador, no sea que lo vayan a confundir con alguna persona de otra profesión. Esto sucede en otros países y cualquier semejanza con nuestro medio es mera coincidencia.

En otros países, en cuanto a su lugar de trabajo, y para conservar la asimilación a algunos grupos, algunos deben ser muy desordenados. De preferencia tener papeles tirados en el piso de su oficina, o por lo menos largas pilas de papeles inservibles en su escritorio y demás mobiliario. Los libros deben estar apilados unos al derecho y otros al revés, pues si estuvieran ordenados podría pensarse que tiene graves problemas neuróticos. Sin embargo, sienten que a pesar de que no pueden organizar su propio escritorio, ¡pueden organizar muchas cosas bien! Otros conviven de manera solitaria o independiente y no difieren de una conducta promedio de otros ciudadanos. No les gustan las poses ni reflejan alguna imagen en particular, ni las requieren para desarrollar su actividad.

Muchos de los estudiantes ingresan al estudio de la Matemática sin realmente saber de qué se trata esa disciplina. Casi todos eran llamados “los genios del salón” del bachillerato. En un alto porcentaje eran los que tenían una conducta diferente, los que no se dejaban guiar por la masa, los que pensaban acerca de su existencia y papel dentro de la sociedad, otros, los que tenían problemas para relacionarse con sus compañeros, etc.

En cuanto a su relación con otros colegas, algunos deben de comportarse en forma inusual, rara, aparentar ser tímido y distraído, fuera lo más posible de las convenciones sociales de convivencia, pero siempre sabiendo exactamente donde están parados y donde tienen cada pie. A veces hay que saludar a sus colegas, a veces no hay que hacerlo para despistarlo, o aparentar concentración casi oriental en sus actividades. Deben ejercer la imagen comprada de genio distraído y desaliñado y vender esa imagen a las generaciones más jóvenes. Se vende bien. Esto sucede en otros países y cualquier semejanza con nuestro medio también es mera coincidencia.

En cuanto a su motivación o filosofía acerca de su profesión, muchos la ven como un medio para obtener algo. Son altamente competitivos y buscan ser los primeros a toda costa, aún de su propia salud física y mental. Otros ven a su disciplina como un privilegio que la vida les dio para desarrollar y crear sus potencialidades como ser humano, ven a su profesión como un fin en sí mismo y viven para la profesión. Por supuesto, al igual que en el resto de las licenciaturas de una universidad el egresado de una licenciatura generalmente no se dedica al estudio de su profesión, más bien la utiliza o la aplica. Para realmente dedicarse a la Matemática es necesario realizar estudios de posgrado y aún así apenas empezar a vivir el maravilloso mundo de la Matemática. Los egresados de una licenciatura de Matemática pueden y deben encontrar trabajo como cualquier otro egresado de una licenciatura, es cosa de hacerles ver a quienes contratan personal de las enormes ventajas que tendrían al contratar matemáticos, pues sobretodo, una de esas ventajas es de mucho valor para quienes no tienen miedo de contratar a personas que han realizado un entrenamiento en el acto de pensar y que poseen capacidad de aprender. Muchos de los pocos licenciados en Matemática se dedican a la docencia, ojalá hubiera más, hacen mucha falta sobretodo en los niveles básicos de primaria, secundaria o preparatoria. Se requieren con la licenciatura terminada, con una estupenda preparación y que deseen ser docentes por vocación, capaces de motivar e infundir en los jóvenes (quienes constituyen más de la mitad de la población de nuestro país) un verdadero amor al conocimiento científico y artístico.

Actualmente se distingue entre Matemática pura y aplicada y existe una impresión perversa de que hay algo horrendo acerca de las aplicaciones. Todavía persiste la creencia de que la más grande aspiración en la Matemática es la de crear una obra de arte permanente. Si como consecuencia ésta tiene alguna utilidad, es bienvenida. En general, el aspecto utilitario de la Matemática es una meta inferior para los matemáticos.

La actividad en la cual la Matemática encuentra aplicaciones fuera de su propio campo se llama Matemática Aplicada. La Matemática Aplicada es automáticamente multidisciplinaria, e ideal y probablemente debería realizarse por alguien cuyo interés primario no es la Matemática. Sin embargo encontramos que es mucho menos difícil que una persona que adquiere una formación matemática se adentre en otras disciplinas. Esta es una gran ventaja para los estudiantes y egresados de una licenciatura de Matemática Aplicada.

Si la actividad multidisciplinaria es por ejemplo la Física, es difícil saber qué clasificar como Matemática Aplicada y qué como Física Teórica. La aplicación de la Matemática en áreas diferentes de ella misma da lugar a cuestiones de otra índole. Supongamos que tenemos una aplicación de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales en la teoría matemática de la elasticidad. Podríamos preguntarnos si la teoría de elasticidad tiene aplicación fuera de sí misma. Supongamos que sí la tiene en ingeniería teórica. Luego nos podríamos preguntar si ésta tiene interés en la ingeniería práctica. Supongamos que sí, y que permite realizar un análisis de puertas automotrices. Luego nos podríamos preguntar cómo afecta esto al hombre común y corriente. Supongamos que se cumple un requerimiento de ley al tener puertas adecuadas. Así podríamos rastrear la aplicación de la Matemática hasta el nivel de consumo. Podríamos continuar, ¿es útil un automóvil? ¿Es útil consumir? etc.

Llamémosle “utilidad común” a la utilidad que llega hasta el hombre de la calle. (Asumimos que sabemos lo que el hombre de la calle desea). No se sugiere que el criterio de la calle sea el único para juzgar la utilidad de la matemática.

Se dice que la finalidad propia de las aplicaciones de la matemática es la de que la Matemática sea automatizada. Por ejemplo, el descenso del hombre en la luna requirió de muchos cálculos pero que estaban automatizados.

Tenemos un diagrama:

MUNDO FÍSICO →

→ MUNDO MODELADO CON MATEMÁTICA →

→ TRANSFORMACIONES Y OPERACIONES MATEMÁTICAS →

→ APLICACIONES AL MUNDO FÍSICO.

Las dos de en medio se convierten en un proceso automatizado. Mientras más exitosa y completa sea una aplicación, más automática y programada se debe convertir, véase [Da].

En cuanto a sus publicaciones, algunos matemáticos, los menos, escriben muy bien y son extraordinarios redactores, sus artículos son verdaderas cátedras de redacción, pero otros no escriben tan bien. Estos últimos deben de escribir sus artículos como si no los hubiera escrito un ser sensible. Entre más formales sean, mejor. No debe quedar rastro de las ideas, motivaciones, experimentos realizados que lo condujeron al teorema. Entonces deberá de escribir varias definiciones, una sucesión de varios lemas y como conclusión casi mecánica, debe de escribir en la demostración del teorema enunciado al final del artículo, que es obvio que ésta se sigue de los lemas anteriores. Luego debe revisar bien su artículo para que quede lo más antipedagógicamente posible, no sea que alguien le encuentre un error o le robe alguna idea por la cual ha pasado tanto tiempo meditando. Finalmente alguno de los 10 colegas de todo el mundo capaz de entender lo que hizo, se da cuenta que todos los lemas menos uno son irrelevantes y pueden detectar lo que el autor realmente está haciendo y porqué. Para el nuevo en esa área, le será materialmente imposible descifrar lo que estuvo detrás de ese resultado.

Pareciera que la edad más productiva de la mayoría de los matemáticos en la investigación es de alrededor de 10 años, entre los 25 y los 35. No es ésta una regla pero solamente existen un pequeño y destacadísimo número de investigadores en el mundo que realizan investigación después de los 40 y menos después de los 60 siendo muchos de éstos los de primera fila o los líderes en las diversas ramas de la Matemática.

Otros matemáticos piensan que en el trabajo de un matemático existe un enorme trabajo implícito de intuición, comparación, esfuerzos de pensar, mucha frustración y desesperación, mover montañas y sacar un pequeño grano valioso, y sobre todo, el no dejarse engañar por ideas fáciles.

No cabe duda de que para el ciudadano común y corriente, la creación matemática y su comunidad son un misterio, y lo seguirán siendo ya que para poder realmente apreciarlas tanto a la Matemática como a su comunidad hay que vivirlas y aceptarlas como un modo de ser y de pensar.

Por otro lado, existen disciplinas que utilizan a la Matemática como una herramienta para interpretar los fenómenos propios de su área. Cualquier disciplina que se haga llamar *ciencia* debe interpretar sus fenómenos matemáticamente. Aún más, las disciplinas no científicas que deseen saber algo sobre sus fenómenos lo hacen mediante la interpretación matemática.

La Música es un misterio. Es un arte potente y posee obviamente un gran significado, pero ¿ha podido alguien definirla satisfactoriamente? Se han escrito libros sobre el significado del significado de la Música. La Música es sonido entonado organizado con una finalidad expresiva. Sin embargo, para mí, una de las características más importantes que debe poseer la Música con valor artístico, muy brevemente dicho, es la de que cumpla con "dado un tema, qué hacer con el tema" y realmente hacer algo con él.

La música vive a través de la interpretación. Entre una obra musical y el mundo está el intérprete que da vida a la partitura. Sin embargo la relación entre el artista intérprete y el creativo ha cambiado profundamente en la historia de la música y así continúa haciéndolo. Las pinturas en las galerías son apreciadas directamente por el espectador, lo mismo ocurre con la escultura y la arquitectura. En la poesía nosotros podemos ser nuestros propios intérpretes, pero en el caso de la música, la partitura sólo tiene sentido para el intelecto de un músico formado. La gran mayoría de los amantes de la música dependen de los intérpretes para apreciar las obras maestras, siendo así que, en la música, el intérprete cobre una inmensa importancia. ¿Cuáles son los derechos del intérprete y dónde están sus límites? Los músicos componen en épocas determinadas y en una clase determinada de sociedad. Para conocer sus intenciones musicales, debemos estudiar la sociedad de su época. La música está vinculada a las ideas y hay que tener en cuenta las corrientes intelectuales, musicales y el sentido estético del público de la época.

Para comprender cómo es la interpretación de la música hoy es necesario saber cómo era en el pasado. Nada más difícil que la tarea de replantearnos las obras antiguas, sobre la base de la partitura original, en términos de los grandes maestros que las escribieron. Se debe aprender cómo leer el manuscrito y entender su lenguaje. La imaginación debe descubrir la esencia musical y el lenguaje interno tras los símbolos escritos. Finalmente el intérprete debe estar totalmente familiarizado con el entorno y la tradición de una obra. Para lograr esto, el intérprete debe de apoyarse en el conocimiento de los historiadores expertos que sean verdaderos guardianes del auténtico estilo. Si la música vive a través de su interpretación, entonces la auténtica interpretación sólo puede vivir a través del estilo genuino.

La Música es sonido entonado organizado con una finalidad expresiva. Pero requiere de intérpretes para cobrar vida. El papel de un intérprete en la sociedad actual es el de preservar y el de dar vida a las grandes obras musicales. Por sí misma, la Música es tan solo una serie de notas negras impresas en un papel. ¿Cuál es entonces, el principal problema de la interpretación? Para mí, es el de acercarse lo más posible a las intenciones del compositor y a partir de esa base dar vuelo uno a su imaginación. Por un lado, el intérprete está al servicio de las intenciones del compositor y por el otro, pone su propia personalidad.

La Música tan es parte del Hombre que el Voyager lleva como carta de presentación de la especie humana un disco grabado con lo más representativo. Entre otras cosas lleva su música y sus lenguajes. Es decir, algo de la creación realizada por el hombre.

Se explica que el hombre empezó a cultivar el conocimiento cuando tuvo el instrumento que le permitió poseer un excedente para su supervivencia (el arado) y así poseer tiempo para hacer la cultura [B, p.9]. Para que se cultive el conocimiento es necesario que exista tiempo para hacerlo.

El Arte y la Ciencia son una actividad exclusivamente humana. Mucho más de la mitad del cultivo del conocimiento, es decir, de la cultura, lo constituye el conocimiento científico. Este es un hecho ampliamente ignorado por la mayoría de la gente que piensa que la cultura solamente está constituida por conocimientos literarios o artísticos. Es un gran error ver a la cultura de este modo.

Pregúntese usted de qué se enorgullecen los germanos. Cuando va usted de visita, le muestran orgullosamente las casas que fueron habitadas por Bach, Beethoven o Mozart. En los museos se nos muestran los originales de sus partituras. En general cuando vamos de visita a otro país se nos muestran las pinturas, las cartas, los instrumentos, las universidades, etc. de grandes hombres dedicados a la cultura como Newton, Leonardo, Galileo, Kepler, Gauss, Goethe, Shakespeare, Pasteur, Curie, Cervantes, Sor Juana, Byron, Ponce, Einstein, Mendel, Darwin, etc. Solamente unos cuantos hombres basados en el trabajo creativo de otros son los que han hecho posible el desarrollo y evolución de la raza humana. Sin embargo ¿Cómo trató la sociedad humana a éstos? Pareciera ser que la respuesta a la pregunta anterior siempre será la misma.

Por diversas razones, no conocidas por todos, pasando desapercibidas por muchos, la desaparición del cultivo del conocimiento, es decir, de la cultura ya se ha dado en diversas regiones del planeta. Existen poblaciones enteras incapaces de apreciar algo que les entra por uno de los sentidos, por ejemplo, la música y no se diga de la ciencia, la cual requiere de un involucramiento más allá del sitio de un espectador.

En muchas universidades se ha tenido una sensible baja, proporcionalmente a la población del país, en la matrícula de estudiantes de nuevo ingreso carreras científicas y en particular en

Matemática. No existen los incentivos de carácter de supervivencia para las nuevas generaciones. Han aprendido que la supervivencia es más fácil revendiendo cosas que creándolas. Los valores están invertidos. Esta es una política que debe de cambiar. Lo mismo ha sucedido en las artes, en especial en la Música. Cada vez vemos con mayor tristeza que hay un menor número de recitales o conciertos, de intérpretes cuya función es la de preservar y darles vida a las grandes obras de arte, y de que hay poblaciones y ciudades completas de más de un millón de habitantes, no nada más en nuestro país, en las que no hay un solo recital o concierto al año y tampoco hay quien pueda apreciarlos. En nuestro país, existen alrededor de 50 pianistas en activo que realizan actividad concertística (al menos una vez al año) y alrededor de 2000 músicos sinfónicos activos. Hay que recordar que la mitad de los pobladores de nuestro país es menor de alrededor de los veinte años y que están creciendo casi como los bárbaros que quemaron la Biblioteca de Alejandría. Serán generaciones que se dediquen a utilizar la tecnología importada y por lo tanto totalmente dependientes del exterior. Serán incapaces de entender su papel dentro del contexto humano, y como en un hogar disfuncional terminarán odiando su casa, es decir, su lugar de nacimiento y por lo tanto su patria. Una patria sin cultura está destinada a ser absorbida y a no existir. La mayor inversión que puede crearse en un país es la que se destina a la formación de capital humano. Es éste el que genera el capital material o financiero.

Existe un juego con dados (véase el capítulo II) para componer valses sin saber nada de música ni de composición inventado por Mozart, K.294 C, en el cual estableció 176 compases los cuales al aparecer en el juego dan como resultado el estreno de una obra suya continuamente por un periodo de 361 millones de años. Menciono ahí que el genio de Mozart consistió en tomar las mejores o más bellas frases musicales de toda la enorme gama de posibilidades para crear su Música. Poincaré menciona que la creación de nueva Matemática no consiste en hacer combinaciones nuevas de entidades matemáticas ya conocidas, sino solamente en tomar las combinaciones útiles, las cuales son una pequeña proporción. Si solamente fuera la rutina de aplicar reglas, las combinaciones obtenidas serían exageradamente numerosas, inútiles o extrañas. El trabajo del inventor o creador consiste en escoger solamente las combinaciones útiles y las reglas o el procedimiento que conduce a esta elección es extremadamente fino y delicado. Es casi imposible, dice Poincaré, el establecer estas reglas o procedimientos. Es cosa de sentirlas mas bien que el de formularlas. Bajo estas condiciones imagínense a una máquina o aparato de cómputo aplicándolas mecánicamente. Sucedería lo mismo que con el juego de Mozart.

Recordemos que la ciencia y el arte son actividades esencialmente humanas. La Matemática es una de las "Bellas Artes" que posee el don de ser al mismo tiempo la más elaborada y sofisticada de todas las ciencias. Esta es una frase muy difícil de comprender para la mayoría de las personas. Sin embargo, la ciencia es una manera eficaz y elegante de comprender el universo. La ciencia se auto corrige. Nuestra vida y nuestro destino están indisolublemente ligados a la ciencia. Es esencial para nuestra simple supervivencia que comprendamos la ciencia. Para quien la comprende, la ciencia es un placer. Hemos evolucionado de tal modo que el hecho de comprender nos proporciona placer, porque el que comprende tiene mayores posibilidades de sobrevivir.

El ser humano es producto de un proceso evolutivo que comenzó hace unos 4000 millones de años. Hace menos de diez millones de años aparecieron los primeros seres que se parecían al ser humano y hace apenas unos cuantos millones de años que emergieron los primeros seres humanos. Pero hace poco, unos dos mil años que tenemos cultura. Las grandes obras musicales fueron compuestas hace solo 350 años y exceptuando la geometría de Euclides casi toda la Matemática data de hace también 350 años. Nuestro quehacer cultural es relativamente nuevo y reciente. Podemos perderlo con mucha facilidad. Siempre que una sociedad se encuentra en crisis, lo más vulnerable y lo primero en desaparecer es el arte y la ciencia. Parece que la sociedad humana y sus gobernantes no quieren darse cuenta de lo delicado y fino que es la creación artística y científica. Esta creatividad es precisamente la que distingue al ser humano de los animales y que el acabar con sus artistas y científicos es acabar con la cultura. Recuperarlos es demasiado difícil y el precio es inconmensurable. Es lo mismo que la destrucción de la Biblioteca de Alejandría por los bárbaros. Un pueblo que no puede cultivar el conocimiento está destinado a quemar sus bibliotecas. Un pueblo que no conoce la historia, que no conoce los grandes errores que se han cometido, está destinado a volverlos a cometer. Lo que un artista hace o crea es reflejo de la filosofía de un gobierno o pueblo según su grado de libertad.

Algunas personas piensan que la Matemática es un juego simple que sola y fríamente interesa al intelecto. Esto sería el olvidar, asienta Poincaré, la sensación de la belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, así como de la elegancia geométrica. Esta es ciertamente una sensación de placer estético que todo verdadero matemático ha sentido y por supuesto que pertenece al campo de la emoción sensible. La belleza y la elegancia matemática consisten de todos los elementos dispuestos armónicamente tales que nuestra mente pueda abarcarlos totalmente sin esfuerzo y a la vez mantener sus detalles. Esta armonía, continúa Poincaré, es, de inmediato, una satisfacción de nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente que sostiene y guía. Y al mismo tiempo, al poner bajo nuestra visión un todo bien ordenado, nos hace entrever una ley o verdad matemática. Esta es la sensibilidad estética que juega un papel de filtro delicado, la cual explica suficientemente el porqué el que carece de ella nunca será un verdadero creador, concluye Poincaré.

Para los autores de este texto, la Matemática es una de las Bellas Artes, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

CAPÍTULO II

Matemática en la Música I*

Es común escuchar que “hay Matemática en la Música porque cuando se abre una partitura ésta está llena de numeritos”, es decir, de los números del compás y las digitaciones. Obviamente esta observación es muy simple. Se dice que hay Matemática en la Música, que la Música y la Matemática están muy relacionadas. Pero ¿hay Matemática en la Música? ¿Están relacionadas? ¿Qué relación existe entre la Música y la Matemática? Deseo exponerles algunas reflexiones acerca de esta pregunta e ilustrarlas con algunos ejemplos acerca de lo que algunos artistas o científicos han hecho al respecto durante la historia de la Humanidad.

Leibniz describe a la Música como "un ejercicio inconsciente en la Aritmética". Esta afirmación quizás se podría justificar sobre la base de que el músico intérprete cuenta los tiempos del compás cuando comienza a estudiar una obra pero después de un tiempo de tocarla, ya no está contando conscientemente sino que deja fluir la magia de la Música. Sin embargo casi todos los "elementos externos" de la Música se definen numéricamente: 12 notas por octava; compás de 3/4, 7/8,...; 5 líneas en el pentagrama; n decibeles; semitono de raíz duodécima de dos; altura de 440 hz; lo horizontal y lo vertical en la textura musical; arriba y abajo en la escala; etc.

