Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana

Geometría

César E. Villarreal
Juan González-Hernández

www.sociedadmatematicamexicana.org.mx

Serie: Textos. Vol. 8 (2007)
ISBN 968-9161-28-8

GEOMETRÍA

César E. Villarreal
Profesor de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León

Juan González-Hernández
Investigador del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México

Clave en el Registro Público del Derecho de Autor No.:
03-2005-112912250700-1

PREFACIO

El presente libro está dirigido a estudiantes de las carreras de matemáticas y a todo aquel lector interesado en abordar de manera rigurosa los temas básicos de la geometría. Uno de los objetivos de este libro es que el lector aprenda los temas elementales de geometría mediante un orden lógico y riguroso, de manera que, en la medida de lo posible, no haya cabida de ambigüedades, además de que desarrolle el hábito de leer y escribir de manera clara y con una actitud crítica sobre cualquier tema de matemáticas que sea de su interés. Otro de los objetivos es que sirva como fuente de consulta sobre teoremas y fórmulas geométricas, de manera que el lector con curiosidad no solamente encuentre un resultado sino también la demostración del mismo. En la mayoría de los libros de matemáticas, cuando encontramos resultados cuya demostración parece difícil o es laboriosa, comúnmente nos topamos con frases como "la demostración no está dentro de los objetivos del curso", "la demostración va más allá de los alcances del libro, el lector interesado puede leer un libro con tales características" o simplemente "omitimos la demostración". En nuestro caso los pocos teoremas que no se demuestren no será por causa de que sea de un alto grado de dificultad sino porque consideramos que el lector puede ser capaz de demostrarlo por sí mismo, ya sea por ser un caso particular o consecuencia inmediata de otro teorema o por que la metodología que pudiera ser utilizada para la demostración ya haya sido empleada anteriormente. Lo anterior pretende hacer del presente un libro completo y en lo posible auto contenido, aun a costa de ser algo paternalista.

La razón por la cual este libro no es totalmente auto contenido es por que se requiere que el lector conozca los fundamentos básicos de las matemáticas como son las leyes de la lógica para obtener conclusiones, los conceptos de función y conjunto así como las manipulaciones básicas de estos y las propiedades de los números reales, incluyendo de preferencia el axioma del supremo, el cual se utiliza para definir términos como el de longitud. Para los lectores que no tengan familiaridad con el axioma del supremo, se agregó un apéndice con un tratamiento elemental del mismo. A partir del capítulo IV se supone que el lector tiene conocimientos del concepto de límite, por lo que es recomendable, si se quiere llegar hasta el capítulo IV, que la lectura del libro sea precedida o vaya a la par de un curso o la lectura de un libro básico de cálculo. No será necesario que el lector tenga conocimientos de cálculo ni de álgebra lineal en $\mathbb{R}^n$ (con $n > 1$).

La manera como inicialmente abordamos el tema de geometría es en base a postulados. Todos los postulados se establecen en el capítulo I, el cual trata sobre la geometría elemental. Partiendo de estos postulados llegamos a demostrar los principales resultados básicos de la geometría. El sistema de postulados es consistente y se escogió tratando de que fueran intuitivamente evidentes, no fueran demasiados, y se pueda llegar de manera relativamente sencilla y rápida a conclusiones interesantes. Para una pronta localización en una consulta, los postulados se enumeraron marcando primero la sección en la cual aparecen y luego el número de postulado. La mayoría de los postulados y teoremas a los que se hacen referencias frecuentes tienen un nombre propio con el fin de que el lector recuerde con mayor facilidad qué es lo que dice. Introducimos tempranamente el concepto de longitud de arco de circunferencia para poder definir con precisión y no en base a postulados el concepto de medida de ángulo, por tal razón, de manera temprana con respecto a otros textos de geometría elemental, podemos introducir con precisión el número π, importante no sólo en geometría sino en general en las matemáticas y sus aplicaciones. Los primeros 15 postulados describen las relaciones que existen entre los conceptos de punto, recta, plano, espacio y distancia; con estos postulados llegamos de una manera rigurosa a resultados tan importantes como son el teorema de Pitágoras sin necesidad de recurrir al concepto de área, aunque posteriormente se da una demostración de ese teorema utilizando los postulados del 16 al 19, los cuales describen el concepto de área y a partir de los cuales se deducen también las fórmulas para hallar el área de las principales figuras geométricas planas. El capítulo termina con una sección dedicada a tratar el concepto de volumen, el cual se describe mediante los postulados del 20 al 25. En tal sección se deducen las fórmulas para encontrar el volumen de los principales cuerpos geométricos como son el cilindro, el cono y el cuerpo esférico.

En el capítulo II se introduce el concepto de ángulo dirigido y su medida y se definen las funciones trigonométricas para cualquier número real, además de deducir las principales fórmulas trigonométricas.

En el capítulo III se aborda la geometría analítica plana y se deducen las ecuaciones que describen en el plano a la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, además de estudiar brevemente las transformaciones rígidas en el plano e introducir los números complejos.

El capítulo IV, además de introducirnos en el estudio de la geometría por medio de vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$, se demuestra la consistencia de los postulados dados en el capítulo I, es decir se definen adecuadamente los términos de punto, recta, plano, espacio, distancia entre dos puntos, área y volumen, y se demuestra que en este caso se satisfacen los postulados. En la sección 10 del capítulo IV se describe brevemente el concepto de conjunto abierto. Finalmente, en la sección 11 se hace mención de los cinco postulados de Euclides, los cinco grupos de axiomas de la geometría de Hilbert y se comparan con los postulados que establecemos en el texto, verificando que tales axiomas y postulados pueden deducirse de los establecidos en el texto.

Cuando un término se explica por primera vez en el texto, éste se marcara con letras en negritas, con el fin de localizarlo fácilmente. Será siempre recomendable que la lectura de una frase se interprete de acuerdo al contexto de la sección en la cual aparece, con el fin de que el entendimiento sea pleno, por tal razón, en el apéndice IV del libro, se da una lista de términos usados en el mismo, marcando la sección donde aparece. Los teoremas, lemas, definiciones y ejercicios se enumeran independientemente y por sección. Por ejemplo, si en el capítulo I se cita el teorema 3.2, nos referimos al segundo teorema de la sección 3 del capítulo I; si en capítulo II queremos citar el lema 11.1 del capítulo I, nos referimos a él como “lema 11.1 del capítulo I”. La numeración de los corolarios es de acuerdo al teorema del cual se deriva. Así, el corolario 11.3.2 es el segundo corolario del teorema 11.3. Los postulados se enumeran de manera distinta, con numeración corrida a lo largo del capítulo I y anteponiendo el número de sección. Por ejemplo, el postulado 3.7 es el séptimo postulado del capítulo I y aparece en la sección 3. El lector que tenga duda acerca del significado de un símbolo que aparezca en el texto podrá verificar o consultar su su significado en el apéndice III, donde se da una lista de símbolos.

El presente texto se elaboró en las instalaciones de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León y del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México con el apoyo del proyecto SEP-2003-C02-45448/A-1 y del proyecto PAICYT CA826-04.

Queremos agradecer a todos los familiares y amistades, de los cuales recibimos tanto apoyo moral como sugerencias y correcciones, así mismo agradecemos a Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana por sus acertados comentarios y la confianza recibida en la publicación del libro.

CONTENIDO

Dedicado a Oralia
Dedicado a Juan José

I. GEOMETRÍA ELEMENTAL

1. Introducción

En este capítulo estudiaremos las propiedades elementales de la geometría euclidiana basándonos en un conjunto de postulados básicos que supondremos verdaderos. Introduciremos cinco conceptos básicos no definidos, a saber los de **punto**, **recta**, **plano**, **espacio** y **distancia entre** dos puntos, además de los conceptos de área y volumen que se establecen en las últimas secciones del capítulo. Se pretende que los postulados sean intuitivamente aceptables de acuerdo a las ideas preconcebidas que pudiera tener el lector de los conceptos básicos. Por punto entenderemos un objeto sin grosor, sin longitud ni anchura pero que está en algún lugar (aun cuando al hacer dibujos, un punto es representado con una bolita con un pequeño grosor, esto es solamente una manera de poder visualizar su localización). Una recta no tiene grosor ni anchura, pero tiene una longitud infinita, no tiene comienzo ni fin y no se interrumpe en ningún lugar, además jamás se enchueca. Un plano es algo que no tiene grosor pero tiene longitud y anchura infinita, además no se dobla ni está pando. El espacio es algo que tiene longitud, anchura y grosor infinito, y representa el universo donde se encuentran todas las cosas materiales. La distancia entre dos puntos dados es algo que nos dice qué tan separados o alejados están dos puntos. Lo anterior no constituyen definiciones, recordemos que son términos no definidos, sólo se intenta dar una idea de lo que representan. Los postulados que veremos en este capítulo describirán con mayor precisión lo que queremos que represente, sus propiedades y relaciones entre ellos.

Postulado 1.1. *El espacio es el conjunto de todos los puntos. Además las rectas y los planos son subconjuntos del espacio; es decir, las rectas y los planos son conjuntos cuyos elementos son puntos.*

En este capítulo espacio significará **espacio de tres dimensiones**. Al espacio lo denotaremos con el símbolo $\mathcal{E}$. El símbolo (a, b) representará la pareja ordenada cuya primera componente es a y cuya segunda componente es b, donde $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que a sea igual a b. Al símbolo $\times$ lo usaremos para denotar el producto cartesiano, es decir si A y B son dos conjuntos, entonces $A \times B$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. El símbolo $\Longleftrightarrow$ es el de equivalencia entre dos proposiciones, es decir si p y q son dos proposiciones, la expresión $p \Longleftrightarrow q$ indica que las proposiciones p y q son equivalentes y se lee "p si y sólo si q"; mientras que el símbolo

$\Longrightarrow$ es el de implicación y la expresión $p \Longrightarrow q$ indica que p implica q, lo cual se puede leer como "si p entonces q". El símbolo $(a;b)$ representará al intervalo abierto con extremos a y b, es decir al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$; mientras que $[a;b]$ representará al intervalo cerrado con extremos a y b, es decir al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$; de manera similar el símbolo $[0;+\infty)$ representa al conjunto de los números reales no negativos.