En la Edad Media la Música estaba agrupada con la Aritmética, la Geometría y la Astronomía en el Cuadrivio. La Música no se consideraba un arte en el sentido moderno sino una ciencia aliada con la Matemática y la Física (la Acústica). Matemáticas un poco más elevadas se utilizaron en el cálculo de intervalos, el cual

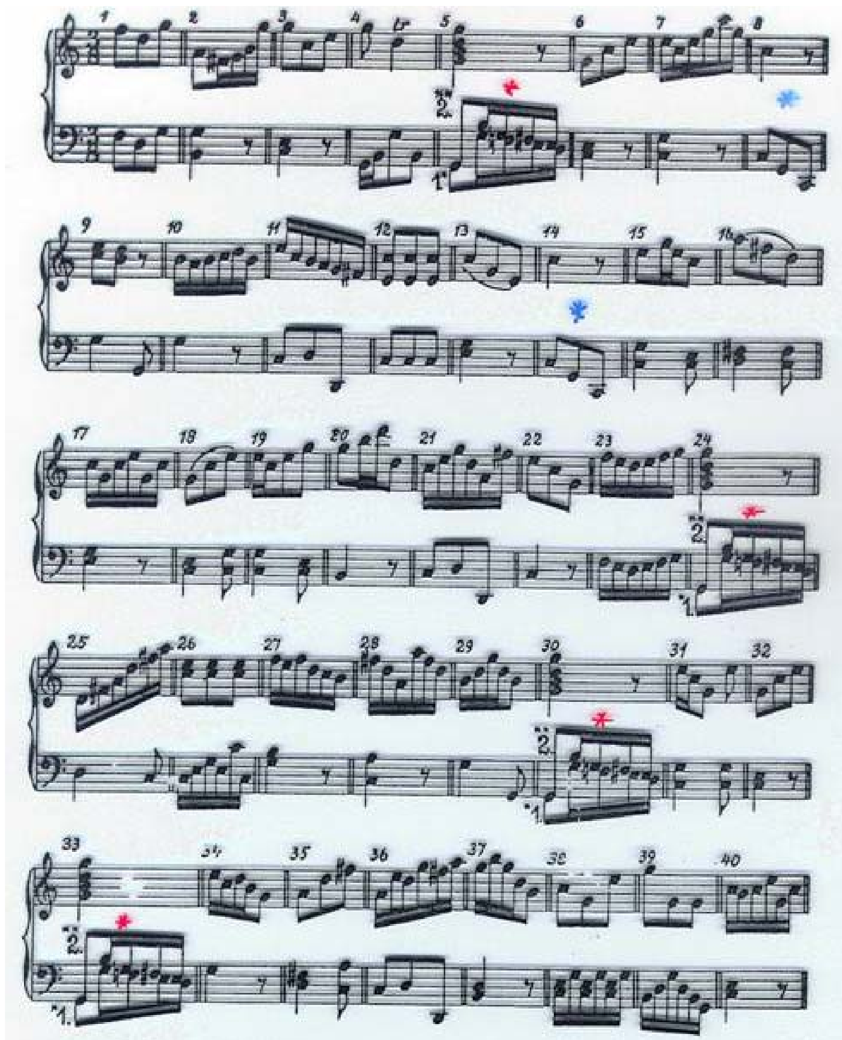
* Una versión previa a ésta apareció bajo el título ¿Matemáticas en la Música? Miscelánea Matemática. Núm.27. Soc. Mat. Mex. (1999) pp. 15-27.

requería el uso de logaritmos, y los problemas del temperamento requerían del uso de fracciones continuas.

Es prácticamente desconocida la aplicación de algunos conceptos matemáticos a otros aspectos de la Música como son el análisis, los aspectos estéticos, la composición y la Teoría Matemática de la Música. A continuación veamos cómo algunos matemáticos y músicos han aplicado conceptos matemáticos en la Música.

W. A. Mozart

Mozart, en 1777, a los escasos 21 años de edad, escribió un "Juego de Dados Musical K. 294 (Anh. C) para escribir valses con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición".



Escribió 176 compases adecuadamente (aquí vemos los primeros cuarenta) y los puso en dos tablas de 88 elementos cada una.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

El juego comienza lanzando los dos dados, de tal manera que tenemos 11 números posibles (del 2 al 12) y hacemos 8 tiradas obteniendo distintos compases excepto los de la última columna que son iguales (éstos últimos con dos posibilidades: una para la repetición y otra para continuar con la segunda tabla. La segunda tabla es igual a la primera excepto que tiene otros 88 compases con los de la última columna idénticos. Así, mediante un simple cálculo, utilizando conceptos del Álgebra Superior, se tienen 11^{14} valses diferentes, es decir, aproximadamente 3.797498335832 (10^{14}) valses diferentes. Si se toca cada vals, con repetición de la primera parte, en 30 segundos, se requerirían de 30(11^{14}) segundos, es decir, 131,857,581,105 días aproximadamente, o bien, 361,253,646 años aproximadamente en tocarlos todos uno tras de otro ininterrumpidamente. Es decir, un estreno mundial de una obra de Mozart cada 30 segundos a lo largo de ¡361 millones de años! (Recuérdese que la antigua edad de piedra comenzó hace unos 35,000 años). Mozart era un aficionado a la matemática y su enorme talento se mostró una vez más. Con este jueguito tan sencillo ¡dejó la imposibilidad de que intérprete alguno pudiera tocar su obra completa o de que alguna compañía de discos la grabara!

Véase http://www.lim.dico.unimi.it/eventi/ctama/baggi.htm para una explicación del uso de la computadora en la Música.

Aún más, nos muestra qué poca idea tenemos de los números grandes como $30(11^{14})$. Existieron y existen compositores que creen que ya todo está agotado con la armonía tradicional, y que por lo tanto hay que buscar un nuevo estilo de música. (Mozart, para este juego, solamente utilizó 176 compases). Aún en estos días, con computadoras y Combinatoria no se podría manejar una pequeña porción de motives musicales puesto que la cantidad de clases de isomorfismo es exorbitante. Por ejemplo, la formula de Fripertinger da un número de órbitas afines de 72 elementos motívicos en $(Z_{12})^2$, que es del orden de 10^{36}. El número de estrellas en una galaxia está estimado en 10^{11}. Así, el universo musical es un serio competidor contra el universo físico. También, el uso de métodos estadísticos es requerido para atender la enorme variedad de casos. Ni siquiera las computadoras de la próxima generación podrían manejar todos los casos.

George David Birkhoff (1884-1944)

En 1924 George David Birkhoff (quien trabajó brillantemente en el Problema de los tres cuerpos, Ecuaciones Diferenciales, Teoría General de Relatividad entre otras áreas, miembro honorario de la Sociedad Matemática Mexicana y contribuyente al desarrollo cultural de México) retoma unas ideas que había tenido años atrás pero que no desarrolló por dedicarse exclusivamente a estudios puramente matemáticos. Pensó que la melodía dependía del orden de las notas escuchadas por el oído. Le pareció que podrían establecerse unas relaciones de orden, guardadas por las notas, y así poder escoger las mejores melodías. Para él, el *problema fundamental de la Estética* era el de determinar, para una clase de objetos, las características específicas de las cuales depende el valor estético.

Birkhoff considera que hay tres fases consecutivas para la experiencia estética: primero, un esfuerzo preliminar de atención, el cual es necesario para percibir el objeto y que es proporcional a la *complejidad* C del objeto; segundo, una sensación placentera o *medida estética* M la cual recompensa este esfuerzo preliminar; y tercero, una certificación de que el objeto posee una armonía, simetría u *orden* O el cual parece una condición necesaria, si no es que suficiente, para la experiencia estética.

Así, Birkhoff propone la fórmula $M=O/C$ mediante la cual expresa la medida estética como el efecto de la densidad de las relaciones de orden comparadas con la complejidad.

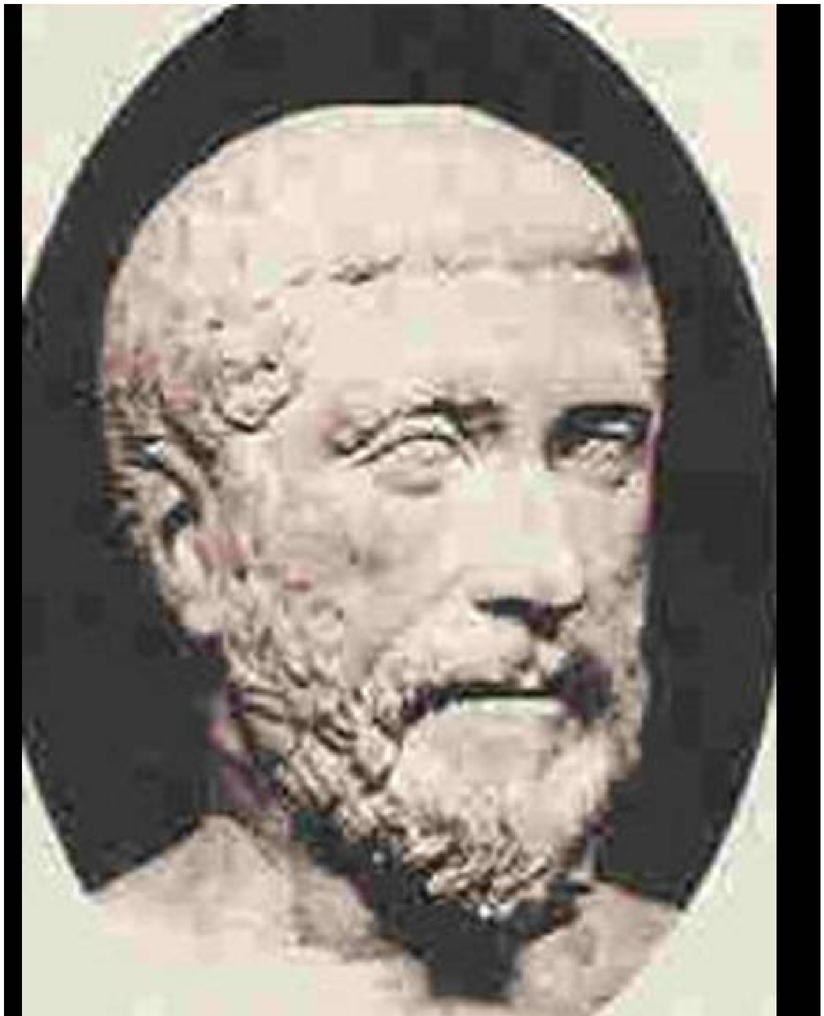
El mismo inquiere lo atrevido de esta fórmula y proporciona algunas justificaciones históricas. La Estética trata del placer estético y con los objetos que lo producen. Así es que tenemos clases de objetos los cuales pueden ser comparados con respecto a su valor estético (los de clases diferentes no pueden ser comparados). Luego, el problema fundamental de la *Estética Analítica* es el de determinar los factores estéticos y su importancia relativa.

Percibir un objeto estético requiere de ciertos ajustes y la sensación de esfuerzo o tensión que acompaña siempre a la percepción aparece como la suma de las tensiones a los diversos ajustes automáticos. Así, si A, B, C,... representan estos ajustes, cada uno con tensiones a,b,c,... y si éstas se realizan r,s,t,... veces podemos considerar la suma $C=ra+sb+tc+...$ como la complejidad.

Por otro lado, el orden O corresponde a ciertas asociaciones que intervienen en el acto de percepción. Por ejemplo, la simetría sería una asociación. Si L,M,N,... son asociaciones de varios tipos, cada una con índices de sensación l,m,n,... las cuales ocurren u,v,w,... veces, entonces podemos considerar el total de sensaciones (positivo o negativo $O=ul+vm+wn+...$ como el orden del objeto. Así, la estimación intuitiva de la cantidad de orden O inherente al objeto estético, comparado con su complejidad C, nos proporciona su medida estética.

Obviamente esta teoría matemática solo puede aplicarse a objetos cuyos factores estéticos sean esencialmente matemáticos o formales. Hay otros factores que están más allá de esta teoría, como por ejemplo, las asociaciones acerca del significado de un poema hermoso.

Veamos cómo algunos pensadores han percibido la presencia de elementos matemáticos en el arte. A diferencia de las teorías hedonísticas, místicas o moralistas, la teoría analítica se concentra en proveer una solución cuantitativa al problema fundamental antes formulado. Parecería que la Estética, si ha de considerarse científica debe de abordarse en una forma analítica y restringirse a aspectos formales del arte. Sin embargo, no se pretende negar la importancia trascendente del aspecto connotativo en todo arte creativo.

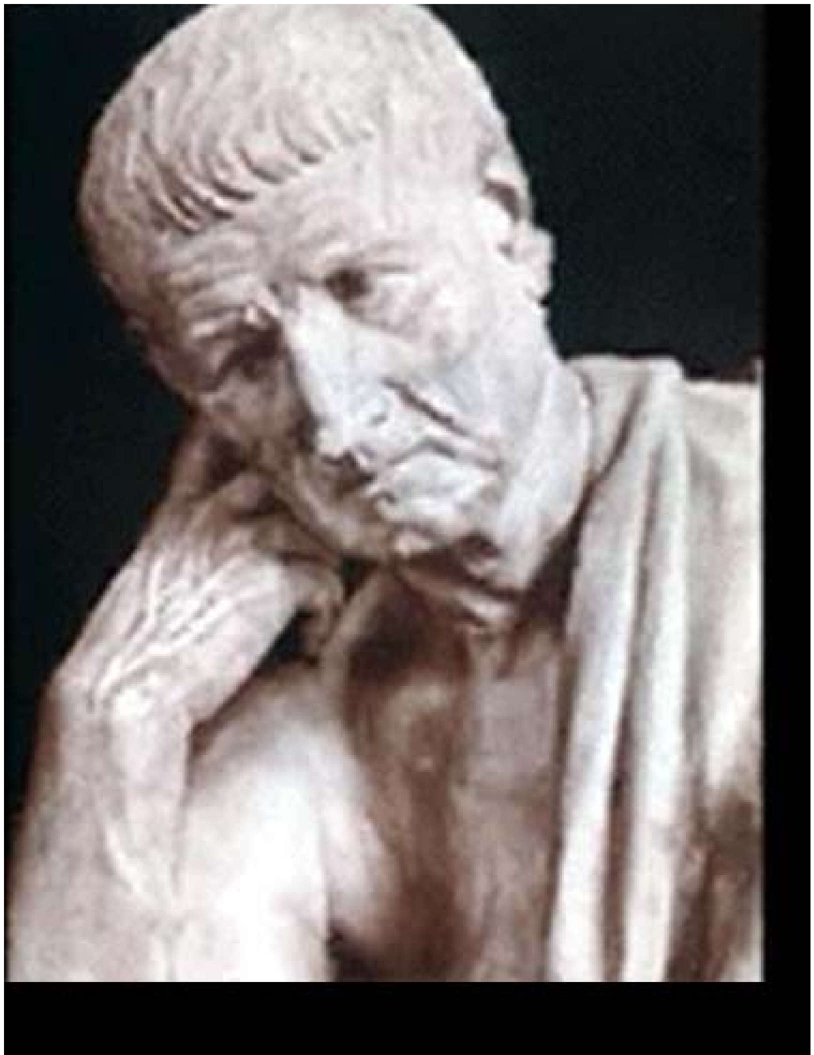


Pitágoras
(569 – 475 AC aproximadamente)

Pitágoras (550 AC) explicó la Música como una expresión de esa armonía universal la cual también se realiza en la Aritmética y la Astronomía.

Platón (428 – 347 AC)

Platón reconoce la importancia del elemento matemático. Dice que si a cualquier arte se le quita la aritmética, la medida, y lo pesable, lo que queda no es mucho. También expresa que a través de la medida y la proporción siempre se llega a la belleza y a la excelencia.



Aristóteles (384 – 322 AC)

Aristóteles expresa que están equivocados aquellos que claman que la Matemática no dice nada acerca de la belleza y la bondad, y que los elementos de la belleza son el orden, la simetría, la limitación definida y que éstas son las propiedades a las cuales la Matemática les pone atención.

El punto de vista de la filosofía griega estaba inclinado a seleccionar la forma y la proporción como los elementos típicos de la belleza.

El matemático Luca Pacioli en su "De Divina Proporcione" de 1509 considera la sección dorada, misma que utilizó su amigo Miguel Ángel y que posteriormente abordaremos.

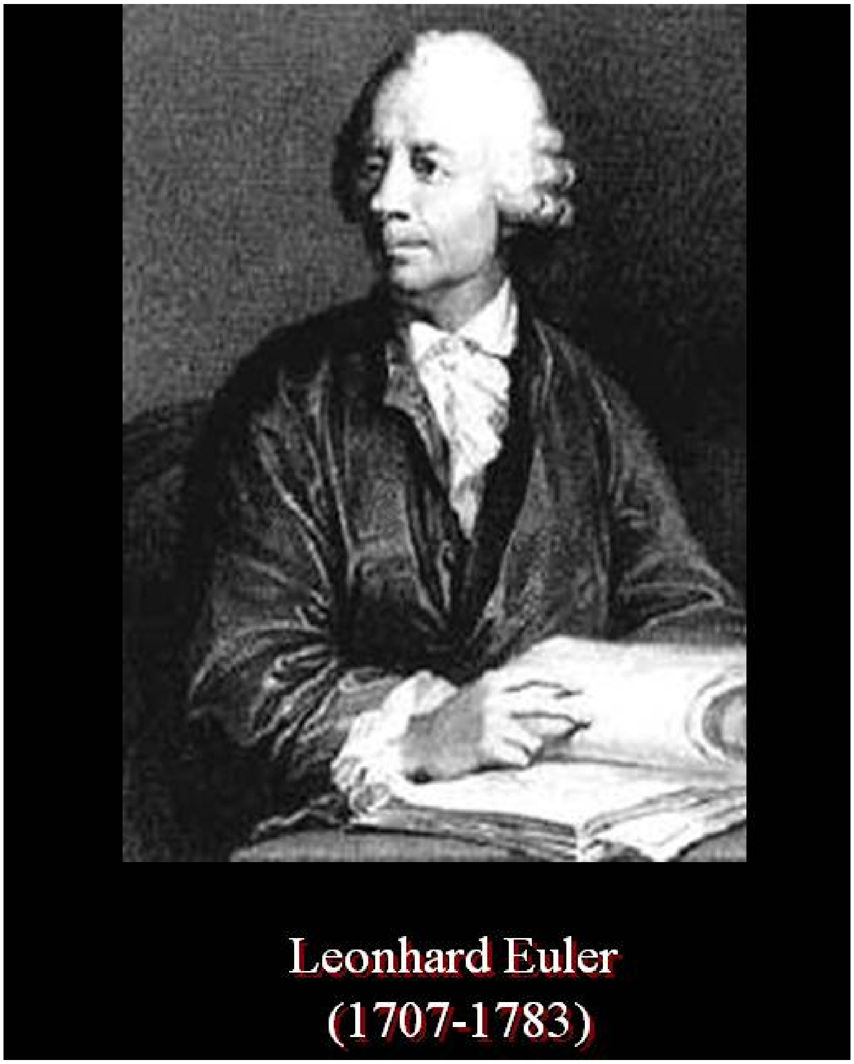
Durante el siglo XVII y principios del XVIII prevalecieron los conceptos de "ingenio" y "buen gusto". En éste último está implícito un esfuerzo de atención, luego un juicio estético intuitivo dependiendo del buen gusto y finalmente el análisis.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Leibniz pudo admitir las percepciones y juicios estéticos como parte del saber y definió la Música como el contar sin saber que se está contando. Esto último concuerda con el concepto de Birkhoff en el sentido de que la densidad de ciertas relaciones ordenadas entre las notas consideradas intuitivamente, miden el efecto estético. De Crousaz escribe, que el buen gusto nos hace apreciar, al principio, por sensaciones, aquello que la razón hubiera aprobado.

Rameau observó que una nota musical está compuesta por un sonido fundamental y varias parciales, y que las notas que difieren por una octava son similares en cuanto a su efecto estético y pueden considerarse casi idénticas. Estos hechos conducen al entendimiento de la música occidental.

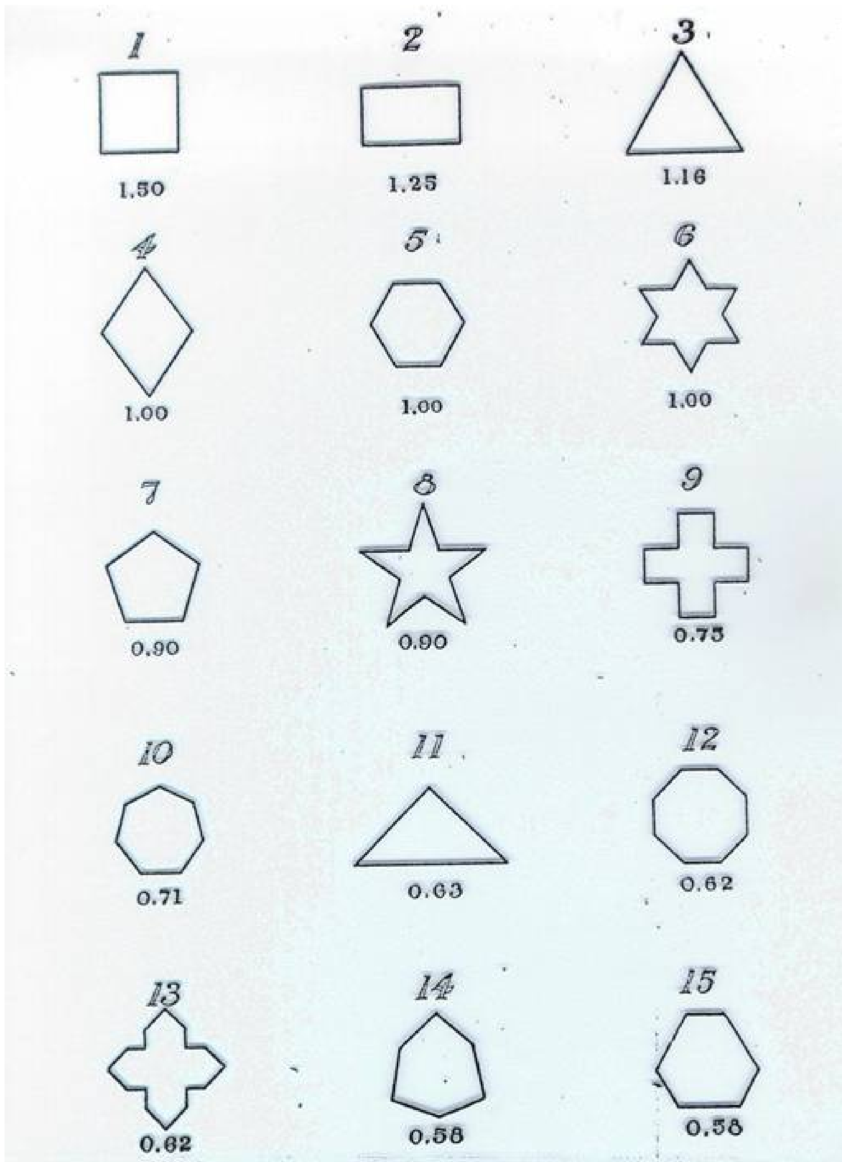
Fue d'Alembert quien dio una clara presentación del trabajo de Rameau (el cual es cualitativo, a diferencia del tratamiento cuantitativo de Birkhoff). Así, el grado de armonicidad es distinto del agrado o medida estética. Por ejemplo, el unísono y la octava son los más armoniosos de los intervalos pero no los más agradables.



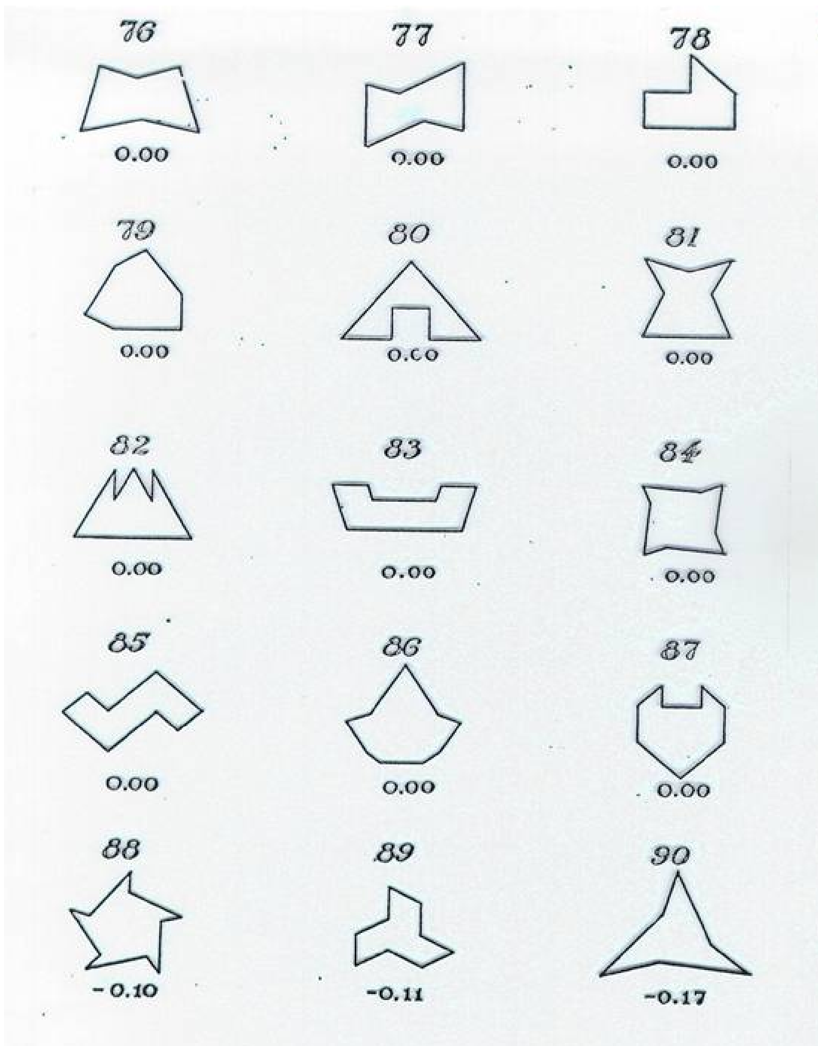
Euler, en 1739, desarrolló una teoría de consonancia basada en la ley pitagórica. Entre más pequeños sean los números que expresan la relación de vibración de dos notas, éstas serán más consonantes. De ésta forma, Euler estableció un criterio de armonicidad de cualquier intervalo o acorde que concuerda con los hechos observados. Es interesante que Euler formulara una ley cuantitativa para la medida de la armonicidad. Así, el concepto general de Euler acerca de la naturaleza del goce estético concuerda completamente con el de Birkhoff, que en palabras de Helmholtz años después, establecían que entre más fácilmente percibamos el orden que caracteriza a los objetos contemplados, estos parecerán más simples y perfectos, y más fácil y gozosamente los reconoceremos. Un orden que cuesta trabajo descubrir, aunque ciertamente nos halague, asociará cierto grado de desgaste y tristeza.

Hermann von Helmholtz (1821-1894)

Birkhoff aclara que su teoría carece de toda matemática excepto la simple enumeración y que su trabajo es un mero ensayo. En su trabajo desarrolla las bases psicológicas de su fórmula, la aplica a formas poligonales, a ornamentos y a vasos.



Para el caso de la medida estética de formas poligonales, Birkhoff considera la fórmula M=O/C=(V+E+R+HV-F)/C en donde V es la simetría vertical, E es el equilibrio, R es la simetría central, HV es la relación con una red horizontal-vertical, F es la forma no satisfactoria que incluye diversos factores y C es la complejidad. Cada variable asume valores dependiendo de varias condiciones, largas de enumerar en esta ocasión.



También aplica su fórmula a los acordes diatónicos, armonía y melodía así como a la calidad musical en la poesía.

En el caso musical, su teoría está basada en las relaciones de orden entre las notas y puesto que la apreciación de tales relaciones continuamente cambia y se desarrolla, no trata de formar una teoría definitiva de la medida estética que sea válida para el futuro o el pasado. Más bien, considera que el problema principal de la forma musical es el de que dado un conjunto de recursos musicales debemos determinar hasta qué grado las relaciones de orden entre las notas de una composición constituyen una base eficiente de disfrute musical.

Para el caso de acordes diatónicos la complejidad C se deja a un lado, puesto que un simple acorde es un objeto unitario y los únicos ajustes automáticos son ajustes incipientes a un sólo conjunto de notas y así la medida estética de un acorde será igual a su orden. Luego m=Cd+I+D donde m es la medida estética de un sólo acorde tomado en una tonalidad mayor por ejemplo, Cd denota el valor del acorde y se refiere a ciertas características que no cambian cuando sus notas superiores se mueven arriba o abajo por octavas, I es el valor del intervalo y D es el valor de la nota dominante. En cuanto a la sucesión de acordes, Birkhoff propone la fórmula $M=m_1+t+m_2$ donde m_1 y m_2 denotan las medidas estéticas de los acordes y t la de la transición.

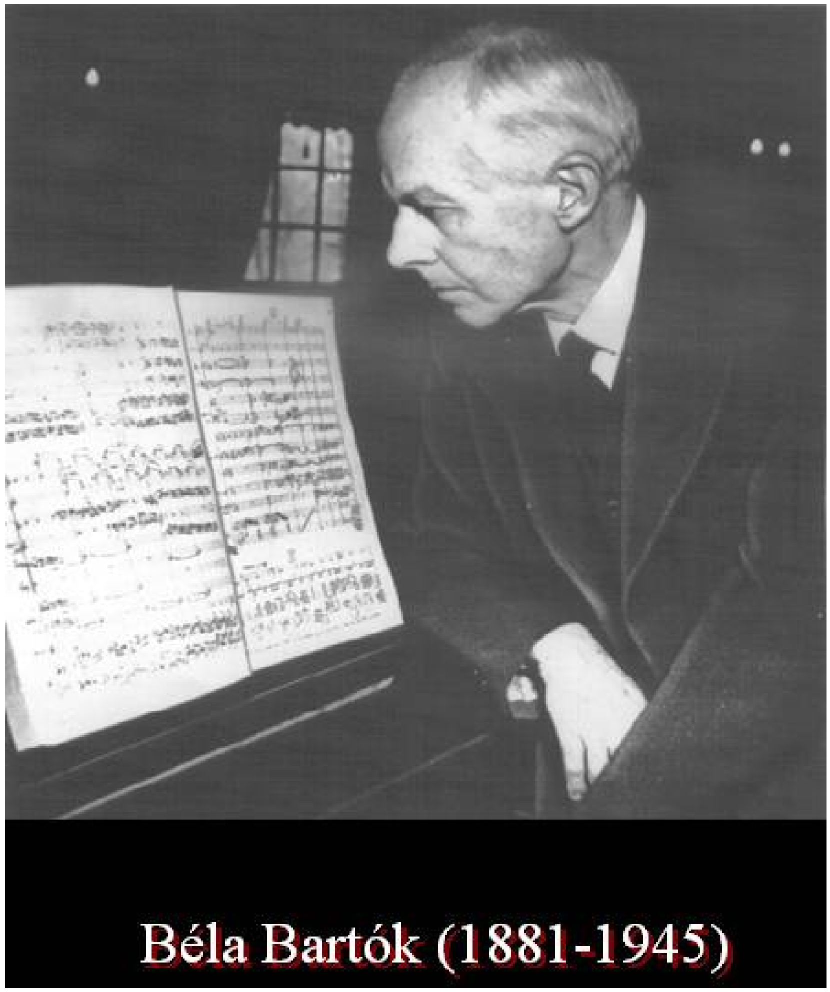
También Birkhoff analiza el problema de la melodía y deja abierto el problema del ritmo. Su trabajo puede continuarse aún más y la utilización de la computadora sería de gran ayuda. Su intención fue la de proveer procedimientos sistemáticos de análisis en simples dominios de la Estética. Concluye que hay una enorme diferencia entre el descubrimiento de un diamante y su tasación; aún más, entre la creación de una obra de arte y un análisis de los factores formales que entran en ella.

Leonardo de Pisa (Fibonacci)
(1170-1250)

En 1202 Leonardo de Pisa, cuyo sobrenombre era Fibonacci (en abreviación de filius Bonacci) escribió un libro llamado Liber Abacci (o libro sobre el ábaco). Sobrevive la segunda edición del año 1228. Contenía casi todo el conocimiento aritmético y algebraico de esa época y jugó un papel fundamental en el desarrollo de la matemática occidental, pues a través de él, los europeos se familiarizaron con el sistema numérico indo arábigo. Contenía muchísimos ejemplos. Veamos uno de ellos, reformulado de la siguiente manera: suponga que los conejos no se reproducen durante su primer mes de vida, pero que a partir del segundo mes cada pareja de conejos produce un nuevo par. Suponga que ningún conejo muere. Si comenzamos con un par de conejos, ¿cuántas parejas de conejos hay a los doce meses y en general a los n meses? La sucesión de las parejas adultas es de la forma

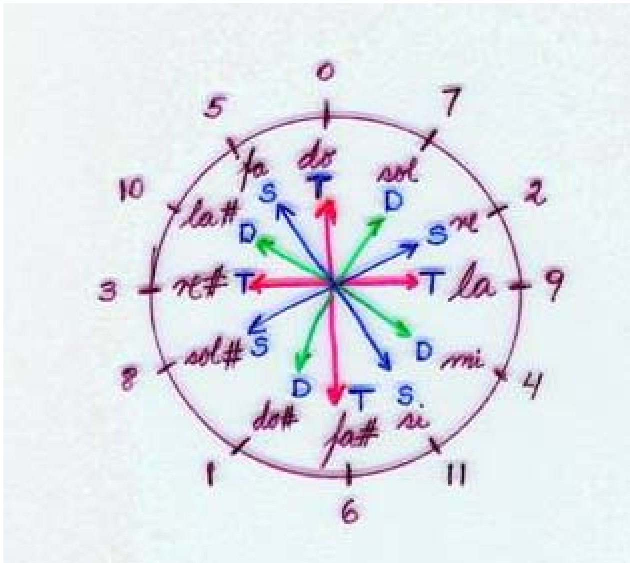
$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,...$$

es decir, la sucesión dada por la fórmula $u_1=u_2=1$ y $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ para n mayor o igual que 2. Esta sucesión se llama *sucesión de Fibonacci* y sus términos *números de Fibonacci*. Si consideramos $b_n=u_{n+1}/u_n$ como el cociente de crecimiento, obtendremos una sucesión, cuyo límite cuando n tiende a infinito es 1.618034... Este número, juega un papel muy importante en la Geometría y en la Estética. Si dividimos un segmento de recta AB en un punto C tal que AB:AC=AC:CB tal división se llama *sección* o *razón áurea* (Kepler la llamó *proporción divina*). Si AB=1 y AC=x entonces $x^2+x-1=0$. Luego x=.618034.... Así, la parte mayor de cualquier longitud, dividida en razón áurea, es igual a la longitud total multiplicada por .618034....



Béla Bartók (1881-1945)

Bela Bartok, alrededor de 1915 desarrolló un método para integrar todos los elementos de la música (escalas, estructuras de acordes con los motivos melódicos apropiados, proporciones de longitud, tanto de la obra en general como los de la exposición, desarrollo, reexposición, frases de conexión entre movimientos etc.) basado en la razón áurea. Es sorprendente que Bartok nunca escribiera o platicara de esto durante su vida. Ya los caldeos habían propuesto utilizar la razón áurea como principio estético 3000 años A.C., los griegos la utilizaron 2000 años después y fue reutilizada en el renacimiento pero nunca en la Música. Solamente se conoce un movimiento de un cuarteto de Haydn compuesto con longitud acorde a la sección áurea pero ésta es más una composición aislada que un principio o método de composición.

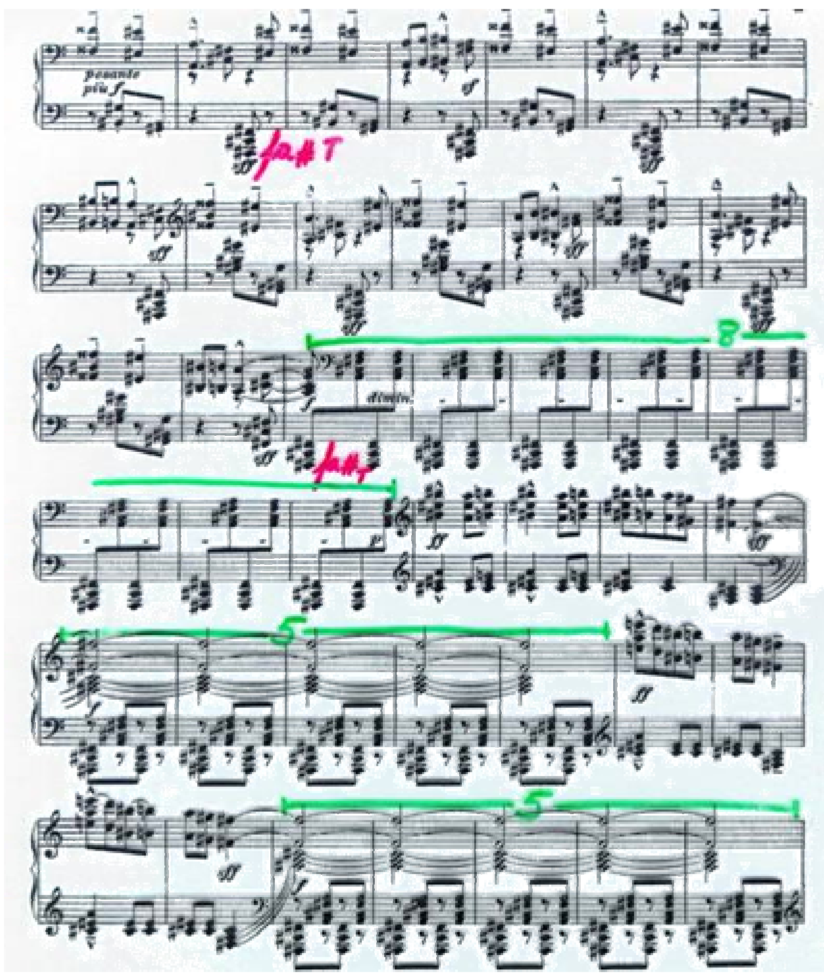


El círculo tonal de Bartok es el siguiente. Considérese el *círculo de tonalidades vecinas* o *círculo de quintas* dado de la siguiente forma: hágase una correspondencia biunívoca entre las notas {*do*, *do*#, *re*, *re*#, *mi*,..., *si* } y los números 0, 1, 2,...,11, en ese orden; luego, considérese el grupo cíclico C_{12} generado por el 7 y ordénese este grupo en una circunferencia. Tomemos el *do* como la tónica T y asígnense las letras D, S y T sucesivamente a cada nota del círculo. D designará a la *dominante* y S a la *subdominante*. Así *la* será tónica con subdominante *re* y dominante *mi*, etc. Si unimos, mediante ejes, los puntos T, D y S, obtendremos los llamados *ejes de las tónicas*, de las *dominantes* y de las *subdominantes*. Deben de considerarse como una relación de tonalidades similar a la forma usual en la música de mayor-menor. En particular, existe una relación más adecuada entre los polos opuestos. Esta relación es el principio fundamental de la música de Bartok. Muchos ejemplos de su música siguen este principio.

En cuanto a la Forma y la Armonía, Bartok utiliza el principio de la razón áurea. Por ejemplo, en el primer movimiento de la Sonata para dos pianos y percusiones, que consta de 443 compases, si se multiplica este número por .618... se obtiene el compás 274, el cual será el centro de gravedad del movimiento. Así la reexposición o recapitulación ocurre en el compás 274. Análogamente sucede con el primer movimiento de Contrastes, el cual consta de 93 compases, número que si se multiplica por .618... da el compás 57 justo donde comienza la reexposición. Hay muchos ejemplos más.