Postulado 1.2. Postulado de la distancia. *Existe una única función $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to [0;\infty)$ tal que si P, Q y S son tres puntos cualesquiera del espacio, entonces*

(i) $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$,

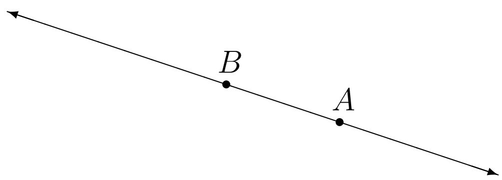
(ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$,

(iii) $d(P,S) \leq d(P,Q) + d(Q,S)$,

(iv) $d(P,Q)$ *es la distancia entre P y Q.*

Si A y B son dos puntos, al número $d(A,B)$ dado en el postulado 1.2 lo denotaremos generalmente como AB (aunque también se denota a veces como $|AB|$ o como $|A-B|$).

Postulado 1.3. Postulado de la recta. *Dados dos puntos diferentes existe solamente una recta a la cual pertenecen.*

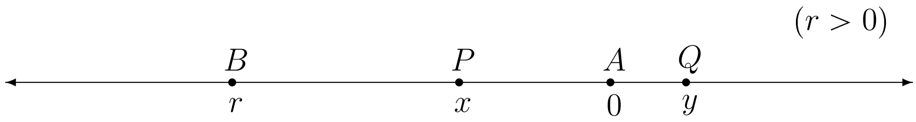


Dados dos puntos diferentes A y B, a la única recta a la cual pertenecen estos puntos se le denota como $\overleftrightarrow{AB}$.

Postulado 1.4. Postulado de la regla. *Dada una recta $\overleftrightarrow{AB}$, existe una única biyección de $\overleftrightarrow{AB}$ en $\mathbb{R}$ de tal manera que:*

(i) *Si $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$, entonces $PQ = |x-y|$, donde x e y son los números que la biyección le asigna a P y Q respectivamente.*

(ii) *La biyección le hace corresponder al punto A el cero y al punto B un número positivo.*



Definición 1.1. A cualquier biyección como la dada en el postulado de la regla se le llama **sistema de coordenadas** de $\overleftrightarrow{AB}$. Si $P \in \overleftrightarrow{AB}$, entonces al número x que le corresponde al punto P se le llama la **coordenada** de P (con respecto a tal sistema de coordenadas).

Como consecuencia directa del postulado de la regla y del hecho de que los números reales tienen al menos dos elementos (de hecho una infinidad de elementos), tenemos el siguiente teorema.

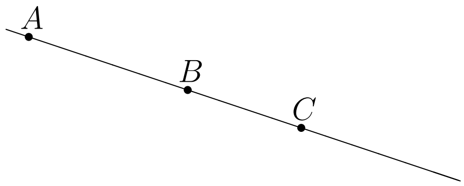
Teorema 1.1. *Toda recta tiene al menos dos elementos.*

2. Segmentos y Rayos

Definición 2.1. Decimos que un punto B está **entre** A y C cuando se cumplen las siguientes dos propiedades:

(i) A, B y C están en una misma recta y son diferentes,

(ii) $AB + BC = AC$.



El siguiente teorema ilustra el hecho de que la definición anterior describe lo que entendemos por la palabra 'entre'.

Teorema 2.1. *Sean A, B y C tres puntos en una recta y sean x, y y z sus coordenadas respectivamente (con respecto a un sistema de coordenadas). El punto B está entre A y C si y sólo si $x < y < z$ ó $x > y > z$.*

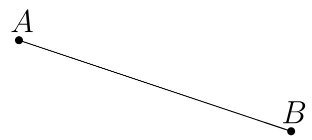
Demostración. Si B está entre A y C, entonces $AB + BC = AC$ por lo que debido al postulado de la regla $|x - y| + |y - z| = |x - z| = |(x - y) + (y - z)|$, pero una expresión de la forma $|a| + |b| = |a + b|$ implica que a y b son del mismo signo o que alguno de los dos es cero (ver todas las posibilidades). Por lo tanto $(x - y)$ e $(y - z)$ tienen el mismo signo o alguno de los dos es cero. Ahora, si $x - y = 0$, entonces $x = y$, por lo que $A = B$; similarmente si $y - z = 0$, entonces $B = C$. Pero si B está entre A y C, entonces A, B y C son diferentes por lo que deben tener diferentes coordenadas. Así tenemos que $(x - y)$ e $(y - z)$ son del mismo signo, es decir ($x - y > 0$ e $y - z > 0$) ó ($x - y < 0$ e $y - z < 0$) pero esto significa que ($x > y$ e $y > z$) ó ($x < y$ e $y < z$), es decir $x > y > z$ ó $x < y < z$.

Ahora, si $x > y > z$ ó $x < y < z$, entonces los puntos A,B y C son diferentes y además $x < y < z \Rightarrow z - y > 0, y - x > 0$ y $z - x > 0$ $\Rightarrow AB + BC = CB + BA = |z - y| + |y - x| = (z - y) + (y - x) = z - x = |z - x| = CA = AC$. Ahora, también tenemos que $x > y > z \Rightarrow x - y > 0, y - z > 0$ y $x - z > 0 \Rightarrow AB + BC = |x - y| + |y - z| = (x - y) + (y - z) = x - z = |x - z| = AC$. ∎

Ejercicio 2.1. Dados dos puntos distintos P y Q, demostrar que existe al menos un punto entre P y Q.

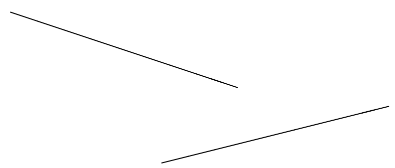
Ejercicio 2.2. Dados tres puntos diferentes en una recta, uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos.

Definición 2.2. Dados dos puntos diferentes A y B, definimos el **segmento** $\overline{AB}$ como el conjunto de los puntos C tales que $C = A$, $C = B$ ó C está entre A y B.

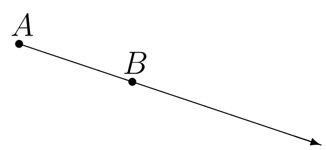


Definición 2.3. Si A y B son dos puntos diferentes, entonces al número AB (la distancia entre A y B) se le llama la **longitud** del segmento $\overline{AB}$ y a los puntos A y B se les llama **extremos** del segmento $\overline{AB}$.

Definición 2.4. Dos segmentos son **congruentes** si tienen la misma longitud.

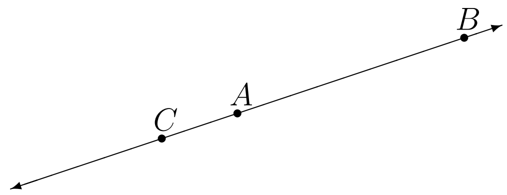


Definición 2.5. Si A y B son dos puntos diferentes, entonces definimos el **rayo** $\overrightarrow{AB}$ como el conjunto de todos los puntos C tales que $C \in \overline{AB}$ ó B está entre A y C.

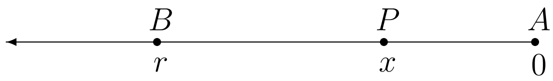


Definición 2.6. Dado un rayo $\overrightarrow{AB}$, al punto A se le llama **extremo** del rayo $\overrightarrow{AB}$.

Definición 2.7. Si A está entre B y C, entonces a los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se les llama **rayos opuestos**.



Teorema 2.2. Teorema de localización de puntos. *Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo y $x > 0$. Existe solamente un punto $P \in \overrightarrow{AB}$, tal que $AP = x$.*



Demostración. Por el postulado de la regla tenemos un sistema de coordenadas en $\overleftrightarrow{AB}$ tal que la coordenada de A es 0 y la de B es un número positivo r. Sea P el punto cuya coordenada es x. Tenemos que $AP = |0 - x| = x$. Veamos ahora que $P \in \overrightarrow{AB}$. Tenemos por la propiedad de tricotomía que:

$$(a) \quad x < r, \qquad (b) \quad x = r \quad \text{ó} \quad (c) \quad x > r.$$

Por el teorema 2.1 y por definición de segmento $\overline{AB}$ tenemos que en los casos (a) y (b) se tiene que $P \in \overline{AB}$ y en el caso (c) se tiene que B está entre A y P, por lo que en general $P \in \overrightarrow{AB}$. Si $P' \in \overrightarrow{AB}$ es diferente de P, entonces su coordenada x' es diferente de x y además por el teorema anterior y definición de rayo, tenemos que $0 \leq x' \leq r$ ó $0 < r < x'$, es decir $x' \geq 0$, por lo que $AP' = |0 - x'| = x' \neq x = AP$, por lo que P es el único punto en $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$. ∎

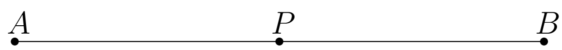
Ejercicio 2.3. Demostrar que si A y B son dos puntos diferentes en una recta l y A' es un punto en una recta l', entonces existe un punto $B' \in l'$ tal que $AB = A'B'$.

Ejercicio 2.4. Demostrar que si A, B y C son tres puntos diferentes en una recta l tales que B está entre A y C, y si A', B' y C' son tres puntos diferentes en una recta l' tales que B' está entre A' y C', y además $AB = A'B'$ y $BC = B'C'$, entonces $AC = A'C'$.