En cuanto al tratamiento armónico, en los compases 2 al 17 de la introducción de la Sonata para dos pianos y percusiones es donde se asientan los gérmenes de la obra. Los compases 2 al 5 de la primera parte están en la tónica *Fa#-Do* con el motivo en posición fundamental, los compases 8-9 de la segunda están en la dominante *Sol-Re bemol* también con el motivo en posición fundamental y la tercera parte, del compás 12 en adelante está en la subdominante *La bemol-Re* con el motivo invertido. Hay 46 unidades de valor 1/8 y si se multiplica 46 por .618... se obtiene la unidad 28 que es en donde comienza el motivo invertido. El análisis puede continuarse, y si se llama positiva a la porción larga y negativa a la porción corta puede decirse que existe una relación de simetría entre las partes positivas y negativas. Este proceso va acompañado con un incremento en la dinámica de pp a f ó ff en la sección positiva y la negativa va acompañada de una disminución de la intensidad sonora. Toda la obra puede dividirse en partes lenta-rápida+lenta-rápida en los movimientos. La sección áurea debe de aparecer al comienzo del segundo movimiento lo cual sucede si se considera el total de los 6432 octavos que al multiplicarlos por .618... da el octavo 3975 que es en el cual justamente comienza el segundo movimiento.

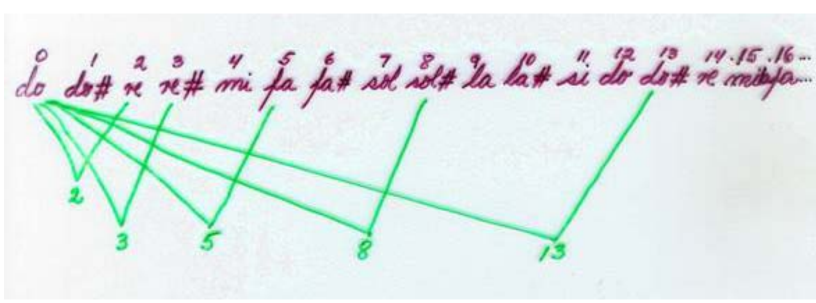
Si comparamos la sucesión de Fibonacci con la fuga (primer movimiento) de la Música para Cuerdas, Percusiones y Celesta observamos que los 89 compases del movimiento están divididos en secciones de 55 y 34 compases. Estas secciones se subdividen en secciones de 34 y 21 compases y 13 y 21 compases respectivamente. El clímax en fff ocurre en el compás 55 y en los extremos comienza y finaliza en pp. No es una casualidad que la exposición finaliza en el compás 21 y que los últimos 21 compases están divididos en secciones de 13 + 8 compases.



El Allegro Bárbaro es otra composición para piano solo en la cual Bartok utiliza los números de Fibonacci 2, 3, 5, 8, y 13 en diversas ocasiones, a diferencia de la música tradicional la cual utiliza 8 compases en casi todos los temas y múltiplos de 2 en los motivos y frases. También utiliza su círculo de tonalidades y la duración de la pieza es de 3 minutos.

Bartok escribió que seguía a la naturaleza en la composición y que fue guiado indirectamente por fenómenos naturales para descubrir estas regularidades. Constantemente aumentaba su colección de plantas, insectos y especimenes minerales. El girasol era su planta favorita y se ponía muy feliz cuando encontraba piñas de abeto en su escritorio. Consideraba que la música folclórica también era un fenómeno de la naturaleza y que sus formaciones se desarrollaban tan espontáneamente como otros organismos vivientes: las flores, los animales, etc. Por esto su música le recuerda al oyente de escenas naturales. Por ejemplo, el girasol tiene 34 pétalos y sus espirales tienen los valores 21, 34, 55, 89,144.

Su uso de los acordes también está basado en los números de Fibonacci. Por ejemplo, en semitonos, 2 es una segunda mayor, 3 es una tercera menor, 5 es una cuarta, 8 es una sexta menor y 13 es una octava aumentada, etc. Cuando Bartok utiliza acordes en un movimiento cromático, coloca la tercera menor sobre la cuarta justa de tal forma que el acorde adquiere la forma 8:5:3 y considerando una tercera menor, superponiéndole una cuarta seguida de otra tercera menor se obtiene su acorde característico mayor-menor.



La sección áurea, no es una restricción externa sino una de las leyes más intrínsecas de la música como lo muestra la pentatonía, quizás el más antiguo de los sistemas de sonido del hombre y el cual puede considerarse como una expresión pura del principio de la sección áurea.

Deseamos mencionar uno de los proyectos más interesantes que actualmente se desarrollan en este campo. Nos referimos a la Teoría Matemática de la Música de G. Mazzola.

Comenzó hace más dos décadas. Una de las principales metas de la Teoría Matemática de la Música es la de desarrollar un marco científico para la Musicología. Este marco posee como fundamento a campos científicos establecidos. Incluye un lenguaje formal para los objetos y relaciones musicales y musicológicas.

La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

Está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica, Teoría de Representaciones, esto es, en matemática de alto nivel. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al

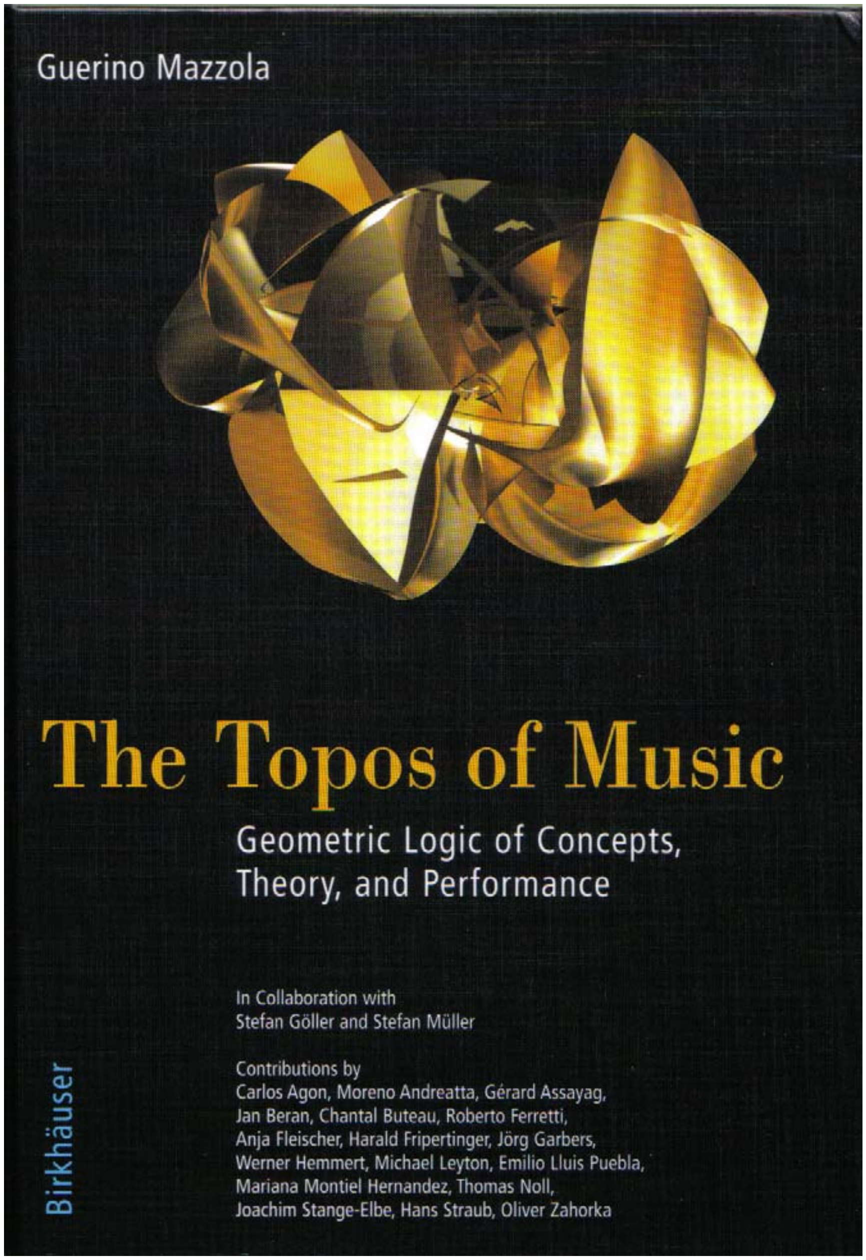
raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico. Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola, en un magnífico artículo panorámico, “Towards Big Science…” cita los elementos de Boulez de un programa de los años sesenta que tiene la intención de que las artes y la ciencia se reconcilien. (Yo diría que los artistas y los científicos). Con este postulado, la invocación de Boulez acerca de la “real imaginación” solamente puede ser concebida mediante la realización virtual (esencial) del sistema complejo teórico y práctico de la Música, de sus sonidos y relaciones mediante la tecnología informática de hoy.

Mazzola continúa: “La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano. Que actúa en otra capa de la realidad que la Física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la Música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes.” “De seguro, las ambiciones son comparables, y por lo tanto, las herramientas deben de ser comparables.

Mazzola concuerda con Bolulez acerca de que “la Música no puede degenerar o reducirse a una sección de la Matemática: la Música esta fundamentalmente enraizada con las realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero requerimos más métodos sofisticados además de los datos empíricos y estadísticos para describir formalmente las instancias musicales.

En los años ochenta, Mazzola observó que las estructuras musicales son estructuras globales pegadas con datos locales. Mazzola utilizó la selección de una cubierta como atlas, la cual es parte del punto de vista en el sentido de Yoneda y Adorno. Las cartas se llaman composiciones locales y consisten (vagamente) de subconjuntos finitos K de módulos M sobre un anillo R. Estas cartas K se pegan y comparan mediante isomorfismos de los módulos subyacentes. Tales objetos globales, los cuales generan diferentes categorías se llaman composiciones globales. Éstos son los conceptos estudiados en lo que ahora se conoce como la Teoría Matemática Clásica de la Música.


Guerino Mazzola
The Topos of Music
Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance
In Collaboration with
Stefan Göller and Stefan Müller
Contributions by
Carlos Agon, Moreno Andreatta, Gérard Assayag,
Jan Beran, Chantal Buteau, Roberto Ferretti,
Anja Fleischer, Harald Fripertinger, Jörg Garbers,
Werner Hemmert, Michael Leyton, Emilio Lluis Puebla,
Mariana Montiel Hernandez, Thomas Noll,
Joachim Stange-Elbe, Hans Straub, Oliver Zahorka
Birkhäuser

Mazzola menciona tres paradigmas mayores de la Matemática y Musicología que han ocurrido durante los 150 años que han sido paralelos en la evolución de ambas y la creciente presencia de la Matemática en la Música. Estos son: las estructuras globales, las simetrías y la Filosofía de Yoneda.

La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial.

La segunda, las simetrías y (los fractales) son utilizadas en la composición, aparecen también en la Naturaleza y en la Matemática juegan un papel crucial como también en la Física.

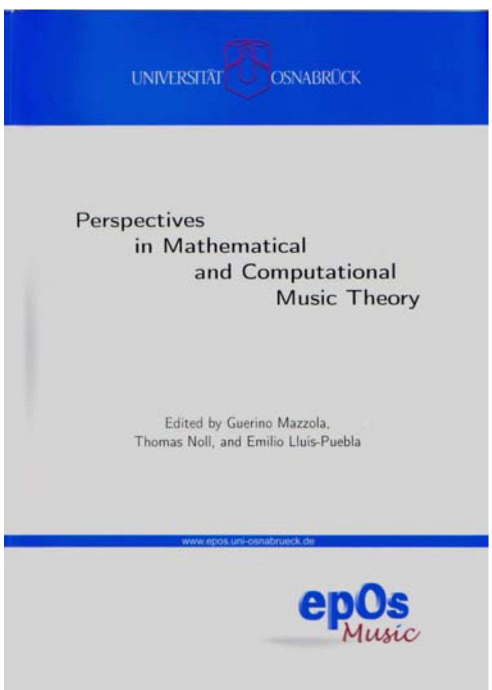
En cuanto a la tercera: la Filosofía de Yoneda, en palabras dice que, para comprender un objeto, de vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En Matemática, este Lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en el Álgebra Homológica, en la Topología Algebraica y en Geometría Algebraica solamente para mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En Música, la partitura es solamente su primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos intérprete y audiencia. Deja de lado la estéril competencia fuera del arte y la ciencia, como si éstas fueran juegos olímpicos.

Recientemente, en su artículo "Status Quo 2000", (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado al mundo en México durante una exposición plenaria espléndida), explica porqué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de ese tiempo evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Este nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos.

Con respecto a la Interpretación, Mazzola comenta en sus artículos que, "la Música ha sido estudiada desde el punto de vista de la

Estética y la Psico-Fisiológía". Trabajó en desarrollar una Teoría de la Interpretación que describe las estructuras y procesos que definen una interpretación, "aquella que sin las herramientas adecuadas, la Teoría de la Interpretación permanecerá" (y me encanta esta frase) "como una rama de la Literatura en el espíritu de la Crítica Musical". Pero con esta posibilidad de exhibir variedades algebraicas gramaticales tiene una consecuencia profunda para el problema de la clasificación de interpretaciones. Así, el criticismo comparativo se convierte en un campo preciso de investigación y no más un sector de la literatura.

Muy recientemente, Mazzola produjo una clasificación de objetos musicales, esto es, "existe un esquema algebraico cuyos puntos racionales representan ciertas clases de isomorfismo de composiciones globales". "Clasificar quiere decir la tarea de comprender totalmente un objeto. Esto es el Lema de Yoneda en su completa implicación filosófica". "El comprender obras de arte quiere decir sintetizar todas sus perspectivas interpretativas.

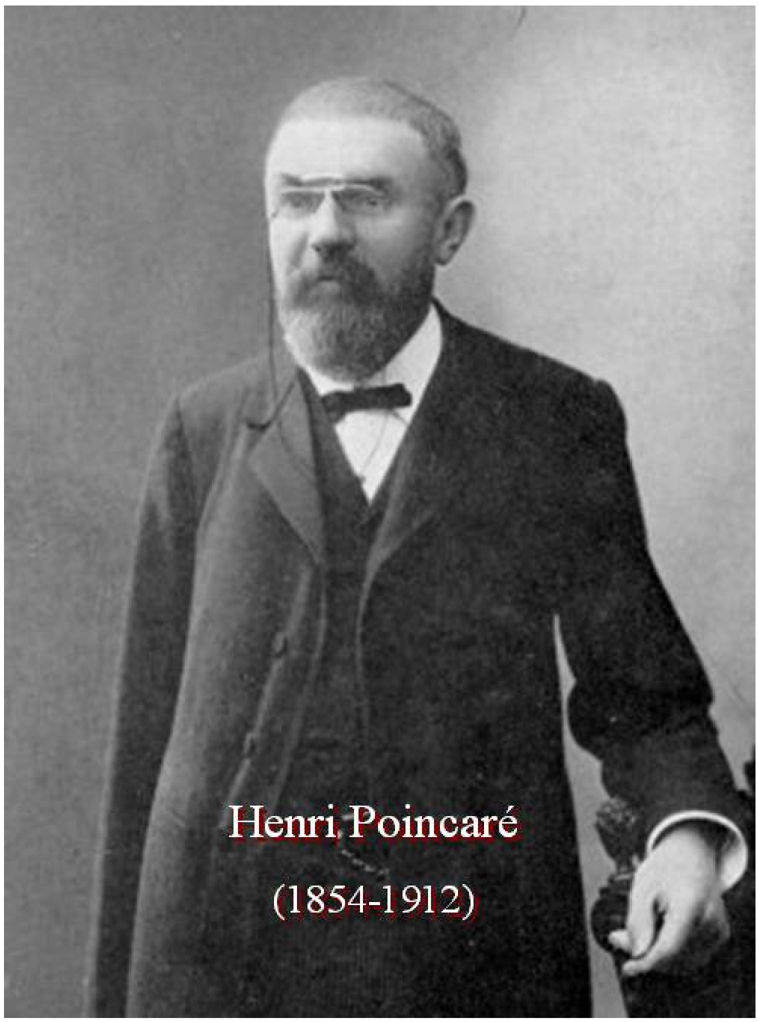


Y bien, ¿qué relación existe entre la Música y la Matemática? Es decir, ¿qué conexión o correspondencia existe? Hemos visto cómo se han aplicado conceptos matemáticos (provenientes al fin y al cabo de la naturaleza, del pensamiento abstracto del Hombre, etc.) al entretenimiento con un juego de dados, a la Estética, a la Composición Musical y a la creación de un lenguaje preciso para la Musicología y la Música entre otros. Desde luego que la Acústica, la cual utiliza a la Matemática, es parte de la Física y de la Música.

Algunos piensan que la Matemática es un juego simple que sola y fríamente interesa al intelecto. Esto sería el olvidar, asienta Poincaré, la sensación de la belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, así como de la elegancia geométrica. Esta es ciertamente una sensación de placer estético que todo verdadero matemático ha sentido y por supuesto que pertenece al campo de la emoción sensible. La belleza y la elegancia matemática consisten de todos los elementos dispuestos armónicamente tales que nuestra mente pueda abarcarlos totalmente sin esfuerzo y a la vez mantener sus detalles. Esta armonía, continúa Poincaré, es, de inmediato, una satisfacción de nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente que sostiene y guía. Y al mismo tiempo, al poner bajo nuestra visión un todo bien ordenado, nos hace entrever una ley o verdad matemática. Esta es la sensibilidad estética que juega un papel de filtro delicado, la cual explica suficientemente el porqué el que carece de ella nunca será un verdadero creador, concluye Poincaré.

El genio de Mozart consistió en escoger las mejores o más bellas frases musicales de toda la enorme gama de posibilidades para crear su Música. Poincaré menciona que la creación de nueva Matemática no consiste en hacer combinaciones nuevas de entidades matemáticas ya conocidas, sino solamente en tomar las combinaciones útiles, las cuales son una pequeña proporción. Si solamente fuera la rutina de aplicar reglas, las combinaciones obtenidas serían exageradamente numerosas, inútiles o extrañas.

El trabajo del inventor o creador consiste en escoger solamente las combinaciones útiles y las reglas o el procedimiento que conduce a esta elección es extremadamente fino y delicado. Es casi imposible, dice Poincaré, el establecer estas reglas o procedimientos. Es cosa de sentirlas mas bien que el de formularlas. Bajo estas condiciones imagínense a una máquina o aparato de cómputo aplicándolas mecánicamente. Sucedería lo mismo que con el juego de Mozart.



Poincaré escribe a principios del siglo XX, que una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados con cierto orden y que el orden en que son colocados es mucho más importante que los silogismos por sí solos. Comenta que no tiene miedo de que alguno de éstos se le olvide pues cada uno de ellos tomará su lugar en el arreglo sin el menor esfuerzo. También describe el proceso de creación [M]: primero se realiza un trabajo consciente acerca del problema, después deja madurar esas ideas en el subconsciente, luego aparece la solución, quizás cuando menos se espera, y finalmente ésta se escribe.

Mucha Matemática se crea por simple curiosidad. Pero esta simple curiosidad sólo la poseen los grandes matemáticos. Uno de los problemas más difíciles para un matemático principiante (o no tan principiante) es el de encontrar un problema. A menudo sucede que casi toda la emoción de la creación y penetración está concentrada en formular la pregunta adecuada. Podría decirse que esto es más de la mitad del trabajo y a menudo la que requiere de inspiración. Esta es una gran diferencia con la investigación en otras áreas del conocimiento y es precisamente por esto el que la investigación matemática es extremadamente difícil. La respuesta puede ser también difícil, puede requerir mucho ingenio, puede utilizar técnicas conocidas y en el mejor de los casos requiere de la invención de nuevas técnicas. El matemático no procede como un detective para encontrar la solución de su problema. No es una computadora de deducciones, sino procede mediante experimentación (que no utiliza tubos de ensayo o equipos costosos), mediante la inducción y, si hay suerte, inspiración. En otra ocasión les expondré acerca de la Matemática, cuánta hay, cómo son sus creadores, cómo se crea una teoría matemática, qué significa la palabra Matemática, cuales son sus ramas, cuántos matemáticos hay, etc. etc.

El Arte y la Ciencia son una actividad exclusivamente humana. Mucho más de la mitad del cultivo del conocimiento, es decir, de la cultura, lo constituye el conocimiento científico. Este es un hecho ampliamente ignorado por la mayoría de la gente que piensa que la cultura solamente está constituida por conocimientos literarios o artísticos. Es un gran error ver a la cultura de este modo.

Si en lugar de preguntarnos ¿qué relación existe entre la Música y la Matemática? Nos preguntáramos ¿qué relación existe entre los matemáticos y los músicos? Podríamos decir que algunos matemáticos adoran la Música, muchos con un enfoque similar a la medida estética de Birkhoff. A muchos matemáticos les agrada el orden mental, ven a la Música como si fueran matemáticas pero sin tener que lidiar con una lógica inflexible. Gustan más de

Mozart que de Stockhausen, Schoenberg o Bartok. Sin embargo a muchos músicos no les agrada la Matemática, generalmente por que no la conocen. Hay otros músicos a quienes sí les agrada la Matemática (Mozart, Bartok, Ponce, entre otros).

Si nos preguntamos más que cómo se relacionan, en qué se parecen, podría decir que, para los que ven a la Ciencia y al Arte como una actividad olímpica en donde se trata de ser altamente competitivos, productivos y pertenecer a las grandes ligas comerciales, la Matemática y la Música se utilizan como un medio y no como un fin. Así, algunos músicos se empeñan en tocar el mayor número de notas en el menor tiempo posible y ya se imaginarán ustedes el equivalente entre los matemáticos.

Uno de los pasajes de la historia que más me ha provocado toda clase de sentimientos es el siguiente, tomado de [S]: El ser humano es producto de un proceso evolutivo que comenzó hace unos 4000 millones de años. Hace menos de diez millones de años aparecieron los primeros seres que se parecían al ser humano y hace apenas unos cuantos millones de años que emergieron los primeros seres humanos. Pero apenas ayer, hace unos dos mil años que tenemos cultura. Las grandes obras musicales fueron compuestas hace sólo 350 años y exceptuando la geometría de Euclides casi toda la Matemática data de hace también 350 años. Nuestro quehacer cultural es relativamente nuevo y reciente. Podemos perderlo con mucha facilidad. Siempre que una sociedad se encuentra en crisis, lo más vulnerable y lo primero en desaparecer es el arte y la ciencia. Parece que la sociedad humana y en especial sus gobernantes no quieren darse cuenta de lo delicado y fino que es la creación artística y científica. Esta creatividad es precisamente la que distingue al ser humano de los animales y que el acabar con sus artistas y científicos (o no tenerlos) es acabar con la cultura y con la civilización. Recuperarlos es demasiado difícil y el precio es inconmensurable. Es lo mismo que la destrucción de la Biblioteca de Alejandría por los bárbaros.

Un pueblo que no puede cultivar el conocimiento está destinado a quemar sus bibliotecas. Un pueblo que no conoce la historia, que no conoce los grandes errores que se han cometido, está destinado a volverlos a cometer y así sucede por desgracia.

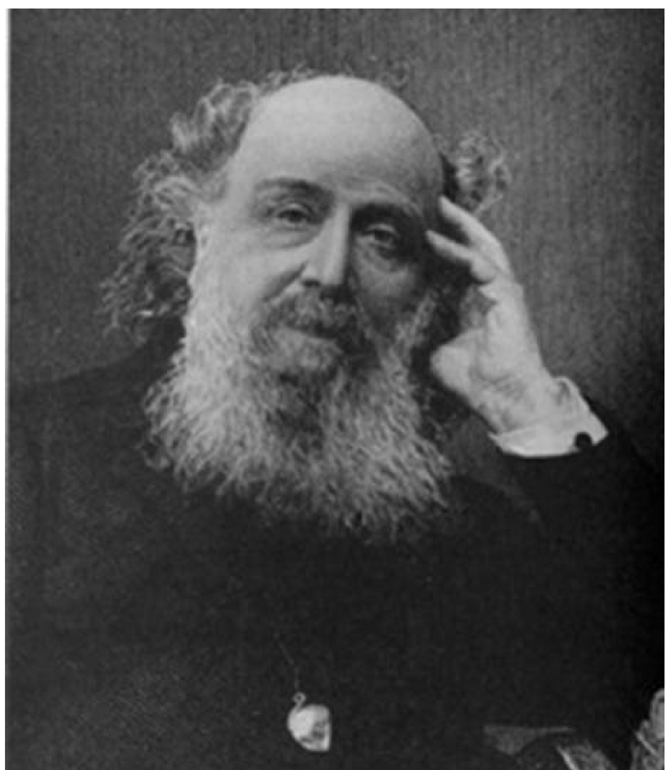
En Alejandría estaban las bases del mundo actual. ¿Porqué su destrucción? ¿Porqué occidente estuvo sumido en un oscurantismo hasta que Colón y Copérnico redescubrieron la obra hecha en Alejandría? No existe una respuesta sencilla pero lo que sí se sabe es que no hay noticia en toda la historia de la Biblioteca de que alguno de los ilustres científicos y estudiosos desafiara alguna vez seriamente los supuestos políticos, económicos y religiosos de su sociedad. Se puso en duda la existencia de las estrellas más no la injusticia de la esclavitud.

¿Qué sucedió en aquel entonces? La ciencia y la cultura estaban reservadas para unos cuantos privilegiados. La mayoría de la gente de la ciudad no tenía la menor idea de los grandes descubrimientos que tenían lugar dentro de la Biblioteca. Los nuevos descubrimientos no fueron explicados ni popularizados. La investigación les benefició poco. La ciencia nunca fascinó la imaginación de la multitud, no hubo contrapeso al estancamiento, al pesimismo, a la entrega más abyecta al misticismo. Cuando al final de todo, la chusma se presentó para quemar la Biblioteca no había nadie capaz de detenerla. Hipatia, en una época en la que las mujeres disponían de pocas opciones y eran tratadas como objetos de propiedad, se movió libremente y sin afectación por los dominios tradicionalmente masculinos.

Hipatia

La Alejandría de la época de Hipatia era una ciudad que sufría grandes tensiones. La esclavitud había agotado la vitalidad de la civilización clásica, la creciente iglesia cristiana estaba consolidando su poder. Hipatia estaba sobre el epicentro de estas poderosas fuerzas sociales, hasta que un día cuando iba a trabajar cayó en manos de una turba fanática de feligreses de Cirilo, el arzobispo de Alejandría (el cual la despreciaba), la sacaron del carruaje, rompieron sus vestidos y, armados con conchas marinas la desollaron arrancándole la carne de los huesos. Sus restos fueron quemados, sus obras destruidas y su nombre olvidado. Cirilo fue proclamado santo.

Recordemos que la ciencia y el arte son actividades esencialmente humanas. La Matemática es una de las "Bellas Artes" que posee el don de ser al mismo tiempo la más elaborada y sofisticada de todas las ciencias. Esta es una frase muy difícil de comprender para la mayoría de las personas. Sin embargo, la ciencia es una manera eficaz y elegante de comprender el universo. La ciencia se auto corrige. Nuestra vida y nuestro destino están indisolublemente ligados a la ciencia. Es esencial para nuestra simple supervivencia que comprendamos la ciencia. Para quien la comprende, la ciencia es un placer. Hemos evolucionado de tal modo que el hecho de comprender nos proporciona placer, porque el que comprende tiene mayores posibilidades de sobrevivir.



James Joseph Sylvester
(1814-1897)

La Matemática, a diferencia de la Música, no es para espectadores. Es un lenguaje que, o bien se habla, o bien no se entiende absolutamente nada. No hay estadios de matemáticas para un gran público. Entonces, vuelvo a preguntar ¿qué relación existe entre la Matemática y la Música? J.J. Sylvester escribe en 1864: “May not Music be described as the Mathematic of Sense, Mathematics as Music of the reason? The soul of each the same?” Es decir, "¿Acaso no puede describirse la Música como la Matemática de lo sensible y la Matemática como la Música del entendimiento? El alma de cada una, la misma". Ambas se crean, se recrean, podemos apreciarlas y disfrutarlas. Una ventaja o desventaja, según se quiera ver, es que para la Matemática no existe un instrumento musical donde tocarla, ésta se queda a nivel de partitura, podría decir, que va directamente de pensamiento a pensamiento.

Para mí, la relación más importante entre la Matemática y la Música es, que ambas son "Bellas Artes". Poseen características similares. Están relacionadas en el sentido de que la Matemática provee una base científica para comprender la Música y la Musicología y para que esta última pueda considerarse una ciencia, no una rama de la literatura poética común y corriente.

Deseamos finalizar esta exposición estableciendo una vez más, que la Matemática es una de las "Bellas Artes", la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

CAPÍTULO III

Matemática en la Matemática

La Matemática existe desde que existe el ser humano. Prácticamente todo ser humano es un matemático en algún sentido. Desde los que utilizan la Matemática hasta los que la crean. También todos son hasta cierto punto filósofos de la Matemática. Efectivamente, todos los que miden, reconocen personas o cosas, cuentan o dicen que "tan claro como que dos y dos son cuatro" son matemáticos o filósofos de la Matemática. Sin embargo, hay un número muy reducido de personas que se dedican a crear, enseñar, cultivar o divulgar la Matemática.

La Matemática es pilar y cimiento de nuestra civilización. Desde la primera mitad del siglo XIX, debido al progreso en diversas ramas se le dio unidad a la Ciencia Matemática y justificaron el nombre en singular. Según me comentó mi querido amigo, Arrigo Coen, *Mathema* significa erudición, *manthánein* el infinitivo de aprender, el radical *mendh* significa en pasivo, ciencia, saber. Luego, es lo relativo al aprendizaje. Así que en sentido implícito, Matemática significa: "lo digno de ser aprendido". También se dice que Matemática significa "ciencia por excelencia".

Sin embargo, de muy pocas personas podría decirse que poseen información correcta y actualizada sobre alguna de sus ramas o subramas. Los niños y jóvenes de nuestros días pueden poseer una imagen bastante aproximada de electrones, galaxias, agujeros negros, código genético, etc. Sin embargo, difícilmente encontrarán durante sus estudios, conceptos matemáticos creados más allá de la primera mitad del siglo XIX. Esto es debido a la naturaleza de los conceptos de la Matemática.

Es muy común la creencia de que un matemático es una persona que se dedica a realizar enormes sumas de números naturales durante todos los días. También, la gente supone que un matemático sabe sumar y multiplicar los números naturales muy rápidamente. Si pensamos un poco acerca de este concepto que la mayoría tiene acerca de los matemáticos, podríamos concluir que no se requieren matemáticos ya que una calculadora de bolsillo realiza este trabajo.

También, cuando uno pregunta ¿cuál es la diferencia entre un matemático y un contador? la consideran una pregunta equivalente a ¿cuál es la diferencia entre x y x? Es decir, que son lo mismo. Si uno dice que un matemático rara vez tiene que realizar sumas o multiplicaciones, les resulta increíble. También les resulta increíble el que los libros de Matemática rara vez utilizan números mayores que 10, exceptuando quizás los números de las páginas.

Durante muchos años, a los niños se les ha hecho énfasis en el aprendizaje de las tablas de multiplicar, en el cálculo de enormes sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas a lápiz pero de números muy pequeños (para los números grandes, la mayoría de las personas tiene poca idea de su magnitud). Después, cuando jóvenes, aquellos que sumaban y multiplicaban polinomios eran considerados por sus compañeros como genios poseedores de un gran talento matemático y posteriormente a éstos, si tenían suerte, se les enseñaba a sumar y multiplicar números complejos.

Pareciera ser, entonces, que el matemático es aquel ser que se pasa la vida haciendo sumas y multiplicaciones (de números pequeños), algo así como un encargado de la caja de un negocio. Esta impresión subsiste en una gran mayoría de las personas. Nada más lejos de esto. Los matemáticos no son los que calculan o hacen cuentas sino los que **inventan cómo calcular o hacer cuentas**. Hacer Matemática es imaginar, crear, razonar.

Para contar fue necesario representar los números de alguna forma, por ejemplo, los dedos de la mano. Después, el ábaco constituyó un paso todavía ligado a contar con los dedos, el cual todavía se utiliza en algunas partes del planeta. Posteriormente la máquina aritmética de Pascal inventada en 1642 permitía efectuar sumas y restas mediante un sistema muy ingenioso de engranes. En la actualidad, las calculadoras de bolsillo permiten realizar, en segundos, cálculos que antes podrían haber llevado años enteros y también le permitieron a uno deshacerse de las famosas tablas de logaritmos y de la regla de cálculo.

Sin embargo, en general, los alumnos de cualquier carrera y los egresados de ellas a los cuales se les pregunta, -¿qué es la suma? o mejor dicho, ¿qué es la adición?- simplemente encogen los hombros, a pesar de que han pasado más de doce años sumando y de que la suma es un concepto muy primitivo. También suele suceder que cuando un niño o un joven o un adulto profesionista se enfrenta a un problema, no sabe si debe sumar, restar, multiplicar o llorar.

Recordemos algunos conceptos elementales. Primero, recuerde el conjunto de los números enteros

$$\mathbf{Z=\{ ... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... \}}$$

Segundo, pregúntese: -¿cómo se relacionan dos conjuntos "adecuadamente"? Sean **A** y **B** dos conjuntos cualesquiera. Si a cada elemento de **A** le asociamos un elemento único de **B,** diremos que **f: A→ B** es una *función* de **A** en **B**.

Por ejemplo, si **A = {a, b, c}** y **B = {p, q, r, s}** entonces **f: A→ B** dada por la siguiente asociación

$$\begin{gathered}\mathbf{a \to p}\\ \mathbf{b \to q}\\ \mathbf{c \to r}\end{gathered}$$

es una función, mientras que la asociación

$$\mathbf{a \to p}$$

$$\mathbf{a} \to \mathbf{q}$$
$$\mathbf{b} \to \mathbf{q}$$
$$\mathbf{c} \to \mathbf{r}$$

no es una función, puesto que a un objeto de **A** no se le asocia un único elemento de **B**, (a **a** se le asocian **p** y **q**). Los conjuntos **A** y **B** se llaman *dominio* y *codominio*, respectivamente, de la función **f**.

El subconjunto del codominio que consiste de los elementos que son asociados a los del dominio se llama *imagen* de **f**. Así, en la función anterior, la imagen de **f** es el conjunto **{p, q, r}**; el elemento **s** de **B** no está en la de **f**.

Utilizamos la siguiente notación para denotar las imágenes de los elementos de **A** bajo **f**:

$$\mathbf{f: A \to B}$$
$$\mathbf{a \to f(a) = p}$$
$$\mathbf{b \to f(b) = q}$$
$$\mathbf{c \to f(c) = r}$$

Tercero: considere el producto cartesiano de un conjunto **A** que se denota **A×A** y que consiste de todas las parejas ordenadas de elementos de **A**, es decir

$$\mathbf{A \times A = \{(a,b) \mid a, b \in A\}}$$

Ahora ya podemos definir el importantísimo concepto de operación binaria o ley de composición. Sea **G** un conjunto no vacío. Una *operación binaria* o *ley de composición* en **G** es una función **f: G×G→ G** donde **(x,y)→f(x,y)**.

Como es obvio, podemos denotar una función con cualquier símbolo, por ejemplo **f, g, h,** ♦, ◊, ♣, ⊗, •, ×, ***,** etc. Así, en **Z** tenemos una operación binaria

$$\mathbf{f: Z \times Z \to Z}$$
$$\mathbf{(x,y) \to f(x,y)}$$

y por abuso o conveniencia de notación denotamos **f(x,y)** como **xfy**. Por ejemplo,

$$\mathbf{(3,2) \to f(3,2) = 3f2}.$$

Si la operación binaria **f** la denotamos simplemente como + (la suma usual en **Z**) entonces **(3,2)→ +(3,2)=3+2** que es igual a **5**. Si la operación binaria **f** la denotamos como · (la multiplicación usual en **Z**), entonces **(3,2)→ ·(3,2)=3·2** que es igual a **6**.

Observe que una operación binaria se define en un conjunto no vacío **G**. A continuación definamos un conjunto de la siguiente manera: considere tres cajas y reparta los números enteros en cada una de ellas de una manera ordenada como sigue:

.	**.**	**.**
.	**.**	**.**
.	**.**	**.**
-6	**-5**	**-4**
-3	**-2**	**-1**
0	**1**	**2**
3	**4**	**5**
6	**7**	**8**
.	**.**	**.**
.	**.**	**.**
.	**.**	**.**
[0]	**[1]**	**[2]**

Las cajas las llamaremos: **[0]** por contener al cero, **[1]** por contener al uno y caja **[2]** por contener al dos. Asignémosle a la caja **[0]** el número **0**, porque sus elementos dan residuo **0** al dividirlos entre **3**; análogamente asignémosle a la caja **[1]** el número **1** y a la caja **[2]** el número **2**, pues sus elementos dan residuo **1** y **2** respectivamente, al dividirlos entre **3**.

Consideremos el conjunto $\mathbf{Z_3=\{ 0, 1, 2\}}$ llamado *juego completo de residuos módulo* **3**, pues al dividir cualquier entero entre **3** da residuos **0**, **1** ó **2**. Definamos en él una operación binaria que podríamos denotar con **f, g, h,** ♦, ◊, ♣, ⊗, +, •, ×, *, etc; escojamos +,

$$\mathbf{+: Z_3 \times Z_3 \to Z_3}$$

Así:

$$\mathbf{(1,1) \to +(1,1) = 1+1 = 2}$$
$$\mathbf{(0,1) \to +(0,1) = 0+1 = 1}$$
$$\mathbf{(1,0) \to +(1,0) = 1+0 = 1}$$
$$\mathbf{(2,1) \to +(2,1) = 2+1 = 0}$$
$$\mathbf{(2,2) \to +(2,2) = 2+2 = 1}$$

Escribamos su tabla de sumar:

+	**0**	**1**	**2**
0	**0**	**1**	**2**
1	**1**	**2**	**0**
2	**2**	**0**	**1**

Veamos otro ejemplo: consideremos el *juego completo de residuos módulo* **5**, es decir, los posibles residuos que se obtienen al dividir cualquier número entero entre **5**, el cual denotaremos con $\mathbf{Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$. Dibuje usted las cajas. Definamos una operación binaria en $\mathbf{Z_5}$

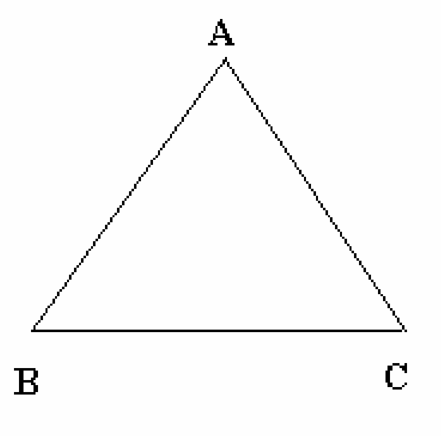
$$\cdot : \mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_5$$

de la manera usual conveniente y en particular tenemos:

$$(2,2) \to \cdot(2,2) = 2\cdot 2 = 4$$
$$(2,1) \to \cdot(2,1) = 2\cdot 1 = 2$$
$$(2,3) \to \cdot(2,3) = 2\cdot 3 = 1$$
$$(3,4) \to \cdot(3,4) = 3\cdot 4 = 2$$

Es común oír el dicho "tan cierto como que dos y dos son cuatro". Sin embargo, como hemos visto $\mathbf{2+2 = 1}$, $\mathbf{2+1 = 0}$, $\mathbf{2 \cdot 3 = 1}$, $\mathbf{3 \cdot 4 = 2}$, etc. y claramente $\mathbf{2+2 \neq 4}$. En los ejemplos anteriores hemos considerado los conjuntos $\mathbf{Z}_3$ y $\mathbf{Z}_5$ a los cuales le hemos definido una "suma" u operación binaria. La suma usual en los números naturales y enteros es una operación binaria, lo mismo que la multiplicación definida en ellos. Estas son las operaciones binarias consideradas en el dicho. En los primeros años de escuela se pone un énfasis especial en uno de los muchos algoritmos para sumar y multiplicar números naturales (i.e. en el procedimiento o manera de sumarlos y multiplicarlos). Después de varios años se pone un especial énfasis en sumar y multiplicar números enteros y en multiplicar y dividir polinomios. En general, cuando se "suma" hay que especificar siempre el conjunto en el cual se define la operación binaria.