Teorema 2.3. *Sea $\overleftrightarrow{AB}$ una recta en la cual está definido un sistema de coordenadas tal que la coordenada de A es cero y la de B es un* *número positivo. El punto $P \in \overrightarrow{AB}$ si y sólo si la coordenada de P es AP.*

Demostración. Si $P \in \overrightarrow{AB}$, por el teorema 2.1 la coordenada x de P es mayor o igual que 0, por lo que $x = |0 - x| = AP$. Ahora, si la coordenada de P es AP tenemos que P tiene coordenada no negativa por lo que por el teorema 2.1 y definición de rayo $\overrightarrow{AB}$ tenemos que $P \in \overrightarrow{AB}$. ∎

Definición 2.8. Sea $A \neq B$. Decimos que P es el **punto medio** de $\overline{AB}$, si P está entre A y B y $AP = PB$.



Teorema 2.4. Teorema del punto medio. *Todo segmento tiene únicamente un punto medio.*

Demostración. Sea $\overline{AB}$ un segmento. Tomemos como M el punto en $\overrightarrow{AB}$ tal que $AM = \frac{AB}{2}$(esto es posible debido al teorema de localización de puntos). Si tomamos el sistema de coordenadas cuya coordenada de A es 0 la de B es positiva, entonces por el teorema 2.3 la coordenada de M es $\frac{AB}{2}$. Ahora, la distancia entre B y M es $AB - \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2}$, por lo que $AM = MB$, es decir M es un punto medio de $\overline{AB}$. Ahora, si M' es también un punto medio de $\overline{AB}$, entonces debe cumplir las siguientes igualdades

$$AM' + M'B = AB \qquad \text{y} \qquad AM' = M'B,$$

lo que nos lleva a que $AM' = \frac{AB}{2}$ y de acuerdo con el teorema de localización de puntos $P' = P$. Es decir, P es el único punto medio de $\overline{AB}$. ∎

Definición 2.9. Si P es el punto medio de un segmento, decimos que P **biseca** al segmento.

Definición 2.10. Cuando algunos puntos están todos en una misma recta decimos que están **alineados** o que son **colineales**.

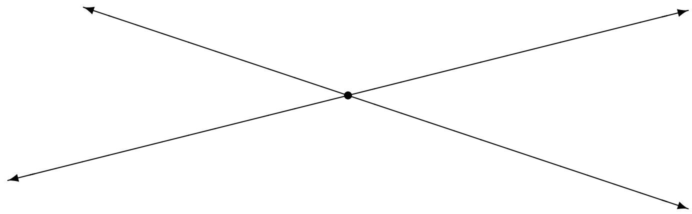
3. Planos

Postulado 3.5.

(i) *A todo plano pertenecen al menos tres puntos diferentes que no están alineados.*

(ii) *Al espacio pertenecen al menos cuatro puntos diferentes que no están en un mismo plano.*

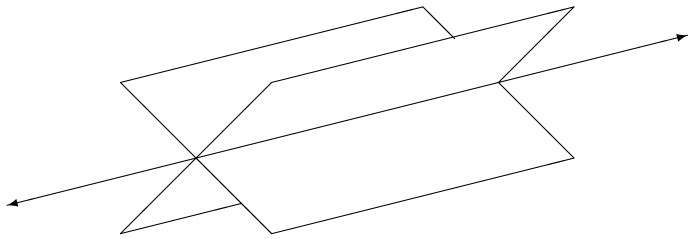
Teorema 3.1. *Si dos rectas diferentes tienen intersección no vacía, entonces la intersección tiene solamente un elemento.*



Demostración. Si la intersección no tiene sólo un elemento, entonces o es vacía (lo cual contradice nuestra hipótesis) o tiene al menos dos elementos diferentes A, B; en cuyo caso por el postulado de la recta, ambas rectas deben ser $\overleftrightarrow{AB}$, lo cual contradice el hecho de que las rectas son diferentes. Por lo tanto la intersección tiene sólo un punto. ∎

Postulado 3.6. Postulado del plano. *Tres puntos cualesquiera están en algún plano y tres puntos cualesquiera no alineados están solamente en un plano.*

Postulado 3.7. Postulado de la intersección de planos. *Si dos planos diferentes se intersecan, entonces su intersección es una recta.*



Teorema 3.2. Teorema de llaneza. *Si dos puntos diferentes de una recta pertenecen a un plano, entonces la recta a la que pertenecen los puntos está incluida en el plano.*

Demostración. Sean A y B dos puntos diferentes en un plano Π, y sea $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Si C no estuviera en Π, entonces, por el postulado del plano, existiría un plano $\Pi_0 \neq \Pi$ tal que $A, B, C \in \Pi_0$, pero por el postulado de la intersección de planos tendríamos que $\Pi \cap \Pi_0$ sería una recta, y debido al postulado de la recta $\Pi \cap \Pi_0 = \overleftrightarrow{AB}$, contradiciendo el hecho de que $C \neq \Pi$. Por lo tanto $C \in \Pi$, es decir $\overleftrightarrow{AB} \subset \Pi$. ∎

Los dos teoremas siguientes se deducen directamente del postulado 3.6 y de los teoremas 3.2 y 1.1. Dejamos al lector los detalles de las demostraciones.

Teorema 3.3. *Dada una recta y un punto que no está en ella, existe solamente un plano al cual pertenece el punto y en el cual la recta está incluida.*

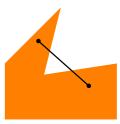
Teorema 3.4. *Dadas dos rectas diferentes que se intersecan, existe un único plano en el cual están incluidas.*

Ejercicio 3.1. Demostrar los teoremas 3.3 y 3.4.

4. Conjuntos Convexos

El concepto de convexidad tiene muchas aplicaciones en diferentes disciplinas como la Economía, Programación Lineal, Investigación de Operaciones y la Teoría de Juegos por mencionar algunas. En esta sección manejaremos tal concepto restringiéndonos al espacio de 3 dimensiones.

Definición 4.1. Un conjunto de puntos se dice que es **convexo** si para cada dos puntos diferentes P y Q del conjunto se tiene que el segmento $\overline{PQ}$ está incluido en el conjunto.



conjunto no convexo

conjunto convexo

Ejercicio 4.1. Demostrar que los planos, rectas, rayos, segmentos e intersecciones de conjuntos convexos son conjuntos convexos.

Postulado 4.8. Postulado de la separación del plano. *Sean l una recta y α un plano en el cual está incluida l. El conjunto de puntos del plano α que no están en la recta l son la unión de dos conjuntos Λ_1 y Λ_2 tales que:*

(i) *Los dos conjuntos Λ_1 y Λ_2 son convexos.*

(ii) *Si $P \in \Lambda_1$ y $Q \in \Lambda_2$, entonces $\overline{PQ}$ interseca a la recta.*

En geometría se suele usar la palabra **cortar** como sinónimo de intersecar.

Definición 4.2. En el postulado de la separación del plano los conjuntos Λ_1 y Λ_2 se llaman **lados** de la recta l. Si $P \in \Lambda_1$ y $Q \in \Lambda_2$, decimos que P y Q están en **lados opuestos** de la recta l, también se dice que Λ_1 y Λ_2 son **lados opuestos** (de una recta). A la recta l se le llama **arista** o **borde** de cada uno de los conjuntos Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 \cup l$ y $\Lambda_2 \cup l$.

Definición 4.3. Si Λ es un lado de una recta l, diremos que los conjuntos de la forma Λ y $\Lambda \cup l$ son **semiplanos**. Para ser más específicos, los conjuntos de la forma Λ se llaman **semiplanos abiertos** y los de la forma $\Lambda \cup l$ se llaman **semiplanos cerrados**.

Ejercicio 4.2. Demostrar que cualquier semiplano cerrado es un conjunto convexo.

Teorema 4.4. *Si Λ_1 y Λ_2 son lados opuestos de una recta l, entonces $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$.*

Demostración. Sean $P \in \Lambda_1$, $Q \in l$ y M el punto medio de $\overline{PQ}$. La recta $\overleftrightarrow{PM}$ corta a l solamente en Q, por lo que $\overline{PM}$ no corta l, pero debido al postulado de la separación del plano $M \in \Lambda_1$ y como $\overline{PM}$ no corta l, entonces $P \notin \Lambda_2$. Por lo tanto $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. ∎

Postulado 4.9. Postulado de la separación del espacio. *Dado un plano γ, el conjunto de puntos del espacio que no están en γ es la unión de dos conjuntos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ tales que:*

(i) *Los dos conjuntos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son convexos.*

(ii) *Si $P \in \mathcal{G}_1$ y $Q \in \mathcal{G}_2$, entonces $\overline{PQ}$ corta al plano γ.*

Definición 4.4. Los dos conjuntos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ descritos en el postulado de la separación del espacio se llaman **lados** del plano γ. Si $P \in \mathcal{G}_1$ y $Q \in \mathcal{G}_2$, decimos que P y Q están en **lados opuestos** del plano γ, también se dice que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son **lados opuestos** (de un plano). Al plano γ se le llama **cara** de cada uno de los conjuntos $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_1 \cup l$ y $\mathcal{G}_2 \cup l$.

Definición 4.5. Si $\mathcal{G}$ es un lado de un plano γ, diremos que los conjuntos de la forma $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \cup \gamma$ son **semiespacios**. Para ser más específicos, los conjuntos de la forma $\mathcal{G}$ se llaman **semiespacios abiertos** y los de la forma $\mathcal{G} \cup \gamma$ se llaman **semiespacios cerrados**.

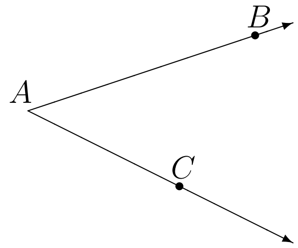
Los conceptos de convexidad se generalizan a espacios de mayor dimensión que 3, introduciendo el concepto de hiperplano, lo cual explica la gran cantidad de aplicaciones que tiene el postulado de la separación del espacio.

Ejercicio 4.3. Demostrar que si A, B y C son tres puntos diferentes y no alineados, y l es una recta incluida en el plano en el cual están A, B y C, tal que la recta l interseca al segmento $\overline{AB}$ en un punto diferente de A y de B, entonces l interseca al segmento $\overline{AC}$ o al segmento $\overline{BC}$.

Ejercicio 4.4. ¿La unión de dos conjuntos convexos es siempre un conjunto convexo?

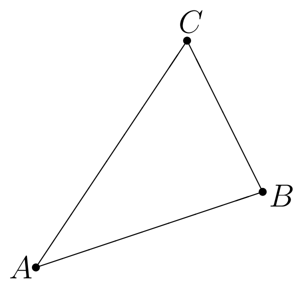
5. Ángulos y Triángulos

Definición 5.1. A la unión de dos rayos de la forma $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que no están incluidos en una misma recta se le llama **ángulo**. Al ángulo que es la unión de dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se le denota indistintamente por $\angle BAC$ o por $\angle CAB$. Al punto A de un ángulo $\angle BAC$ se le llama **vértice** del ángulo y a los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se les llama **lados** del ángulo.



Dado un punto A podemos observar que hay muchos ángulos cuyo vértice es A, sin embargo el símbolo $\angle A$ siempre lo usaremos para que denote algún ángulo cuyo vértice es A.

Definición 5.2. Sean A, B y C tres puntos no alineados. A la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se le llama **triángulo**. A tal triángulo se le denota como $\triangle ABC$. A los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se les llama **lados** y a los puntos A, B y C se les llama **vértices** del triángulo $\triangle ABC$.



Definición 5.3. Sea $\angle ABC$ un ángulo. Definimos el **interior** del $\angle ABC$ como el conjunto de todos los puntos del plano en el cual está incluido el ángulo tales que estén en el mismo lado que C de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y en el mismo lado que A de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Al conjunto de todos los puntos del plano que no están en el ángulo ni en su interior se le llama **exterior** del ángulo.

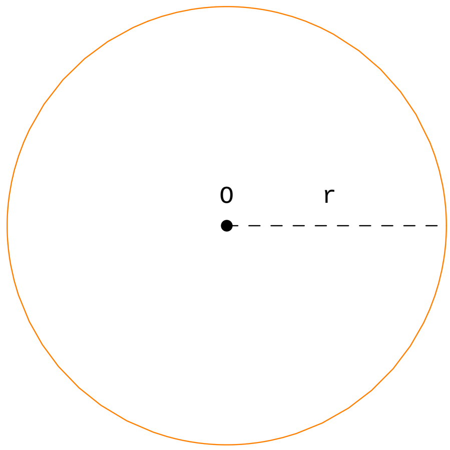
Ahora definiremos lo que es el interior y el exterior de un triángulo.

Definición 5.4. Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Al conjunto de todos los puntos del plano en el cual está incluido el triángulo tales que están en los interiores de los ángulos $\angle ABC$, $\angle BAC$ y $\angle ACB$ se le llama **interior** del $\triangle ABC$. El **exterior** del $\triangle ABC$ es el conjunto de todos los puntos del plano que no están en el triángulo $\triangle ABC$ ni en su interior.

Definición 5.5. A la unión de un triángulo con su interior se le llama **región triangular**. El triángulo será el **borde** de la región triangular y el interior de él también será el **interior** de la región triangular correspondiente.

6. Circunferencias

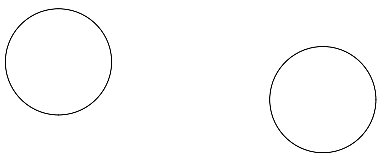
Definición 6.1. Sea O un punto en un plano y r un número positivo. Al conjunto de los puntos del plano que están a una distancia r de O lo llamamos **circunferencia**. Al punto O se le llama **centro** de la circunferencia y al número r se le llama **el radio** de la circunferencia.



circunferencia con centro
en O y radio r

Definición 6.2. Dada una circunferencia en un plano. Al conjunto de los puntos del plano cuya distancia al centro de la circunferencia es menor que el radio se le llama **interior** de la circunferencia. Al conjunto de puntos del plano cuya distancia al centro de la circunferencia es mayor que el radio se le llama **exterior** de la circunferencia. A la unión de una circunferencia con su interior se le llama **región circular** o **círculo**. El **borde** de la región circular es la circunferencia. El **interior** de la región circular es el interior de la circunferencia. Definimos **el diámetro** de la circunferencia (y de la región circular correspondiente) como el doble de su radio.

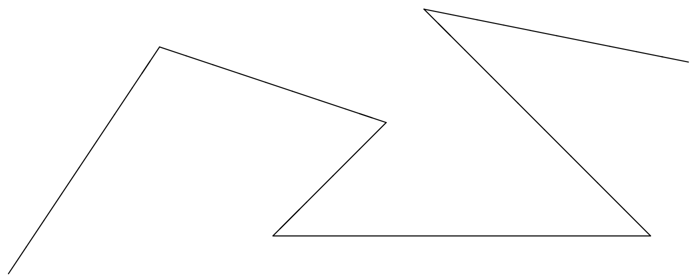
Definición 6.3. Se dice que dos circunferencias son **congruentes** si tienen el mismo radio.



circunferencias congruentes

7. Longitud de Arco

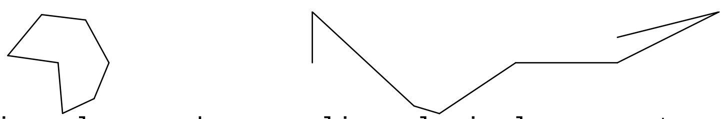
Comenzaremos por definir lo que es una poligonal. Lo que comúnmente se llama 'línea quebrada' en este texto lo llamaremos poligonal.



Más precisamente tenemos la siguiente definición.

Definición 7.1. Sea n un entero positivo y $(P_k)_{k=1}^{n+1}$ una sucesión finita de puntos tales que si $i \neq j$, entonces $\overline{P_iP}_{i+1}$ y $\overline{P_jP}_{j+1}$ no se intersecan más que posiblemente en un punto. A la unión de los segmentos $\overline{P_kP}_{k+1}$ donde $k \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ se le llama **poligonal**. Si $P_1 = P_{n+1}$ diremos que la poligonal es una **poligonal cerrada**. Si $P_1 \neq P_{n+1}$, diremos que los puntos P_1 y P_{n+1} son los **extremos** de la poligonal. Al número $\sum\limits_{k=1}^{n} P_kP_{k+1}$ se le llama la **longitud** de la poligonal. El punto P_j (con $1 < j < n+1$) es un **vértice** de la poligonal si no es extremo y no está entre P_{j-1} y P_{j+1}. En el caso de que la poligonal sea cerrada, el punto P_1 (que es igual a P_{n+1}) es también un **vértice** si no está entre P_n y P_2. Si los puntos P_j y P_{j+1} son vértices o extremos de la poligonal, al segmento $\overline{P_jP}_{j+1}$ lo llamamos **lado** de la poligonal.

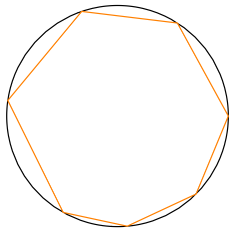
Definición 7.2. Una poligonal en la cual sus vértices son extremos solamente de dos lados y en la cual dos lados diferentes no se cortan más que posiblemente en un extremo común se llama **poligonal simple**.



poligonal cerrada simple

poligonal simple con extremos

Definición 7.3. Decimos que una poligonal cerrada simple está **inscrita** en una circunferencia si sus vértices pertenecen a la circunferencia.



poligonal cerrada inscrita
en una circunferencia

Procedamos ahora a definir la longitud de un circunferencia.

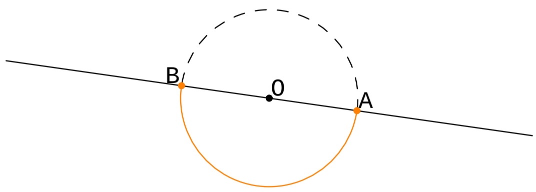
Definición 7.4. Sea c una circunferencia. Cuando exista un número real x tal que $x = \sup\{s : \ s$ es la longitud de alguna poligonal cerrada simple inscrita en c $\}$, a tal número lo llamamos la **longitud** o **perímetro** de la circunferencia c.

Postulado 7.10. *Siempre existe la longitud de cualquier circunferencia dada.*

El postulado anterior nos permite hablar libremente de la longitud de cualquier circunferencia sin preocuparnos de su existencia.

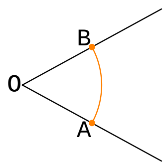
Definamos ahora los conceptos de arcos de circunferencia y sus longitudes.

Definición 7.5. En un plano sea c una circunferencia con centro en O. Sean A y B dos puntos en la circunferencia tales que el punto medio de $\overline{AB}$ es el centro O de la circunferencia y Λ uno de los lados de $\overleftrightarrow{AB}$ en el plano. Al conjunto cuyos elementos son A, B y todos los elementos de c que están en Λ se le llama **semicircunferencia** y los puntos A y B son los **extremos** de la semicircunferencia.