También es común oír el dicho "el orden de los factores no altera el producto". ¿Será esto siempre cierto? Consideremos el conjunto Δ_3 de los movimientos rígidos de un triángulo equilátero con vértices **A**, **B** y **C**.



Estos movimientos rígidos son de dos tipos: las rotaciones sobre el baricentro de **0**°, **120**° y **240**° y las reflexiones sobre las medianas. Denotemos éstos movimientos rígidos de la siguiente manera:

0 = [A B C /A B C] 1 = [A B C / B C A] 2 = [A B C / C A B]

3 = [A B C / A C B] 4 = [A B C / C B A] 5 = [A B C / B A C]

Los elementos **0**, **1** y **2** corresponden a las rotaciones. Los elementos **3**, **4** y **5** corresponden a las reflexiones. Definamos una operación binaria • en Δ_3:

$$\bullet : \Delta_3 \times \Delta_3 \to \Delta_3$$
$$(x,y) \to \bullet(x,y) = x \bullet y$$

Calculemos:

[A B C / B C A] • [A B C / B C A] = [A B C / C A B]

esto es

$$(1,1) \to \bullet(1,1) = 1 \bullet 1 = 2.$$

$$[A\ B\ C\ /\ C\ A\ B] \bullet [A\ B\ C\ /\ A\ C\ B] = [A\ B\ C\ /\ B\ A\ C]$$

esto es

$$(2,3) \to \bullet(2,3) = 2 \bullet 3 = 5.$$

$$[A\ B\ C\ /\ A\ C\ B] \bullet [A\ B\ C\ /\ C\ A\ B] = [A\ B\ C\ /\ C\ B\ A]$$

esto es

$$(3,2) \to \bullet(3,2) = 3 \bullet 2 = 4.$$

Observe que $\mathbf{2 \bullet 3 \neq 3 \bullet 2}$.

Ahora sí, ¿$\mathbf{2+2 = 4}$ y $\mathbf{2 \bullet 3 = 3 \bullet 2}$?

El concepto de operación binaria o ley de composición es uno de los más antiguos de la Matemática y se remonta a los antiguos egipcios y babilonios quienes ya poseían métodos para calcular sumas y multiplicaciones de números naturales positivos y de números racionales positivos (téngase en cuenta que no poseían el sistema de numeración que nosotros usamos). Sin embargo, al paso del tiempo, **los matemáticos se dieron cuenta que lo importante no eran las tablas de sumar o multiplicar de ciertos "números" sino el conjunto y su operación binaria definida en él.** Esto, junto con ciertas propiedades que satisfacían dieron lugar al concepto fundamental llamado *grupo*. Así es que, un grupo es un conjunto no vacío **G** junto con una operación binaria $\Diamond$**:** $\mathbf{G \times G \to G}$, denotado $(\mathbf{G}, \Diamond)$ la cual cumple con ser asociativa, poseer elemento de identidad e inversos. Es fácil comprobar que los conjuntos $\mathbf{Z_3}$, $\mathbf{Z_5}$ y Δ_3 con su operación binaria respectiva poseen la estructura de grupo. Como se puede ver en el caso de **(Δ_3, •)** el concepto de grupo está estrechamente ligado con el concepto de simetría. Los ejemplos anteriores muestran algunos objetos que poseen una estructura de grupo y lo variantes que pueden ser éstos.

Históricamente, el concepto de operación binaria o ley de composición fue extendido de dos maneras donde solamente se tiene una resemblanza con los casos numéricos de los babilonios y los egipcios. La primera fue por Gauss, al estudiar formas cuadráticas con coeficientes enteros, donde vio que la ley de composición era compatible con ciertas clases de equivalencia. La segunda culminó con el concepto de grupo en la Teoría de Sustituciones, (mediante el desarrollo de las ideas de Lagrange, Vandermonde y Gauss en la solución de ecuaciones algebraicas). Sin embargo, estas ideas permanecieron superficiales, siendo Galois el verdadero iniciador de la Teoría de Grupos al reducir el estudio de las ecuaciones algebraicas al de grupos de permutaciones asociados a ellas.

Fueron los matemáticos ingleses de la primera mitad del siglo XIX los que aislaron el concepto de ley de composición y ampliaron el campo del Álgebra aplicándola a la Lógica (Boole), a vectores y cuaternios (Hamilton), y a matrices (Cayley). Para finales del siglo XIX, el Álgebra se orientó al estudio de las estructuras algebraicas dejando atrás el interés por las aplicaciones de las soluciones de ecuaciones numéricas. Ésta orientación dio lugar a tres principales corrientes:

(i) la Teoría de Números que surgió de los matemáticos alemanes Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind y Hilbert, basados en los estudios de Gauss. El concepto de campo fue fundamental.

(ii) la creación del Álgebra Lineal en Inglaterra por Sylvester, Clifford; en Estados Unidos por Pierce, Dickson, Wedderburn; y en Alemania y Francia por Weirstrass, Dedekind, Frobenius, Molien, Laguerre, Cartan.

(iii) la Teoría de Grupos que al principio se concentró en el estudio de grupos de permutaciones. Fue Jordan quien desarrolló en gran forma el trabajo de Galois, Serret y otros de sus predecesores. Él introdujo el concepto de homomorfismo y fue el primero en estudiar grupos infinitos. Más tarde, Lie, Klein y Poincaré desarrollaron este estudio considerablemente. Finalmente se hizo patente que la idea fundamental y esencial de grupo era su ley de composición u operación binaria y no la naturaleza de sus objetos.

El éxito de la Teoría de Grupos es impresionante y extraordinario. Basta nombrar su influencia en casi toda la Matemática y otras disciplinas del conocimiento. Los ejemplos escritos anteriormente podrían dejar perplejo al no ilustrado en matemática con un pensamiento acerca de los pasatiempos que los matemáticos inventan combinando "números" de una manera perversa. Sin embargo, hemos considerado ejemplos vitales para la Teoría de los Números (se podría reemplazar el número **3** por cualquier número natural **n** (si **n=12** obtenemos los números de los relojes) o por un número primo **p** obteniendo conceptos y resultados importantes) y para la propia Teoría de Grupos (grupo diédrico y simétrico). Al observar esto, lo que realmente se ha hecho en la Teoría de Grupos, es extraer lo esencial de ellos, a saber, dado un conjunto no vacío, definimos una operación binaria en él, tal que cumpla ciertas axiomas, postulados o propiedades, es decir, que posea una *estructura*, (la estructura de grupo). Existen varios conceptos ligados al de estructura, uno de los más importantes es el de *isomorfismo*. Véase el problema 6 para un ejemplo de isomorfismo.

El concepto de estructura y de los relacionados con éste como el de isomorfismo, juegan un papel decisivo en la Matemática actual. Las teorías generales de las estructuras importantes son herramientas muy poderosas. Siempre que alguien pruebe que sus objetos de estudio satisfacen los axiomas de cierta estructura, obtiene, de inmediato, todos los resultados válidos para esa teoría en sus objetos. Ya no tiene que comprobar cada uno de ellos particularmente. Un uso actual en la Matemática, de las estructuras y los isomorfismos, es el de clasificar las diversas ramas de ella (no es importante la naturaleza de los objetos pero sí lo es el de sus relaciones).

En la Edad Media la clasificación en ramas de la Matemática estaba dada por la de Aritmética, Música, Geometría y Astronomía las que constituyeron el *Cuadrivium*. Después y hasta la mitad del siglo XIX, las ramas de la Matemática se distinguían por los objetos que estudiaban, por ejemplo, Aritmética, Álgebra, Geometría Analítica, Análisis, todas con algunas subdivisiones. Algo así como si dijéramos que puesto que los murciélagos y las águilas vuelan entonces pertenecen a las aves. Lo que se nos presenta ahora es el ver más allá y extraer de las apariencias las estructuras subyacentes. Actualmente existen 63 ramas de la Matemática con más de 5000 subclasificaciones. Entre ellas se encuentran la Topología Algebraica (estructuras mixtas), el Álgebra Homológica (la purificación de la interacción entre el Álgebra y la Topología, creada en los años cincuenta), y la K-Teoría Algebraica (una de las más recientes ramas, creada en los años setenta).

Algunos piensan que la Matemática es un juego simple que sola y fríamente interesa al intelecto. Esto sería el olvidar, asienta Poincaré, la sensación de la belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, así como de la elegancia geométrica. Esta es ciertamente una sensación de placer estético que todo verdadero matemático ha sentido y por supuesto que pertenece al campo de la emoción sensible. La belleza y la elegancia matemática consisten de todos los elementos dispuestos armónicamente tales que nuestra mente pueda abarcarlos totalmente sin esfuerzo y a la vez mantener sus detalles. Esta armonía, continúa Poincaré, es, de inmediato, una satisfacción de nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente que sostiene y guía. Y al mismo tiempo, al poner bajo nuestra visión un todo bien ordenado, nos hace entrever una ley o verdad matemática. Esta es la sensibilidad estética que juega un papel de filtro delicado, la cual explica suficientemente el porqué el que carece de ella nunca será un verdadero creador, concluye Poincaré.

La Matemática es una de las Bellas Artes, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

Para finalizar, invitamos al lector a resolver los siguientes problemas:

*Haga una tabla de multiplicar para $\mathbf{Z_3}$.

*Construya una tabla de sumar para $\mathbf{Z_5}$.

*Construya la tabla de multiplicar en $\mathbf{Z_5}$.

*Sea $\sum_3$ el conjunto de las permutaciones de **{1, 2, 3}**. Calcule el número de elementos de
$\sum_3$. Defina una operación binaria en $\sum_3$ y construya su tabla.

*Sea $\sum_n$ el conjunto de las permutaciones de un conjunto con **n** elementos. Calcule el número de elementos de $\sum_n$.

*Construya la tabla de sumar de $\mathbf{Z_6}$ y compárela con las de $\sum_3$ y Δ_3. Observe que las tablas de $\sum_3$ y Δ_3 son la misma salvo por el orden y el nombre de los elementos. Compruebe que éstos dos últimos son grupos y establezca un isomorfismo entre ellos. Observe que la tabla de $\mathbf{Z_6}$ le permite comprobar que es un grupo pero su tabla es totalmente diferente a las otras dos.

Los conceptos implícitos en este capítulo son: conjuntos, funciones, producto cartesiano, operación binaria, clases de equivalencia, axiomas de Peano, ordenaciones con repetición, sucesiones, algoritmo de la división, enteros módulo **n**, grupos, subgrupo **nZ**, grupo cociente, isomorfismo $\mathbf{Z_n} \equiv \mathbf{Z/nZ}$, grupo diédrico y grupo simétrico. Estos le servirán al lector para consultar la bibliografía.

CAPÍTULO IV

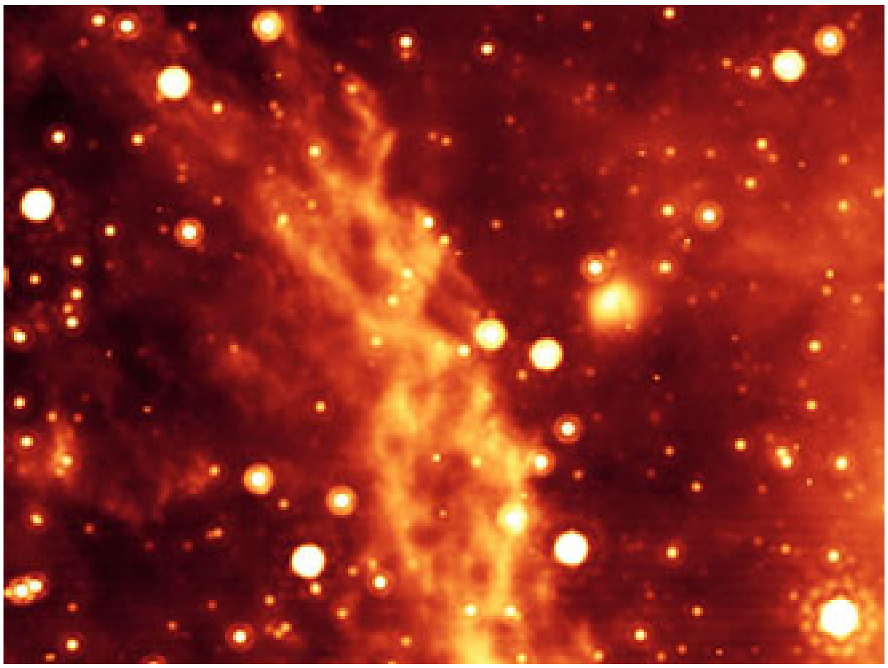
Matemática en la Medicina y en la Aeronáutica

¿Qué tienen que ver la Medicina y la Aeronáutica con la Matemática? Uno de los puntos que unen estas dos actividades humanas que parecen tan distantes es la utilización de ondas para la tecnología más avanzada en estas dos áreas.

Las ondas pueden ser mecánicas o electromagnéticas. Las ondas mecánicas son aquellas en las que la energía se transmite a través de un medio material, sin un movimiento de masa del propio medio. El sonido, que viaja a través de la atmósfera y las olas de un lago que viajan a través de la superficie del agua son ejemplos de ondas mecánicas.

Olas en el Lago Titicaca

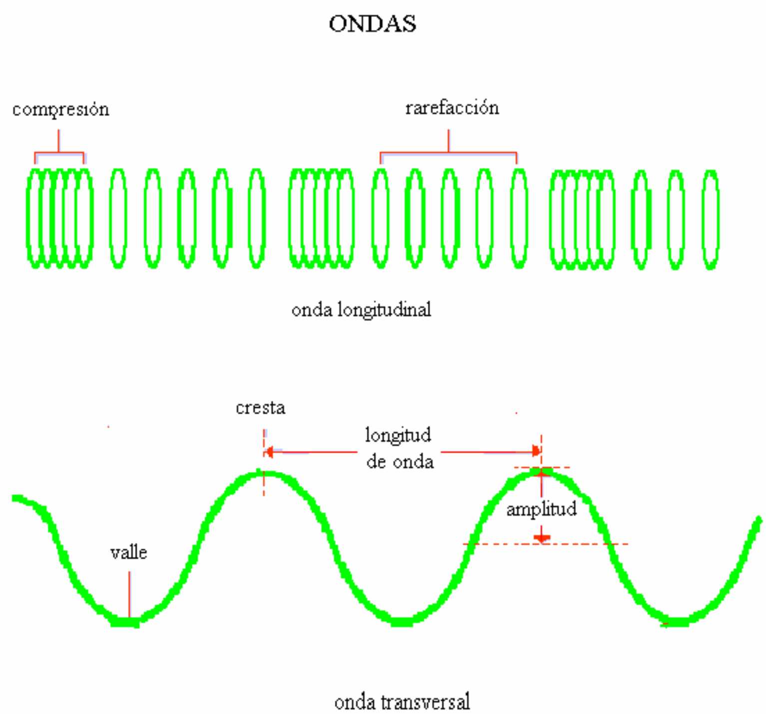
La única forma de movimiento de onda que no requiere ningún medio material para su transmisión es la onda electromagnética; en este caso el desplazamiento de fuerza es de campos eléctricos y magnéticos en el espacio. Los rayos X, los rayos infrarrojos, los rayos ultravioleta, la luz visible, las ondas de radio y las microondas, son ejemplos de ondas electromagnéticas.



Nebulosa de doble hélice en la Vía Láctea (NASA)

¿Cómo son las ondas? Las ondas se han dividido en dos tipos según la dirección de los desplazamientos de la dirección del movimiento de la propia onda. Si la vibración es paralela a la dirección de movimiento, la onda es conocida como una *onda longitudinal*.

La onda longitudinal siempre es mecánica porque es el resultado de condensaciones sucesivas (estado de densidad y presión máximo) y rarefacciones (estado de densidad y presión mínima) del medio. Las ondas del sonido representan esta forma de movimiento de la onda.



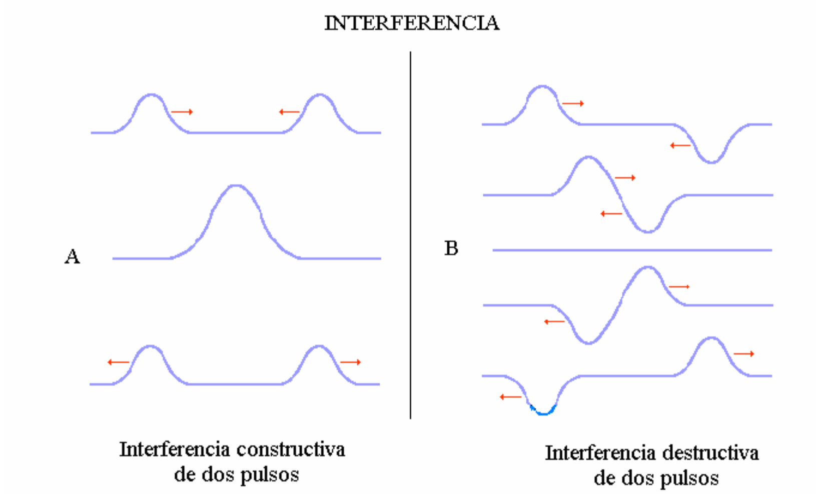
Otro tipo de onda es la *onda transversal* en la que las vibraciones están en los ángulos rectos a la dirección de movimiento. Una onda transversal puede ser mecánica, como la onda proyectada en un cordón tenso que se sujeta a una vibración transversal; o puede ser electromagnética, como la luz, rayos X u ondas de radio. Algunos movimientos mecánicos de la onda, como ondas en la superficie de un líquido, son combinaciones de movimientos longitudinales y transversos además de producir el movimiento circular de partículas líquidas.

Para una onda transversal, la *longitud de onda* es la distancia entre dos crestas sucesivas o valles; para las ondas longitudinales, es la distancia de condensación a condensación o rarefacción a rarefacción. La *frecuencia* de la onda es el número de vibraciones por segundo. La *velocidad de la onda*, que es la velocidad a la que avanza, es igual a la longitud de onda por la frecuencia. El desplazamiento máximo involucrado en la vibración se llama la *amplitud de la onda*.

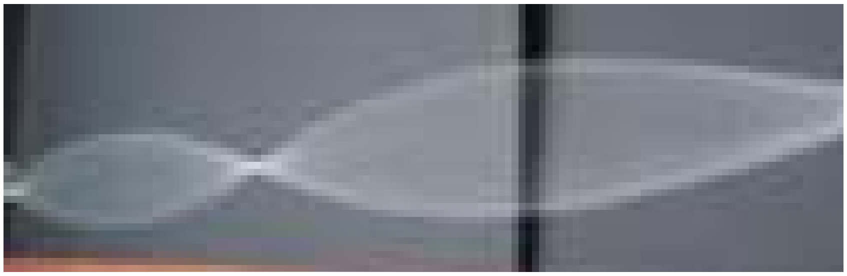
El movimiento ondulatorio es el mecanismo por el que se lleva energía de un lugar a otro en ondas mecánicamente propagadas sin la transferencia de materia.

La velocidad de movimiento de la onda en la materia depende de la elasticidad y densidad del medio. Una onda transversal en un cordón tenso, por ejemplo, la velocidad depende de la tensión del cordón y de la masa por unidad de longitud. La velocidad puede ser doblada cuadruplicándose la tensión o puede reducirse a la mitad cuadruplicándose la masa del cordón. El movimiento de ondas electromagnéticas a través del espacio es constante, aproximadamente 300,000 Km./seg., la velocidad de luz. Esta velocidad varía ligeramente cuando la onda pasa a través de la materia.

Cuando dos ondas se encuentran en un punto, el desplazamiento resultante de ese punto será la suma de los desplazamientos producido por cada una de las ondas. Si los desplazamientos están en la misma dirección, las dos ondas se refuerzan; si los desplazamientos están en la dirección opuesta, las ondas se neutralizan. Este fenómeno es conocido como *interferencia*.

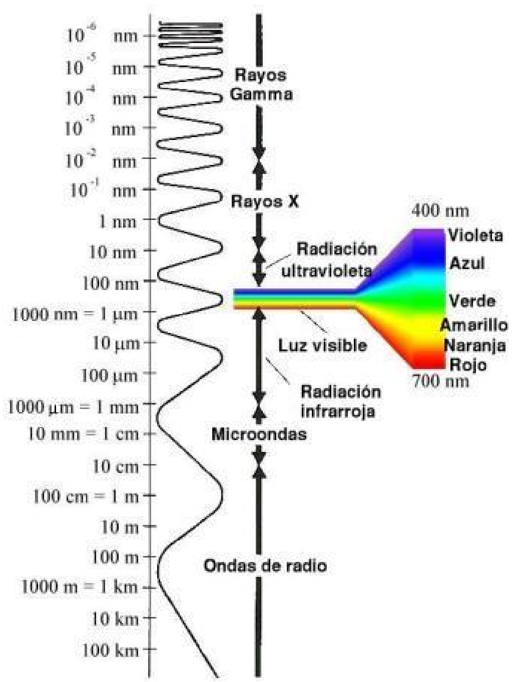


Cuando dos ondas de longitud y amplitud de onda iguales viajan en direcciones opuestas a la misma velocidad a través de un medio estacionario se forman ondas. Por ejemplo, si un extremo de una soga se ata a una pared y el otro extremo se agita de arriba a abajo, se reflejarán ondas a lo largo de la soga desde la pared.

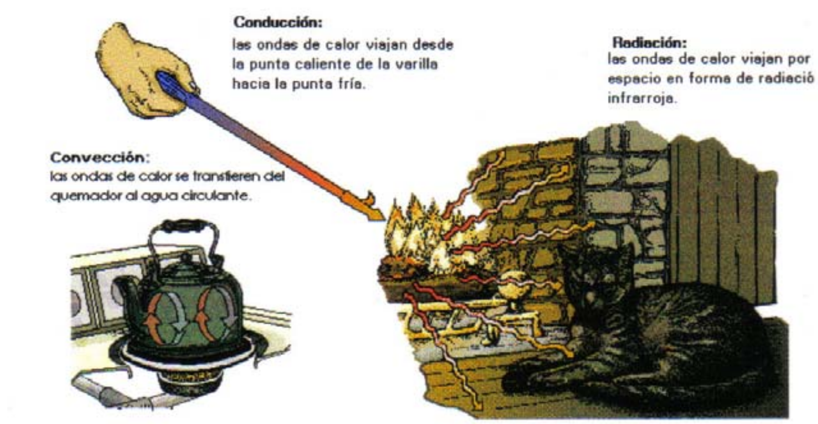


Asumiendo que la reflexión es absolutamente eficaz, la onda reflejada será la mitad de la longitud de onda reflejada. Habrá interferencia, y el desplazamiento resultante en cualquier punto dado y tiempo será la suma de los desplazamientos individuales. Ningún movimiento tendrá lugar en los puntos donde la cresta de la onda incidente se encuentra con el valle de la onda reflejada. A tales puntos se les llama *nodos*. A medio camino entre los nodos, las ondas se encuentran en la misma fase; es decir, cresta coincidirá con cresta y valle con valle. En estos puntos la amplitud de la onda de la resultante es dos veces más grande que la onda incidente. Así, la soga es dividida en secciones del largo de la longitud de onda por los nodos a lo largo de la soga mientras la soga entre los nodos vibra transversalmente.

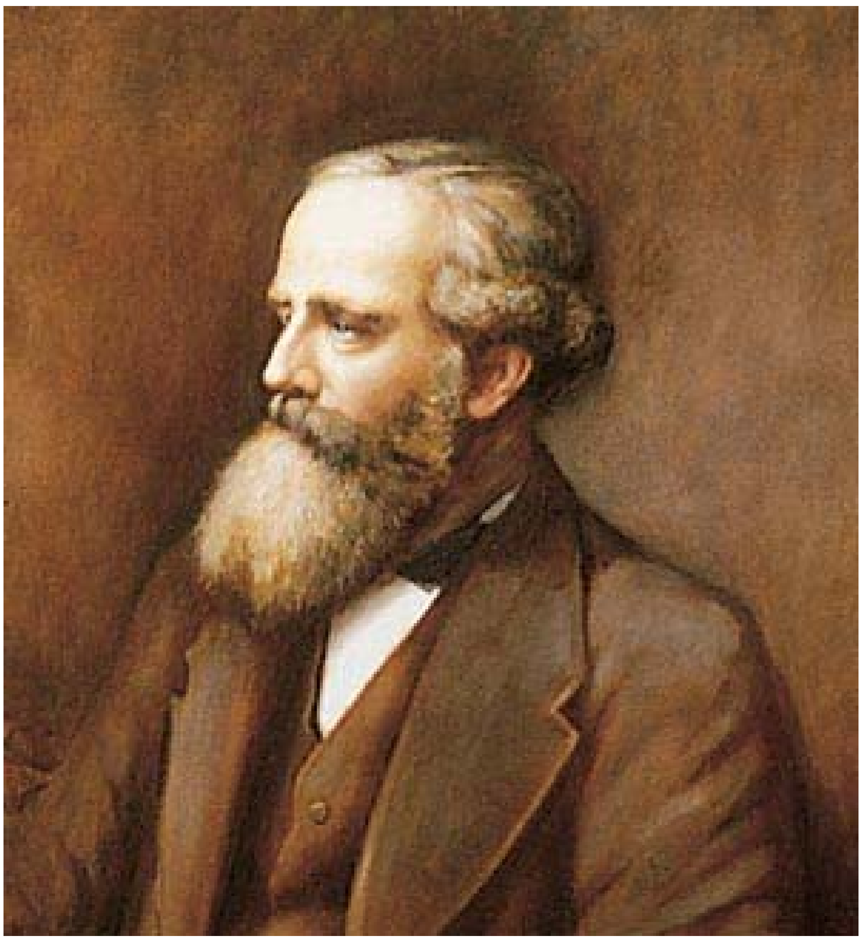
La radiación electromagnética consiste de ondas de energía producidas por la oscilación o aceleración de una carga eléctrica. Las ondas electromagnéticas tienen ambas componentes eléctrica y magnética. La radiación electromagnética puede colocarse en un espectro que se extiende desde las ondas de frecuencia sumamente alta y la longitud de onda corta a las de frecuencia sumamente baja y la longitud de onda larga. La luz visible es sólo una parte pequeña del espectro electromagnético. En orden de frecuencia decreciente, el espectro electromagnético consiste en rayos gamma, rayos X duros y suaves, radiación ultravioleta, luz visible, radiación infrarroja, microondas y ondas de radio.



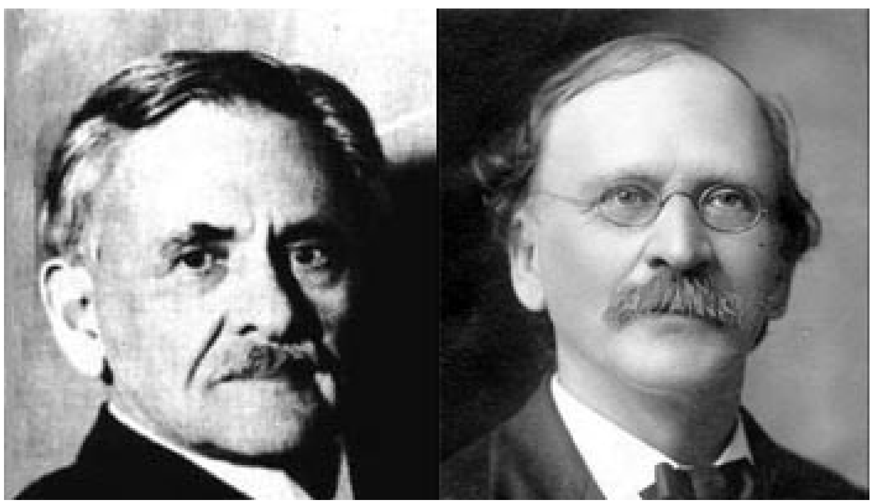
Hay tres fenómenos a través de los que la energía puede transmitirse: la radiación electromagnética, conducción y convección. La *conducción* es la forma en que se transmiten las ondas por medio de un cuerpo sólido. La *convección* es la forma en que las ondas pasan de un cuerpo sólido a uno líquido o gaseoso, la *radiación electromagnética* no necesita ningún medio material para la transmisión. Así, la luz y ondas de radio pueden viajar a través del espacio interplanetario e interestelar desde el sol y las estrellas a la tierra. Sin tener en cuenta la frecuencia, longitud de onda, o método de propagación, las ondas electromagnéticas viajan a una velocidad de 300 000 Km. por segundo en el vacío. Todos los componentes del espectro electromagnético, sin tener en cuenta frecuencia, también tienen en común las propiedades típicas de movimiento de la onda, incluso la difracción y la interferencia. Las longitudes de onda van de millonésimo de un centímetro a muchos kilómetros. La longitud de onda y frecuencia de ondas electromagnéticas son importantes determinando el efecto calorífico, visibilidad, penetración y otras características de la radiación electromagnética.



El físico británico James Clerk Maxwell (1831-1879) escribió la Teoría de Ondas Electromagnéticas en una serie de artículos publicados en la década de 1860 a 1870. Maxwell analizó la teoría de campos electromagnéticos matemáticamente y predijo que esa luz visible era un fenómeno electromagnético.



Los físicos sabían desde principios del siglo XIX que la luz se propaga como una onda transversa (una onda en la que las vibraciones entran una dirección perpendicular a la dirección en que avanza el frente de la onda). Sin embargo, supusieron que la onda requirió algún medio material para su transmisión, por lo que ellos postularon la existencia de una sustancia sumamente difusa, a la que llamaron éter, como el medio inobservable. La teoría de Maxwell hizo semejante suposición innecesaria, pero el concepto de éter no fue abandonado inmediatamente, porque encajó en el concepto Newtoniano de un marco del espacio-tiempo absoluto para el universo. Un famoso experimento dirigido por el físico Alberto Abraham Michelson (1852-1931) y el químico Edward Williams Morley (1838-1923) a finales del siglo XIX sirvió para dispersar el concepto de éter y fue importante en el desarrollo de la teoría de relatividad. Este trabajo llevó a la conclusión de que la velocidad de radiación electromagnética en un vacío es invariable.



Sin embargo, al principio del siglo XX, los físicos encontraron que la Teoría de la Onda no consideró todas las propiedades de la radiación. En 1900 el físico Max Planck demostró que la emisión y absorción de radiación ocurren en unidades finitas de energía, conocidas como cuantas (os). En 1904, Albert Einstein pudo explicar algunos resultados experimentales enigmáticos en el efecto fotoeléctrico externo postulando que esa radiación electromagnética puede comportarse como una partícula.

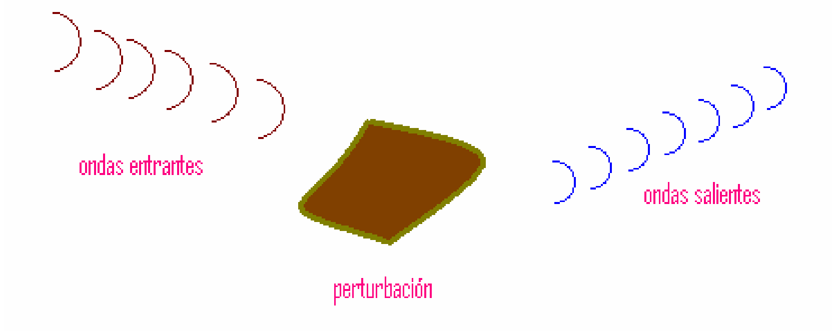
Otros fenómenos importantes que ocurren en la interacción entre la radiación y la materia, también pueden explicarse sólo por la teoría cuántica. Así, los físicos modernos se vieron obligados a reconocer que esa radiación electromagnética, a veces puede comportarse como una partícula y a veces como una onda. El concepto paralelo también exhibe la misma dualidad, es decir, que la materia presenta características de comportamiento como partícula y características de comportamiento como onda, esta teoría fue desarrollada en 1925 por el físico francés Louis Victor de Broglie.

La **Teoría de Dispersión** estudia el comportamiento de las ondas libres y perturbadas. Una onda es *libre* cuando no hay ningún objeto o fuerza que la altere. Diremos que una onda ha sido *perturbada* cuando se ha topado con algún objeto o fuerza, a esos objetos o fuerzas les llamaremos *perturbaciones*, por lo cual hay una gran diversidad de perturbaciones y dependiendo del tipo de perturbación con que se encuentre una onda, ésta se comportará.

Así, podría quedarse atrapada para siempre, quedarse atrapada por un tiempo y luego salir o salir inmediatamente con la misma o diferente frecuencia.

Diremos que una onda se dispersa si se comporta como una onda libre para tiempos muy remotos tanto en el pasado como en el futuro.

Esquemáticamente, podemos ver el tipo de problemas que conciernen a la Teoría de Dispersión: Un problema es, si conocemos cómo son las ondas entrantes y la perturbación, poder predecir como serán las ondas salientes. Otro problema es, si conocemos la perturbación y las ondas salientes, poder decir cómo eran las ondas entrantes. Y por último si conocemos las ondas entrantes y las ondas salientes, poder decir cómo es la perturbación.



La Teoría de Dispersión compara el comportamiento asintótico de un sistema cuando el tiempo tiende a menos infinito (pasado remoto) con su comportamiento asintótico cuando el tiempo tiende a más infinito (futuro remoto).

Esta teoría es especialmente fructífera en el estudio de sistemas construidos a partir de un sistema simple con la imposición de una perturbación, probando que la influencia de la perturbación para tiempos muy lejanos es casi imperceptible. A cada estado f del sistema perturbado le corresponden dos estados f_- y f_+ del sistema sin perturbar, con base en estos estados se construye el operador de dispersión.

La importancia del *operador de dispersión* radica en que si el obstáculo es remoto o inaccesible a la observación directa, entonces uno de los métodos principales para investigar su forma y/o composición es examinar las ondas transmitidas y reflejadas de varias frecuencias. Esto es similar a la interacción de los núcleos atómicos con ondas o partículas donde la escala del tiempo es tal que las observaciones hechas antes y después de un experimento pueden ser consideradas como que ocurren cerca de menos infinito y más infinito. Estas ondas reflejadas y transmitidas están íntimamente relacionadas con el operador de dispersión. Así, en estas situaciones, el operador de dispersión es lo observable de la interacción, y por esta razón es que Heisenberg, el fundador de la Teoría Cuántica Moderna, conjeturó que toda la información pertinente acerca de las fuerzas nucleares está contenida implícitamente en el operador de dispersión.

Uno de los problemas básicos en esta teoría es el de extraer esta información, éste es el llamado "problema inverso de dispersión" y ha ocupado la atención de muchos físicos y matemáticos.

Esta teoría tiene muchas aplicaciones en diversas actividades del quehacer humano. Veamos como son las aplicaciones en los aparatos de tomografía tan utilizados en medicina.

Desde que en 1895 Röntgen descubriera los rayos X y obtuviera la primera radiografía, las virtudes y limitaciones de esta técnica de exploración quedaron de manifiesto. Las técnicas radiológicas han rendido desde entonces servicios muy valiosos a la medicina, tanto en el diagnóstico como en la terapéutica, pero sus progresos han sido sólo en cuestiones de detalle.

Cuando al tomar una radiografía estamos interesados en la exploración de un determinado punto, a las señales que contienen la información útil se le superponen las imágenes de todas las capas interpuestas entre el emisor de rayos X y la placa receptora donde se produce la imagen. Se unen a este problema otros de difracción y la invisibilidad de las zonas blandas (músculos, tendones, vasos sanguíneos y nervios), ya que tan sólo los huesos y el aire (exploración pulmonar) producen una atenuación manifiesta; por esta razón, algunas exploraciones requieren la adición de líquidos de contraste, que pueden entrañar algún peligro o resultar dolorosos.

Cormack conoció estas dificultades y aplicó su mentalidad de físico a su resolución. Era bien sabido que las diferentes intensidades que recoge una placa radiográfica son debidas a que los rayos X son absorbidos en forma proporcional a las distintas densidades de los tejidos que encuentran en su recorrido. Cabe pensar, por tanto, en el siguiente planteamiento: utilizando un haz de rayos X muy fino, se efectúa una primera medida de atenuación; si desplazamos en un mismo plano la fuente emisora y el detector alrededor del objeto anatómico en estudio y efectuamos medidas sucesivas, obtendremos una información precisa sobre una delgada capa del mismo, información que permitirá la reconstrucción de sus zonas de distinta densidad, siempre que se disponga de las armas matemáticas necesarias para descifrarla. Las posibilidades de aplicación en la época en la que Cormack publicó sus estudios eran remotas y de ahí que entonces pasaran prácticamente inadvertidas.

En su momento, Hounsfield puso a punto las técnicas matemáticas que la aplicación de la tomografía axial computerizada (TAC) requería y diseñó el primer aparato de aplicación clínica, sobre todo en la exploración del cerebro, máxima utilización del TAC en la actualidad. El aparato analizaba una capa de ocho milímetros de espesor desde 180 posiciones distintas, con un total de 28 800 medidas por cada capa. Las figuras obtenidas eran como un corte anatómico realizado en el cerebro de un cadáver, lo que sugiere en la posibilidad de hacer algo como "una autopsia a un hombre vivo". Una lesión, un tumor, un depósito anormal de calcio, todo queda visualizado sin temor al error.

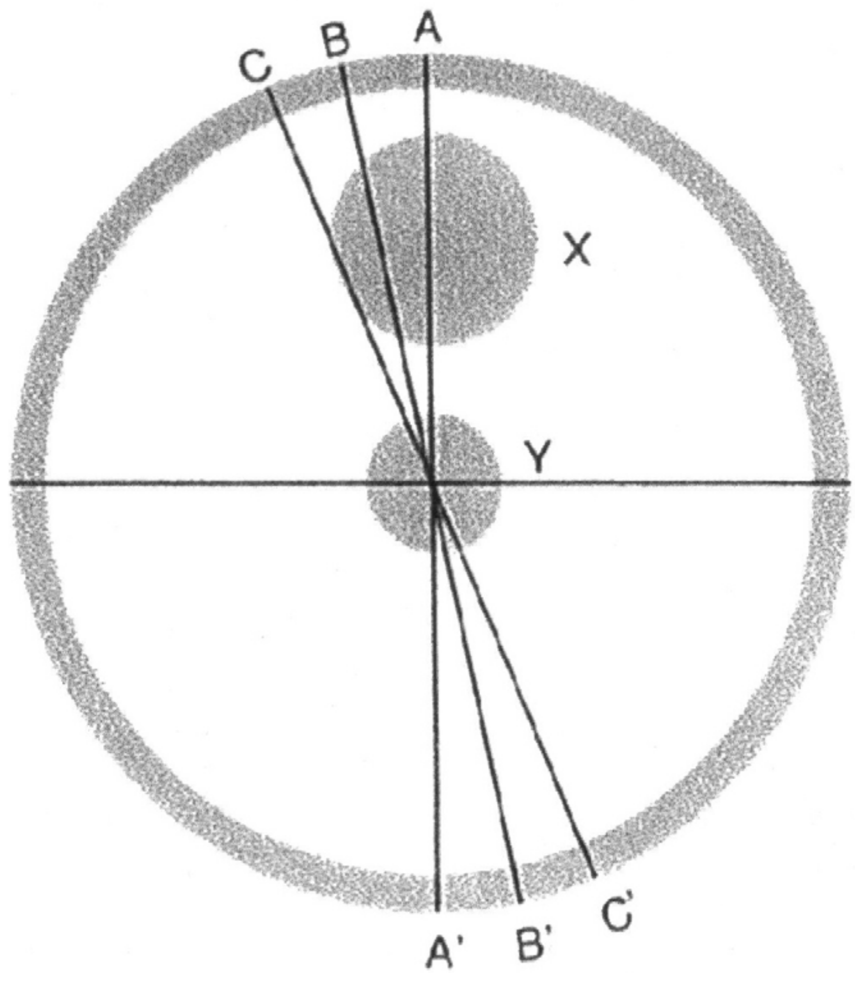
En los ocho años que siguieron a la aparición en el mercado del primer aparato comercial, más de mil hospitales en todo el mundo lo incluyeron en sus instalaciones y ello pese a su elevado costo. Además de su fundamental aplicación en el campo diagnóstico, el TAC ha mostrado una gran utilidad como auxiliar en los tratamientos de tumores mediante radiaciones, pues permite una localización precisa y rápida de la zona a tratar.