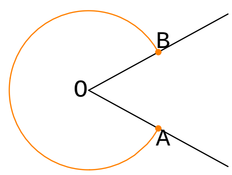


Definición 7.6. Sea c una circunferencia con centro en O. Sean A y B dos puntos en c tales que A, B y O no están alineados. Definimos el **arco menor** de c con **extremos** A y B como el conjunto cuyos elementos son A, B y todos los elementos de c que están en el interior del $\angle AOB$. Asimismo definimos el **arco mayor** de c con **extremos**

A y B como el conjunto cuyos elementos son los puntos A, B y todos los elementos de c que están en el exterior del $\angle AOB$.



arco menor de circunferencia



arco mayor de circunferencia

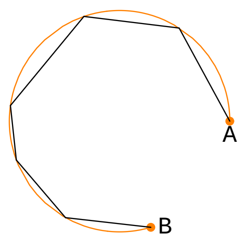
Definición 7.7. Cualquier arco mayor, arco menor o semicircunferencia se llama **arco** de circunferencia. El **centro** de un arco de una circunferencia es el centro de la circunferencia.

El símbolo $\widehat{AB}$ denotará siempre un arco de circunferencia con extremos A y B. Si se quiere ser más específico se usará el símbolo $\widehat{AXB}$ para denotar al arco de circunferencia con extremos A y B donde X es un elemento del arco diferente de A y de B.

Definamos ahora el concepto de longitud de arco de circunferencia.

Definición 7.8. Sea $\widehat{AB}$ un arco de circunferencia. Definimos la longitud del arco $\widehat{AB}$ como

$$\ell\widehat{AB} := \sup\{s : s \text{ es la longitud de una poligonal simple con extremos } A \text{ y } B, \text{ cuyos vértices están en el arco } \widehat{AB}\}.$$



Debido al axioma del supremo y del postulado 7.10 el valor de $\ell\widehat{AB}$ siempre existe pues la longitud de cualquier poligonal simple cuyos vértices están en la circunferencia de la cual $\widehat{AB}$ es subconjunto, está acotada superiormente por la longitud de la circunferencia.

Teorema 7.1. *Todo arco de circunferencia tiene una longitud mayor que cero.*

Demostración. Si $\widehat{AB}$ es un arco de circunferencia, entonces por definición su longitud debe ser mayor o igual que AB. ∎

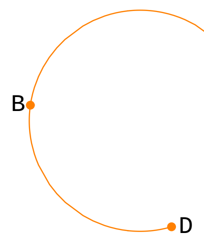
Postulado 7.11. Postulado de adición de arcos. *Sea c una circunferencia cuya longitud es x.*

(i) *Si $\widehat{AB}$ es una semicircunferencia incluida en c, entonces*

$$\ell\widehat{AB} = \tfrac{x}{2}.$$

(ii) *Si $\widehat{AB}$ y $\widehat{BD}$ son dos arcos diferentes incluidos en c cuya intersección es $\{B\}$ y cuya unión es un arco $\widehat{AD}$ incluido en c, entonces*

$$\ell\widehat{AD} = \ell\widehat{AB} + \ell\widehat{BD}.$$



Postulado 7.12. *Todas las circunferencias de radio 1 tienen la misma longitud.*

Definición 7.9. Definimos el número π (léase pi) como la mitad de la longitud de cualquier circunferencia de radio 1. Es decir, π es la longitud de una semicircunferencia incluida en una circunferencia de radio 1.

Con los postulados y herramientas adquiridos hasta ahora no tenemos forma de calcular explícitamente el valor de π. Seguramente el lector ha oído hablar de tal número, incluso debe conocer sus valores aproximados:

$$\pi \approx 3.14 \qquad \text{ó} \qquad \pi \approx 3.14159265.$$

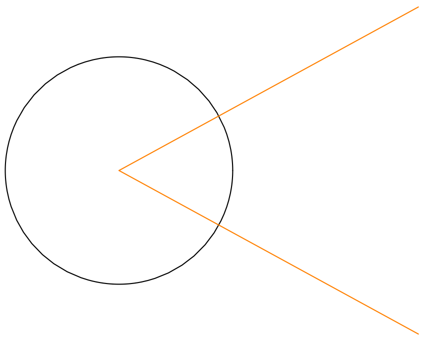
El número π es un número irracional. Para demostrar esto y para hacer cálculos tan aproximados como queramos de π es necesario que avancemos más en el estudio de las matemáticas. Los antiguos griegos y egipcios ya habían hecho mediciones empíricas sobre tal valor.

Arquímedes de Siracusa

8. Medidas de Ángulos

Para definir el concepto de medida de un ángulo se utilizarán los resultados de la sección 7.

Definición 8.1. Un **ángulo central** de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.



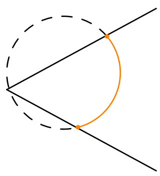
ángulo central de la circunferencia

Definición 8.2. Decimos que un ángulo **intercepta** un arco si:

(i) los extremos del arco están en el ángulo.

(ii) todos los otros puntos del arco están en el interior del ángulo, y

(iii) a cada lado del ángulo pertenece un extremo del arco.

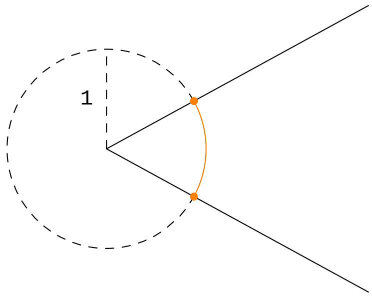


Definición 8.3. El arco menor $\widehat{AB}$ **corresponde** al ángulo $\angle DOC$ si:

(i) el arco $\widehat{AB}$ está incluido en una circunferencia de radio 1,

(ii) el ángulo $\angle DOC$ es un ángulo central de tal circunferencia, y

(iii) el ángulo $\angle DOC$ intercepta al arco $\widehat{AB}$.



Definición 8.4. Dos arcos incluidos en circunferencias congruentes son **congruentes** si tienen la misma longitud.

Definición 8.5. La **medida** de un ángulo $\angle DOC$, denotada $|\angle DOC|$ ó $\measuredangle DOC$ es la longitud de su arco correspondiente.

Muchos autores llaman ángulo a lo que nosotros llamamos medida del ángulo, otros (desafortunadamente) llaman ángulo indistintamente a lo que nosotros llamamos ángulo y a lo que llamamos medida del ángulo y utilizan la notación $\angle DOC$ tanto para denotar lo que para nosotros es $\angle DOC$ como para denotar $\measuredangle DOC$. Si bien es cierto que son conceptos muy relacionados, son cosas diferentes (uno es un conjunto de puntos y el otro es un número). En este libro haremos siempre la diferencia entre lo que definimos como ángulo y su medida, sin embargo el lector debe ser capaz de comprender y adaptarse a la terminología de otros textos, aunque es deseable que tales textos conserven una estructura lógica que no sea contradictoria.

Observemos que así como medimos segmentos con una regla que es imitación de una recta, también medimos ángulos con un transportador que es una semicircunferencia (o en algunos casos la circunferencia completa). El transportador es una imitación de una circunferencia graduada de radio 1 que mide un ángulo por medio de su arco correspondiente. Usualmente se toma la medición de los ángulos en grados. Definamos pues lo que es un grado.

Definición 8.6. Un **grado** está definido como $\frac{\pi}{180}$. Es decir, $\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi/2}{90} = \frac{\pi/3}{60} = \frac{\pi/6}{30} = \frac{\pi/4}{45}$ es un grado, lo cual significa que

$\pi = 180$ grados,

$2\pi = 360$ grados,

$\frac{\pi}{2} = 90$ grados,

$\frac{\pi}{3} = 60$ grados,

$\frac{\pi}{6} = 30$ grados y

$\frac{\pi}{4} = 45$ grados.

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x°$ denota x grados, así por ejemplo $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$ y $\frac{\pi}{180} = 1°$.

Teorema 8.1. *La medida de un ángulo es un número real mayor que 0 y menor que π.*

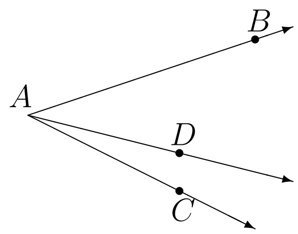
Demostración. Del teorema 7.1 y la definición de medida de ángulo se deduce que la medida de un ángulo es mayor que 0. Sea $\angle ABC$ un ángulo. Por el teorema de localización de puntos podemos tomar $A' \in \overrightarrow{BA}$, $C' \in \overrightarrow{BC}$ y D en el rayo opuesto a $\overrightarrow{BA}$ tales que $BA' = BC' = BD = 1$. Sean ahora $\widehat{A'C'}$ y $\widehat{C'D}$ los arcos correspondientes a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CBD$ respectivamente. Como $(\widehat{A'C'}) \cup (\widehat{C'D})$ es una semicircunferencia de radio 1, por el postulado de adición de arcos y la defininción de π tenemos que

$$\measuredangle ABC = \ell\widehat{A'C'} = \ell((\widehat{A'C'}) \cup (\widehat{C'D})) - \ell\widehat{C'D} = \pi - \ell\widehat{C'D}.$$

Pero como $\ell\widehat{C'D} > 0$, tenemos que $\measuredangle ABC < \pi$. ∎

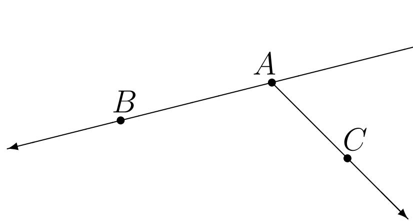
Postulado 8.13. Postulado de construcción de ángulos. *Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo incluido en la arista de un semiplano Λ. Para cada número r entre 0 y π existe únicamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con $P \in \Lambda$, tal que $\measuredangle PAB = r$.*

Teorema 8.2. Teorema de adición de ángulos. *Si D está en el interior del $\angle BAC$, entonces $\measuredangle BAC = \measuredangle BAD + \measuredangle DAC$.*



Demostración. La demostración se sigue inmediatamente del postulado de adición de arcos y de la definición de medida de ángulo. ∎

Definición 8.7. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos, y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo decimos que los ángulos $\angle BAC$ y $\angle CAD$ **forman un par lineal**.