El hecho de que toda la información que se obtiene esté contenida en la computadora permite visualizar el campo considerado en una pantalla desde diferentes ángulos y perspectivas, lo cual puede facilitar en grado extremo una intervención quirúrgica.

Los progresos inmediatamente previsibles pueden descartar el empleo de los rayos X, sustituyéndolos por corrientes de protones o por la resonancia magnética nuclear (RMN). Se están haciendo también intentos para lograr visiones dinámicas de la zona estudiada, lo que permitiría el análisis funcional además del anatómico.

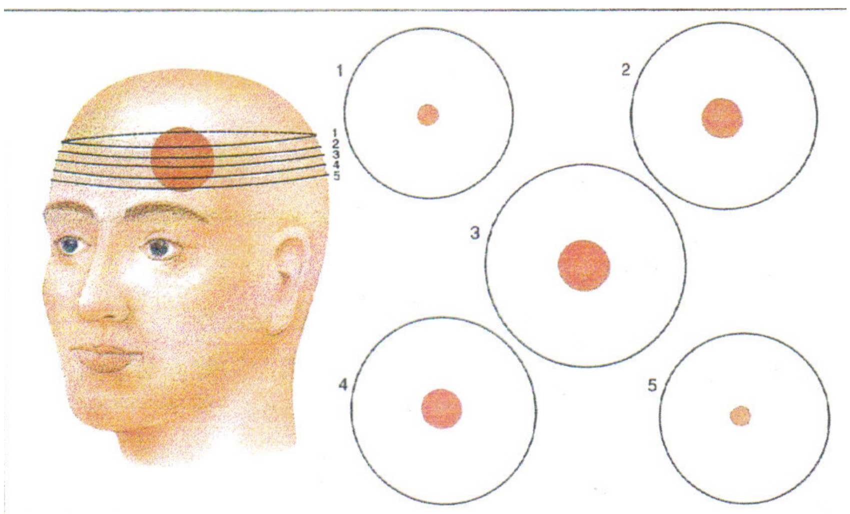
En 1917 el matemático Johann Radon (1887-1956) publicó un artículo donde mostraba que si se conocían todas las integrales de línea de una función en el plano, sin necesidad de conocer la función, entonces se podía reconstruir la función, a través de un operador que él construyó, el cual ahora lleva el nombre de *transformada de Radon*.

Veamos esquemáticamente cómo es esto.

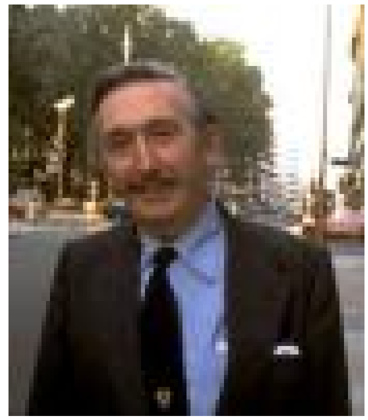


La transformada de Radon nos permite recuperar una función en el plano conociendo todas las integrales de línea.

Estas ideas que había desarrollado Radon a principios del siglo pasado junto con el avance y desarrollo de las computadoras, más las nuevas investigaciones en la transformada de Radon, más los conocimientos acerca de la atenuación de las intensidades de los rayos X en el cerebro es lo que llevó Cormack y Hounsfield a la construcción del TAC.



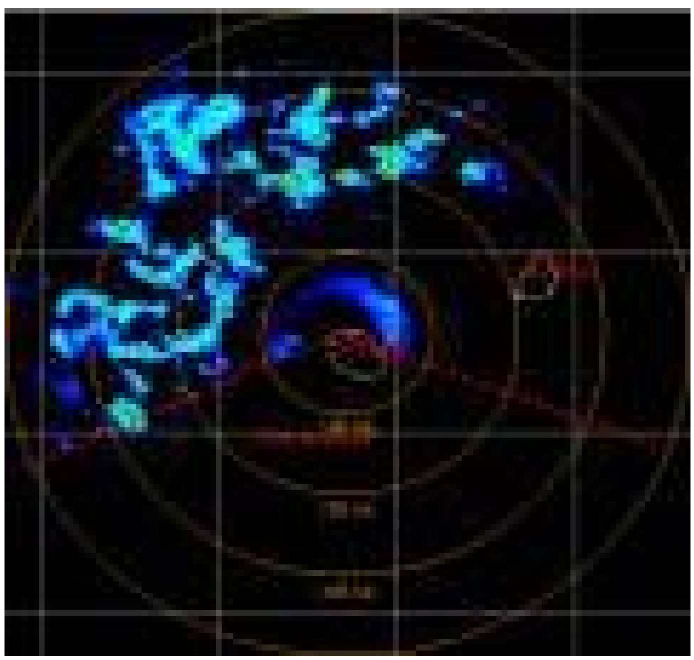
El aparato de TAC envía ondas de rayos X sobre planos. Con la transformada de Radon se obtiene la forma y densidad sobre dicho plano. Realizando este procedimiento sobre varios planos se puede obtener una imagen tridimensional que también aporta información de densidad.

A partir de los Premios Nobel de Medicina en 1979 de Allan Mac Leod Cormack y Godfrey Newbold Hounsfield (cuyas fotos aparecen arriba), quienes presentaron imágenes estáticas y aparentemente continuas del cerebro, se ha abierto un campo de investigación tratando de crear imágenes del cuerpo humano más reales.

Como podemos ver en este caso, se aplica la Teoría de Dispersión para el problema del tipo donde se conocen las ondas entrantes y salientes para poder conocer la perturbación. Ahora vemos como es utilizada esta teoría en la aeronáutica.

El radar es un sistema electrónico que localiza objetos más allá del rango de visión, y determina su distancia proyectando ondas de radio contra ellos. Los dispositivos de radar no sólo indican la presencia y rango de un objeto distante, sino que también determinan su posición en el espacio, su tamaño y forma, así como su velocidad y dirección de movimiento. Aunque originalmente se desarrolló como un instrumento de guerra, el radar hoy se usa extensivamente en muchas actividades de paz que incluyen el control de tráfico aéreo, los modelos de detectores del clima y rastreo de naves espaciales.



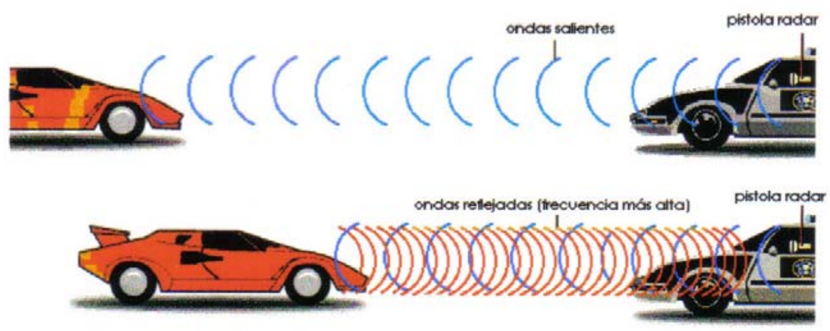
Todos los sistemas del radar emplean un transmisor de radio de alta frecuencia para mandar ondas electromagnéticas que van en longitud de onda de unos centímetros a aproximadamente un metro. Los objetos en el camino de estas ondas las reflejan hacia el transmisor. Los conceptos básicos de radar están basados en las leyes de reflexión de la radio-onda que es inherente en las ecuaciones que gobiernan la conducta de ondas electromagnéticas desarrolladas por el físico británico James Clerk Maxwell en 1864. Estos principios se demostraron primero en 1886 en experimentos por el físico alemán Heinrich Hertz. El ingeniero alemán Christian Hülsmeyer fue el primero en proponer el uso de ecos de radio en un dispositivo detector que diseñó para evitar colisiones en navegación marina. Un dispositivo similar se sugirió en 1922 por el inventor italiano Guillermo Marconi.

El primer sistema del radar práctico se produjo en 1935 por el físico británico Sir Robert Watson-Watt. Su trabajo dio a los británicos una ventaja importante con esta tecnología y para 1939 ellos habían establecido una cadena de estaciones del radar a lo largo de las costas sur y oriental de Inglaterra para descubrir a los agresores en el aire o en el mar. En ese mismo año, el físico Henry Boot y el biofísico John T. Randall inventaron un tubo de electrones con cavidad resonante al que llamaron *magnetrón*. Este tipo de tubo es capaz de generar radio de alta frecuencia y permite el desarrollo del radar de microondas que opera en la misma banda de longitud de onda corta de menos de un centímetro que usa láseres. El radar del microonda LIDAR también llamado "rastreador ligero", se usa hoy en día para comunicaciones y para medir contaminación atmosférica.

Los sistemas de radar avanzados desarrollados en los años treinta jugaron un papel importante en la Batalla de Bretaña, una batalla aérea de agosto a octubre de 1940 en la que el Luftwaffe de Adolfo Hitler no ganó el mando de los cielos de Inglaterra. Aunque los alemanes tenían sus propios sistemas de radar, a lo largo del resto de la guerra, los británicos y norteamericanos pudieron mantener superioridad técnica.

Las ondas de radio viajan a aproximadamente 300,000 Km./seg. (aproximadamente 186,000 mi/seg.), la velocidad de luz. El equipo de radar consiste de un transmisor, una antena, un receptor y un indicador. Los transmisores y receptores del radar normalmente se localizan en el mismo lugar. El transmisor transmite una viga de ondas electromagnéticas por medio de una antena que concentra las ondas en una viga formada que apunta en la dirección deseada. Cuando éstas ondas golpean un objeto en el camino de la viga, algunas son reflejadas por el objeto y forman una señal de eco. La antena colecciona la energía contenida en la señal de eco y la entrega al receptor.

El radar de onda continua transmite una señal continua en lugar de pulsos. El radar Doppler utiliza una onda continua, la cual se usa a menudo para medir la velocidad de un objeto, como un automóvil o una pelota de béisbol. Éste transmite una frecuencia constante. Las señales reflejadas de objetos que están en movimiento regresarán a la antena con frecuencias diferentes debido al efecto de Doppler. De esta manera, la policía mide la velocidad de automóviles.



Durante la guerra del Golfo Pérsico en 1992, llamada Tormenta del Desierto, se utilizaron los aviones F 117, también conocidos como “aviones invisibles”, los cuales no son detectados por los radares.

Para finalizar esta exposición, resumamos algunas de las aplicaciones de la Teoría de Dispersión. La Teoría de Dispersión se aplica:

- en la Medicina, en los aparatos de tomografía. Sin necesidad de abrir a un paciente se puede observar si sus órganos están sanos o tienen tumores.

- en la Ingeniería Militar en los “aviones negros”,

- en la Astronomía, donde se estudia el comportamiento de ondas electromagnéticas en el espacio exterior para ver los distintos tipos de estrellas y encontrar hoyos negros.

- en la detección de yacimientos minerales, a través de imágenes de la Tierra tomadas desde satélites.

- en la Ingeniería, donde se están haciendo a nivel experimental, autos que no hacen ruido, (de hecho sí lo hacen pero se generan ondas inversas para anularlo).

- en la industria, donde aparatos analizan las vibraciones de los motores de grandes máquinas para ver si funcionan bien o en qué parte hay que darles mantenimiento.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Aceff Sánchez F. Teoría de Dispersión para la ecuación de onda con perturbaciones de rango corto. Tesis doctoral. Facultad de Ciencias de la UNAM 1995.

Aceff Sánchez F. ¿Qué es la propagación de ondas?, Memorias del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades 1993-1995.

Bartok, B. Allegro Bárbaro. Universal Edition. (1918)

Birkhoff, G.D. A Mathematical Theory of Aesthetics. Rice Institute Pamphlet. Vol. 19. (1932).

Birkhoff, G.D. Aesthetic Measure. Cambridge, Mass. (1933).

Birkhoff. G.D. Quelques Elèments Mathèmatics de L'art. Atti Congr. Intern. d. Matem., Bologna. Vol.1. p. 315-333. (1929).

Birkhoff,G.D. Medida Estética. Universidad Nacional del Litoral, Rosario, Argentina. (1945).

Birkhoff G. MacLane S. Algebra. Mac Millan. (1968)

Bourbaki N. Eleménts des Mathématique, Algebre. Herman. Paris. (1974).

[Da] Davis, P.J., Hersh R. The Mathematical Experience. Houghton Mifflin Co. Boston. (1981).

[D] Dieudonné, J. A Panorama of Pure Mathematics. Academic Press. (1982).

Keller J. B. A Geometrical theory of diffraction. calculus of variations and its applications, Proc. Sympos. Appl. Math., **8** (1958). 27-52; Math. Revs., **20** (1959), 103.

Keller J. B. Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable Systems, Annals Physics, (1958), 180-188; Math. Revs., 20 (1959), 934.

Keller J. B. Rays, waves and asymptotics, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 727-750.

Keller J. B. One hundred years of diffraction theory, IEEE Trans. Antennas and Propagation,\ **AP-33** (1985), 200-214.

Keller J. B. Semiclassical mechanics, SIAM Rev., **27** (1985), 485-504.

Keller J. B. and Rubinow S. I. Asymptotic solution of eigenvalue problems, Annals Physics, **9** (1960), 24-75.

Kline M. Mathematics in the Modern World. Scientific American. (1968).

Lax P. and Phillips R. Scattering Theory. Academic Press 1967.

Lendvai, E. Bela Bartok: An analysis of his music, Kahn & Averill, London. (1979).

[M] Mathematics in the Modern World. Scientific American. W.H. Freeman and Co. San Francisco. (1968).

Mazzola, G. Gruppen und Kategorien in der Musik: Entwurf einer mathematischen Musiktheorie. R&E. 10. Heldermann Verlag Berlin. (1985).

Mazzola, G. Mathematical Music Theory- An Informal Survey. Note di matematica e fisica. CEFRIM, Anno 7., Vol.7, Locarno.(1994).

Mazzola, G. Towards Big Science: Geometric Logic of Music and its Technology. In: Symposionsband zur klangart 1995, Hrsg. B. Enders, Rasch, Osnabrück 1998.

Mazzola, G. Mathematical Music Theory-Status Quo 2000. Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana.

Mazzola, G. Classyfying Algebraic Schemes for Musical Manifolds. Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana. 2003.

Mazzola, G. www.encyclospace.org.

Mozart, W.A. K. 294 (Anh. C) Musikalisches Würfelspiel. B.Schott´s Söhne. (1956)

Niven I. Zuckerman H. Introducción a la Teoría de los Números. Limusa. (1960)

[S] Sagan, C. Cosmos. Ed. Planeta. 1982.

LOS AUTORES

Flor de María Aceff

Flor de María Aceff nació en la Ciudad de México. Obtuvo el título de Profesora de Educación Primaria en la Escuela Nacional de Maestros en 1982. Después, en 1989, la Licenciatura en Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Posteriormente, en 1990 se graduó como Maestra en Ciencias Matemáticas. Finalmente obtuvo su Doctorado en Matemáticas en 1995, este último con la realización de la tesis "Teoría de Dispersión para la Ecuación de Onda con Perturbaciones de rango corto".

La Dra. Aceff es Profesora de Tiempo Completo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Realiza actividades de investigación, difusión y docencia tanto en el ámbito de licenciatura como de posgrado. Perteneció al Sistema Nacional de Investigadores y es miembro del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades, de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística, de la American Mathematical Society, de la Real Sociedad Matemática Española y de la Sociedad Matemática Mexicana.

Emilio Lluis-Puebla

En Emilio Lluis se conjugan la Ciencia y el Arte paralelamente. Nació en la Ciudad de México en septiembre de 1952. Por un lado, Emilio Lluis realizó sus Estudios Profesionales y de Maestría en Matemática en México. En 1980 obtuvo su Doctorado (Ph.D) en Matemática en Canadá. Es catedrático de la Universidad Nacional

Autónoma de México en sus Divisiones de Estudios Profesionales y de Posgrado desde hace veintiocho años. Ha formado varios profesores e investigadores que laboran tanto en México como en el extranjero.

Es autor de varios libros sobre K-Teoría Algebraica, Álgebra Homológica, Álgebra Lineal y Teoría Matemática de la Música publicados en las editoriales con distribución mundial Addison Wesley, Birkhäuser y Springer Verlag entre otras.

Es miembro de varias asociaciones científicas como la Real Sociedad Matemática Española y la American Mathematical Society. Es presidente de la Academia de Ciencias del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades, presidente de la Academia de Matemática de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística y presidente 2000-2002 de la Sociedad Matemática Mexicana.

Paralelamente, Emilio Lluis, inició sus estudios pianísticos a los 6 años de edad tras haber mostrado desde pequeño una gran disposición hacia la música. En México estudió con distinguidos pianistas. Durante los años setenta realizó estudios en Canadá con el extraordinario pianista Peter Katin y a lo largo de su carrera participó en diversos cursos pianísticos como los de Jörg Demus y Daniel Ericourt.

Es presidente de la Academia de Música de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística. Frecuentemente ofrece conferencias y cursos de perfeccionamiento pianístico en México y en el extranjero. En los años ochenta presentó el Ciclo Completo de las 32 Sonatas para piano de Beethoven. Es el primer pianista mexicano que interpreta tan majestuosa obra en salas de concierto. La Colección de "Emilio Lluis en CD y DVD" acaba de ser editada y consta de veintisiete CD y treinta DVD.

Sus actuaciones incluyen giras en repetidas ocasiones por Sudamérica y Europa, actuando como recitalista en Canadá, Dinamarca, Alemania, Suiza, Portugal, República Dominicana, Costa Rica, Perú, Bolivia, Brasil, etc. y como solista de diversas orquestas sinfónicas nacionales así como extranjeras incluyendo la Sinfónica Nacional de La Paz y la Filarmónica de Río de Janeiro interpretando obras como el Concierto Emperador de Beethoven, el Concierto 2 de Brahms y el segundo concierto para piano y orquesta de Rachmaninoff.

Contraportada

Este libro tiene como propósito el de servir como motivación y orientación vocacional a los jóvenes deseosos de dedicarse a una de las aventuras más formidables del Ser Humano, la Matemática. También está dedicado a toda persona que desee obtener un concepto más aproximado acerca de la Matemática y sus practicantes.

“Matemática y matemáticos I” es un breve panorama sobre ese no tan desconocido mundo de la Música y de los músicos y de ese misterioso y prácticamente desconocido mundo del matemático y de la Matemática. ¿Cuáles son las fuentes de creación?, ¿Cuál es el papel del intérprete en la actualidad?, ¿Cuánta Matemática hay?, ¿Cómo se origina una teoría matemática?, ¿Qué significa la palabra Matemática?, ¿Cuáles son las fuentes de creación?, ¿Cómo es un matemático?, ¿Quienes ingresan a una carrera de matemática y qué los motiva?, ¿Qué es la Matemática Aplicada? ¿Cómo ven a la Matemática y a los matemáticos otros profesionistas? Éstas son algunas de las preguntas, entre muchas otras, que se exponen con su respectiva respuesta. También se hace una reflexión acerca del momento histórico que nos ha tocado vivir en relación con éstas dos disciplinas y sus practicantes.

En “Matemática en la Música I” se expone el Juego de Dados Musical de Mozart K.294c y se analizan matemáticamente algunas de sus características. También se expone la Teoría de la Estética de George David Birkhoff y su aplicación a la Música en particular. Las sucesiones de Fibonacci, la razón áurea o proporción divina se presentan, así como su aplicación en la música de Bela Bartók. Brevemente se menciona el trabajo de Guerino Mazzola sobre su Teoría Matemática de la Música. También se hace otra reflexión acerca del momento histórico que nos ha tocado vivir en relación con éstas dos disciplinas y sus practicantes.

En “Matemática en la Matemática” se expone uno de los conceptos más antiguos de la misma, ampliamente desconocido por la gente común y los profesionales de múltiples disciplinas: la operación binaria o ley de composición. También se ve qué tan ciertos son unos "dichos populares" como son los de "tan claro como que dos y dos son cuatro" y "el orden de los factores no altera el producto" y se explica un poco la clasificación actual de la Matemática.

Dentro de "Matemática en la Medicina y en la Aeronáutica" se presenta la Teoría de Dispersión, (una parte muy interesante de la Física Matemática). Ésta constituye la base matemática de la tomografía y de la tecnología de los más avanzados aviones militares.