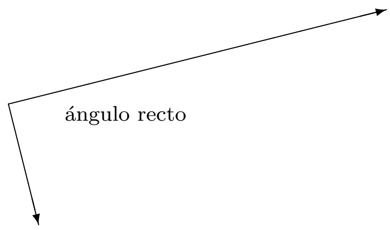
Definición 8.8. Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es π. Además se dice que uno es **suplemento** del otro.

Definición 8.9. Dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es $\frac{\pi}{2}$. Además se dice que uno es **complemento** del otro.

Teorema 8.3. Teorema del suplemento o del par lineal. *Si dos ángulos forman un par lineal entonces son suplementarios.*

Demostración. Al igual que en el teorema 8.2 la demostración se sigue del postulado de adición de arcos. ∎

Definición 8.10. Un **ángulo recto** es un ángulo cuya medida es $\frac{\pi}{2}$, es decir cuya medida es de $90°$.



Definición 8.11. Si $\angle BAC$ es recto, entonces decimos que los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son **perpendiculares** (en A) y a tal hecho lo denotamos como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. De manera más general, si l_1 es una recta, rayo o segmento tal que $A \in l_1 \subset \overleftrightarrow{AB}$ y l_2 es una recta, rayo o segmento tal que $A \in l_2 \subset \overleftrightarrow{AC}$, entonces decimos que l_1 es **perpendicular** a l_2 o que l_1 y l_2 son **perpendiculares** y lo denotamos como $l_1 \perp l_2$.

Definición 8.12. Dos ángulos que tienen la misma medida se dice que son **congruentes**, también se dice que uno es **congruente** con el otro.

Observemos que estrictamente hablando no es lo mismo que dos ángulos sean congruentes a que sean iguales. Podemos tener dos ángulos diferentes que tengan la misma medida (vistos éstos como la unión de dos rayos). Al igual que hacemos la distinción entre el concepto de ángulo y el de medida de ángulo, también haremos la distinción entre congruencia e igualdad de ángulos.

Denotaremos al hecho de que dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ sean congruentes como

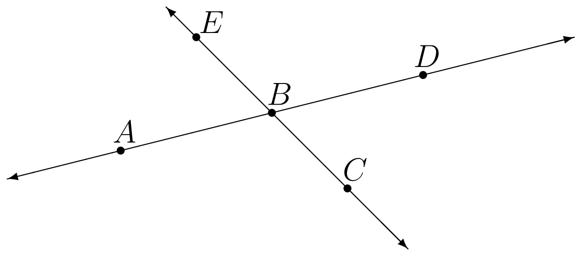
$$\angle ABC \cong \angle DEF,$$

lo cual significa

$$\measuredangle ABC = \measuredangle DEF.$$

Podemos ver que la relación de congruencia es una relación de equivalencia, es decir es reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición 8.13. Dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBE$ son **opuestos por el vértice** si $\overrightarrow{BD}$ es opuesto a un lado de $\angle ABC$ y el otro lado de $\angle DBE$ es opuesto al otro lado de $\angle ABC$.



Teorema 8.4. Teorema de los ángulos opuestos por el vértice. *Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

Demostración. Sean $\angle CBD$ y $\angle ABE$ dos ángulos opuestos por el vértice, sin pérdida de generalidad supongamos que $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BD}$ son opuestos, y $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BE}$ son opuestos. Por el teorema del suplemento tenemos que

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CBD = \pi$$
$$\measuredangle ABC + \measuredangle ABE = \pi,$$

de donde $\measuredangle CBE = \pi - \measuredangle ABC = \measuredangle ABE$, por lo que los ángulos opuestos por el vértice $\angle CBD$ y $\angle ABE$ son congruentes. ∎

Ejercicio 8.1. Demostrar el siguiente teorema: *Si la unión de dos rectas que se cortan incluye un ángulo recto, entonces incluye a cuatro ángulos rectos.*

9. Congruencia de Triángulos

Supongamos que tenemos los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ y asignamos las siguientes biyecciones entre los vértices de $\triangle ABC$ y los de $\triangle DEF$ de la siguiente forma

$$A \mapsto D,$$
$$B \mapsto E \text{ y}$$
$$C \mapsto F.$$

A tal biyección le llamaremos **correspondencia** entre los ángulos de ambos triángulos determinada por

$$ABC \longleftrightarrow DEF.$$

Similarmente $ABC \longleftrightarrow DEF$ define una biyección entre los lados del $\triangle ABC$ y los del $\triangle DEF$ de la forma

$$\overline{AB} \mapsto \overline{DE},$$

$$\overline{BC} \mapsto \overline{EF} \text{ y}$$
$$\overline{AC} \mapsto \overline{DF};$$

a la cual llamaremos **correspondencia** entre lados. Así decimos por ejemplo que A y D son **correspondientes**, los ángulos $\angle CAB$ y $\angle FDE$ son **correspondientes** y que los lados $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ son **correspondientes** de acuerdo a la correspondencia

$$ABC \longleftrightarrow DEF.$$

Definición 9.1. Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$. Decimos que la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ es una **congruencia** si cualesquiera dos ángulos correspondientes son congruentes y cualesquiera dos lados correspondientes son congruentes. Más precisamente $ABC \longleftrightarrow DEF$ es una congruencia si

$$\angle BAC \cong \angle EDF, \qquad \angle ABC \cong \angle DEF, \qquad \angle ACB \cong \angle DFE$$

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \qquad \overline{BC} \cong \overline{EF} \qquad \text{y} \qquad \overline{AC} \cong \overline{DF}.$$

Al hecho de que $ABC \longleftrightarrow DEF$ sea una congruencia lo denotamos así

$$ABC \cong DEF.$$

Definición 9.2. Decimos que dos triángulos t_1 y t_2 son **congruentes** (denotado $t_1 \cong t_2$) si existe una correspondencia entre los vértices del primero y del segundo que sea una congruencia.

Definición 9.3. Decimos que un lado de un triángulo está **comprendido** por los ángulos cuyos vértices son extremos del lado. Un ángulo de un triángulo está **comprendido** por los lados del triángulo que tienen como extremo común al vértice del ángulo. Por ejemplo, en un $\triangle ABC$, el ángulo $\angle ABC$ está comprendido por $\overline{AB}$ y por $\overline{BC}$, y el lado $\overline{AB}$ está comprendido por $\angle BAC$ y por $\angle ABC$.

Definición 9.4. En un triángulo, si un ángulo dado está comprendido por dos lados, al otro lado se le llama **lado opuesto** al ángulo dado. Similarmente, si un lado dado está comprendido por dos ángulos, al otro ángulo se le llama **ángulo opuesto** al lado dado. Por ejemplo en el $\triangle ABC$, $\overline{AC}$ es el lado opuesto a $\angle ABC$ y el lado $\overline{AB}$ es opuesto al ángulo $\angle ACB$. Un ángulo y un lado de un triángulo que no son opuestos se dice que son **adyacentes** o que uno es **adyacente** al otro.

Se definirá a continuación el significado general de que dos subconjuntos del espacio sean congruentes.

Definición 9.5. Dos subconjuntos del espacio S_1 y S_2 son **congruentes** si existe una correspondencia biunívoca $f : S_1 \longrightarrow S_2$ entre S_1 y S_2 tal que para cualesquiera dos puntos P y Q de S_1 se tiene que la distancia entre P y Q es igual a la distancia entre $f(P)$ y $f(Q)$. A una correspondencia como la anterior se le llama **isometría**. Al hecho de que S_1 y S_2 sean congruentes se le denota así

$$S_1 \cong S_2.$$

Observemos que esta definición de congruencia es una generalización de las otras definiciones de congruencia dadas anteriormente para segmentos, círculos, arcos, ángulos y triángulos.

10. Postulados y Teoremas de Congruencia de Triángulos

Tenemos a continuación los siguientes tipos de correspondencias.

Definición 10.1. Dada una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia **lado-ángulo-lado** o abreviadamente **LAL** si dos lados del $\triangle ABC$ y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes con las partes correspondientes del $\triangle DEF$.

Definición 10.2. Dada una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia **ángulo-lado-ángulo** o abreviadamente **ALA** si dos ángulos del $\triangle ABC$ y el lado comprendido entre ellos son congruentes con las partes correspondientes del $\triangle DEF$.

Definición 10.3. Dada una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia **lado-lado-lado** o abreviadamente **LLL** si los lados correspondientes son congruentes.

Con estas definiciones estamos listos para enunciar los siguientes postulados y teoremas fundamentales de la trigonometría.

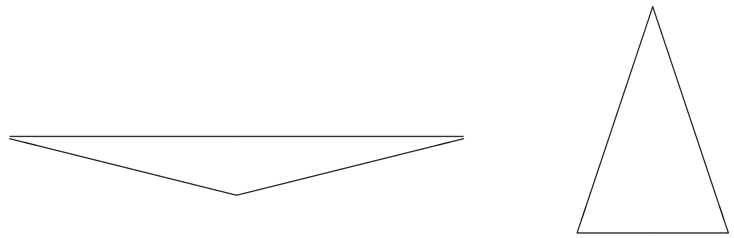
Postulado 10.14. Postulado LAL. *Toda correspondencia LAL es una congruencia.*

Teorema 10.1. Teorema ALA. *Toda correspondencia ALA es una congruencia.*

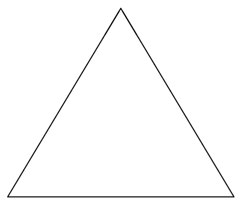
Demostración. Sea $ABC \longleftrightarrow DEF$ una correspondencia ALA. Por el teorema de localización de puntos, existe un punto $G \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AG = DE$. Ahora, por el postulado LAL tenemos que $AGC \cong DEF$, por lo que $\measuredangle ACG = \measuredangle DFE$, pero $\measuredangle DFE = \measuredangle ACB$, por lo que $\measuredangle ACB = \measuredangle ACG$. Ahora, B y G están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ por lo que debido al postulado de construcción de ángulos tenemos que $\angle ACB = \angle ACG$, es decir $G \in \overrightarrow{CB}$, pero como también $G \in \overrightarrow{AB}$ tenemos, debido a que si dos rectas diferentes se intersecan su intersección tiene solamente un elemento (teorema 3.1), obteniéndose así que $G = B$, pero como $AGC \cong DEF$, entonces $ABC \cong DEF$, lo cual demuestra el teorema. ∎

Definición 10.4. Un triángulo es **escaleno** si ninguno de sus lados es congruente con otro de sus lados.

Definición 10.5. Un triángulo es **isósceles** si al menos dos de sus lados son congruentes.



Definición 10.6. Un triángulo es **equilátero** si sus tres lados son congruentes.



Teorema 10.2. Teorema del triángulo isósceles. *Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a éstos son congruentes. Es decir, en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $AB = BC$. La correspondencia $ABC \longleftrightarrow CBA$ es una correspondencia LAL por lo que es una congruencia, por lo tanto$\angle BAC \cong \angle BCA$, pero $\angle BAC$ y $\angle BCA$ son los ángulos opuestos a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. ∎

Del teorema del triángulo isósceles se deduce directamente el siguiente corolario.

Corolario 10.2.1. Corolario del triángulo equilátero. *Todo triángulo equilátero tiene sus tres ángulos congruentes.*

Teorema 10.3. Recíproco del teorema del triángulo isósceles. *Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes.*

Demostración. La demostración de este teorema es similar a la anterior pero usando el teorema ALA. ∎

Como consecuencia del teorema 10.3 tenemos.

Corolario 10.3.1. *Todo triángulo que tiene todos sus ángulos congruentes es equilátero.*

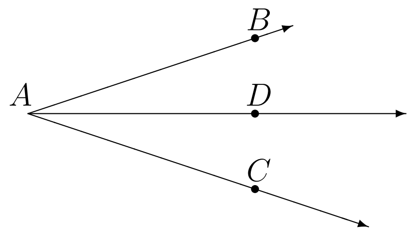
Teorema 10.4. Teorema LLL. *Toda correspondencia LLL es una congruencia.*

Demostración. Sea $ABC \longleftrightarrow DEF$ una correspondencia LLL. Por localización de puntos y por construcción de ángulos existe un único punto G en el lado de $\overleftrightarrow{AC}$ opuesto al lado en el cual está B tal que $\angle CAB \cong \angle EDF$ y tal que $AG = DF$. Por LAL se tiene que $AGC \cong DEF$. Ahora, como $FE = CG$ y $FE = CB$, tenemos que $CB = CG$, análogamente tenemos que $AB = AG$, por lo que debido al teorema del triángulo isósceles tenemos que $\angle ABG \cong \angle AGB$ y $\angle CBG \cong \angle CGB$. Ahora, por adición de ángulos tenemos que $\angle ABC \cong \angle AGB$ de donde por LAL se tiene que $ABC \cong AGC$ y por transitividad $ABC \cong DEF$, lo cual demuestra el teorema. ■

Con definiciones similares se puede ver que correspondencias del tipo AAA ó LLA pueden no ser congruencias aunque posteriormente veremos (teorema 12.2) que las correspondencias del tipo LAA sí son congruencias.

Un ejemplo donde se utiliza el teorema LLL es en la demostración del teorema de la bisectriz. Definamos antes lo que es una bisectriz.

Definición 10.7. Si D está en el interior del $\angle BAC$ y $\angle BAD \cong \angle CAD$, entonces el rayo $\overrightarrow{AD}$ **biseca** al $\angle BAC$ y se llama la **bisectriz** del $\angle BAC$.



Teorema 10.5. Teorema de la bisectriz. *Todo ángulo tiene solamente una bisectriz.*

Demostración. Sean $\angle BAC$ un ángulo, $B' \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AB' = AC$ y D el punto medio de $\overline{B'C}$. Por el teorema LLL $ADC \longleftrightarrow ADB'$ es una congruencia y los ángulos $\angle B'AD$ y $\angle CAD$ son correspondientes por lo tanto son congruentes, pero $\angle B'AD = \angle BAD$, por lo que $\angle BAD \cong \angle CAD$, es decir $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz de $\angle BAC$. Demostremos ahora que $\overrightarrow{AD}$ es el único rayo que biseca a $\angle BAC$. Sea $\overrightarrow{AD'}$ un rayo que biseca a $\angle BAC$ y veamos que D' debe estar en el interior del $\angle BAC$. Si D' y

C están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, entonces por el teorema de adición de ángulos $\measuredangle CAD' > \measuredangle BAD'$ por lo que $\overrightarrow{AD'}$ no sería bisectriz del $\angle BAC$. Análogamente D' y B están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$, por lo tanto D' está en el interior del $\angle BAC$. Ahora, por el teorema de adición de ángulos y por ser $\overrightarrow{AD'}$ bisectriz del $\angle BAC$, tenemos que $\measuredangle BAD' = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$. Pero el postulado de construcción de ángulos garantiza que solamente hay un rayo $\overrightarrow{AD'}$con D' del mismo lado que C de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\measuredangle BAD' = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$, por lo que la bisectriz es única. ∎

Teorema 10.6. *Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo diferentes del extremo están en el interior del ángulo.*

Demostración. Sea $\angle ABC$ un ángulo y $\overrightarrow{BD}$ su bisectriz con D en el interior de $\angle ABC$. Si $E \in \overrightarrow{BD}$ y $E \neq B$, entonces E y D están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ ya que el único punto de $\overleftrightarrow{ED}$ que corta a $\overleftrightarrow{AB}$ es B y $B \notin \overline{ED}$. Análogamente E y D están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, por lo que E está en el interior de $\angle ABC$. ∎

11. Perpendicularidad

En esta sección estudiaremos algunos resultados relacionados con el concepto de perpendicularidad.

Teorema 11.1. *En un plano, dada una recta l y $Q \in l$. Existe solamente una recta l' tal que $l \perp l'$ y $Q \in l'$.*

Demostración. La existencia de l' es consecuencia del postulado de construcción de ángulos y la unicidad es consecuencia del teorema del suplemento. Dejamos al lector los detalles de la demostración. ∎

Lema 11.1. *Dada una recta l y un punto $Q \notin l$. Existe una recta l' perpendicular a l tal que $Q \in l'$.*

Demostración. Sea $P \in l$. Si $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$, tomamos $l' = \overleftrightarrow{PQ}$ y se cumple la conclusión.

Supongamos que $\overleftrightarrow{PQ}$ no es perpendicular a l. Sea $S \in l$ tal que $S \neq P$. Por el postulado de construcción de ángulos, sea R' un punto tal que Q y R' están en lados opuestos de l y tal que $\measuredangle SPR' = \measuredangle SPQ$. Por el teorema de localización de puntos podemos tomar ahora un punto $R \in \overrightarrow{PR'}$ tal que $PR = PQ$. Sea finalmente $T \in l$ tal que $T \in \overline{RQ}$ (esto es posible debido al postulado de separación del plano).

Con esta construcción tenemos que $QPS \longleftrightarrow RPS$ es una correspondencia LAL por lo que $QS = RS$ y $\angle QSP \cong \angle RSP$. Observemos que si $\angle QTS \cong \angle RTS$, entonces por el teorema del suplemento $\overleftrightarrow{QT} \perp l$ y es suficiente con tomar $l' = \overleftrightarrow{QT}$. Si $S = T$, entonces $\angle QTS \cong \angle RTS$. Si $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{ST}$, entonces $\angle QST \cong \angle RST$ por lo que debido al postulado LAL tenemos $RST \cong QST$, de donde $\angle QTS \cong \angle RTS$. Finalmente si $\overrightarrow{ST}$ y $\overrightarrow{SP}$ son rayos opuestos, entonces $\angle QST \cong \angle RST$ debido a que son suplementos de ángulos congruentes y de nuevo se tiene $RST \cong QST$, de donde $\angle QTS \cong \angle RTS$. ∎

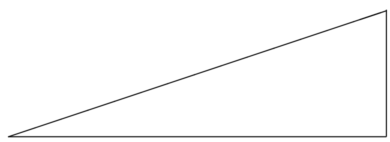
Teorema 11.2. *Dada una recta l y un punto Q que no está en ella. Existe solamente una recta l' perpendicular a l tal que $Q \in l'$.*

Demostración. Por el lema anterior existe un punto P en l tal que $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$. Supongamos que exista una recta h a la cual pertenezca Q tal que $h \perp l$ y $h \neq \overleftrightarrow{PQ}$. Sea $R \in h \cap l$ y S un punto en el rayo opuesto a $\overrightarrow{PQ}$ tal que $PS = PQ$. Por el teorema del suplemento se tiene que $QPR \longleftrightarrow SPR$ es una correspondencia LAL, por lo que $\measuredangle SRP = 90°$. Pero debido al teorema 11.1 $\overleftrightarrow{QR} = \overleftrightarrow{SR}$, es decir $Q, S \in h$, contradiciendo al postulado de la recta, por lo que no existe ninguna recta h a la cual pertenezca Q tal que $h \perp l$ y $h \neq \overleftrightarrow{PQ}$. Luego $\overleftrightarrow{PQ}$ es la única recta perpendicular a l a la cual pertenece Q. ∎

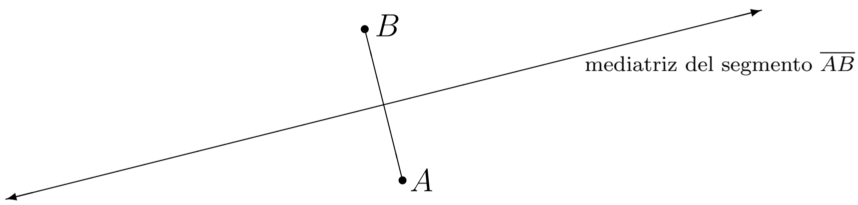
Corolario 11.2.1. *Ningún triángulo tiene dos ángulos rectos diferentes. Es decir si un ángulo de un triángulo es recto, entonces los otros dos no son rectos.*

Demostración. Si un triángulo tuviera dos ángulos rectos diferentes, entonces el vértice del otro ángulo estaría en dos rectas diferentes, ambas perpendiculares al lado comprendido entre los ángulos rectos y por lo tanto también a la recta que incluye a tal lado, lo que contradice al teorema 11.2. ∎

Definición 11.1. Un **triángulo rectángulo** es un triángulo en el cual uno de sus ángulos es recto.



Definición 11.2. Una **mediatriz** de un segmento es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.



Teorema 11.3. Teorema de la mediatriz. *Si un segmento está incluido en un plano, entonces la mediatriz del segmento que está incluida en el plano es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de los extremos del segmento. Es decir, en un plano* Π*, si* l *es la mediatriz de un segmento* $\overline{AB}$*, entonces* $l = \{P \in \Pi \ : \ PA = PB\}$.

Demostración. En un plano sea M el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y l su mediatriz. Si $P \in l$, entonces $AMP \longleftrightarrow BMP$ es una correspondencia LAL por lo que $PA = PB$. Por otro lado si P es un punto en el plano tal que $PA = PB$, entonces $AMP \longleftrightarrow BMP$ es una correspondencia LLL por lo que debido al teorema LLL y al teorema del suplemento $P \in l$. ∎

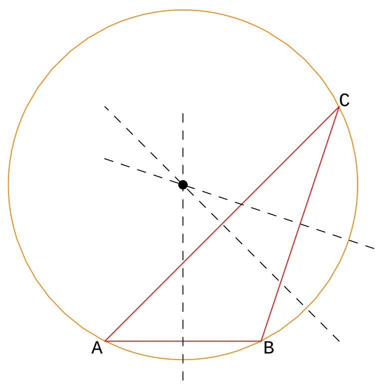
Corolario 11.3.1. *Dados un segmento $\overline{AB}$ y una recta l incluidos en un plano. Si dos puntos diferentes de l están a la misma distancia de los extremos A y B, entonces l es la mediatriz de $\overline{AB}$.*

Demostración. Por el teorema de la mediatriz los dos puntos de l que están a la misma distancia de A y de B están en la mediatriz, pero l es la única recta a la que pertenecen estos dos puntos diferentes, por lo tanto l es la mediatriz. ∎

El siguiente corolario es un resultado muy interesante cuya demostración dejaremos como ejercicio para el lector.

Corolario 11.3.2. *Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto común, el cual es el centro de la única circunferencia a la que pertenecen los tres vértices del triángulo.*

Definición 11.3. La circunferencia a la cual pertenecen los vértices de un $\triangle ABC$ se dice que está **circunscrita** en el triángulo. Al centro de tal circunferencia se le llama **circuncentro** del $\triangle ABC$.



Observemos que por el corolario anterior se concluye que el circuncentro de un triángulo es el punto de intersección de las mediatrices de los lados.

Definición 11.4. Sean P un punto, l una recta y l' una recta perpendicular a l tal que $P \in l'$. La **proyección** de P en l es el punto Q, tal que $Q \in l \cap l'$. La **proyección** de un subconjunto $\mathcal{A}$ del espacio en una recta es el conjunto formado por las proyecciones en la recta de todos los elementos de $\mathcal{A}$.

Definición 11.5. Una recta dada y un plano son **perpendiculares** si se intersecan y además toda recta en el plano que pasa por el punto de intersección es perpendicular a la recta dada. Cuando una recta l y un plano Π son perpendiculares escribimos $l \perp \Pi$.

Lema 11.2. *Si B, C, P y Q son cuatro puntos diferentes tales que $PB = QB$, $PC = QC$ y X es un punto entre B y C, entonces $PX = QX$.*

Demostración. Por el teorema LLL tenemos que $PBC \cong QBC$, por lo que $\angle PBX \cong \angle QBX$, de donde por el postulado LAL $PBX \cong QBX$ y así $PX = QX$. ∎

Teorema 11.4. *Si una recta l es perpendicular a dos rectas diferentes l_1 y l_2 que se intersecan, entonces l es perpendicular al plano que incluye a las dos rectas l_1 y l_2.*

Demostración. Sean l_1 y l_2 dos rectas incluidas en un plano Π tales que $l_1 \cap l_2 = \{A\}$, l una recta perpendicular a l_1 y l_2, $P, Q \in l$ tales que A es el punto medio de $\overline{PQ}$ y l_3 una recta incluida en Π a la cual pertenece A. Tomemos $B \in l_1$ y $C \in l_2$ tales que estén en lados opuestos de l_3 y sea X el punto en l_3 que está entre B y C.

Como l_1 y l_2 son mediatrices de $\overline{PQ}$, por el teorema de la mediatriz $PB = QB$ y $PC = QC$. Ahora por el lema 11.2 $PX = QX$, pero como $PA = QA$, entonces debido al corolario 11.3.1 l_3 también es mediatriz de l, de donde $l \perp l_3$, por lo tanto $l \perp \Pi$. ∎

Teorema 11.5. *Sea l una recta y $P \in l$. Existe un plano Π tal que $l \perp \Pi$ y $P \in \Pi$.*

Demostración. Sean Q un punto que no está en l, Λ el plano al cual pertenece Q que incluye a l, R un punto que no está en Λ y Γ el plano al cual pertenece R que incluye a l.

Sabemos que $\Lambda \cap \Gamma = l$ y que existen dos únicas rectas l_1 y l_2 tales que $l_1 \subset \Lambda$, $l_1 \perp l$, $l_2 \subset \Gamma$, $l_2 \perp l$ y $P \in l_1 \cap l_2$. Pero como $l_1 \neq l_2$ tenemos que el plano Π que incluye a ambas rectas y la recta l son perpendiculares, además $P \in \Pi$. ∎

Teorema 11.6. *Si una recta dada y un plano son perpendiculares, entonces el plano incluye a toda recta perpendicular a la recta dada en su punto de intersección.*

Demostración. Sean l y Π una recta y un plano perpendiculares, $P \in l \cap \Pi$, l_1 una recta perpendicular a l en P y Γ el plano que incluye a l_1 y l.

Demostraremos que $l_1 \subset \Pi$. La recta $\Gamma \cap \Pi$ es perpendicular a l en P, pero solamente existe una recta incluida en Γ que sea perpendicular a l en P, por lo que $l_1 = \Gamma \cap \Pi \subset \Pi$. ∎

De los teoremas 11.5 y 11.6 se concluye el siguiente teorema.

Teorema 11.7. *Dados una recta y un punto en la recta, existe solamente un plano perpendicular a la recta al cual pertenece el punto.*

Teorema 11.8. *Sea Π un plano y $P \in \Pi$. Existe una única recta l tal que $P \in l$ y $l \perp \Pi$.*

Demostración. Sea Q un punto que no esté en Π y $R \in \Pi$ diferente de P. Por el teorema 11.1, el plano que incluye al $\triangle PQR$ incluye a una única recta $l_1 \perp \overleftrightarrow{PR}$ con $P \in l_1$ y existe una única recta l_2 incluida en Π tal que $P \in l_2$ y $l_2 \perp \overleftrightarrow{PR}$. Ahora, el plano que incluye a l_1 y l_2 incluye a una única recta l tal que $P \in l$ y $l \perp l_2$. Como l_1 y l_2 son perpendiculares a $\overleftrightarrow{PR}$, debido al teorema 11.4 tenemos que $l \perp \overleftrightarrow{PR}$. Ahora, como $l \perp l_2$ y $l \perp \overleftrightarrow{PR}$ tenemos por el teorema 11.4 que $l \perp \Pi$.

Para ver que l es la única recta tal que $P \in l$ y $l \perp \Pi$, observemos que si existiera una recta l' diferente de l tal que $P \in l'$ y $l' \perp \Pi$, entonces, por los teoremas 11.4 y 1.7, el plano Π' que incluye a l y l' incluiría también a la recta l_2 que pasa por P, es decir tendríamos que $l, l', l_2 \subset \Pi'$, $P \in l \cap l' \cap l_2$, $l \perp l_2$ y $l' \perp l_2$, contradiciendo al teorema 11.1. ∎

Ejercicio 11.1. Demostrar el corolario 11.3.2.

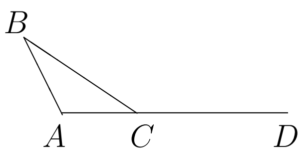
12. Desigualdades Geométricas

En esta sección se estudiarán algunos teoremas muy importantes, como son el primer teorema de la distancia mínima, el del ángulo externo y la desigualdad del triángulo. Comencemos con algunas definiciones.

DEFINICIÓN 12.1. Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, decimos que el segmento $\overline{AB}$ es **mayor que** el segmento $\overline{CD}$, denotado $\overline{AB} > \overline{CD}$, si $AB > CD$. Si $\overline{AB} > \overline{CD}$ también decimos que $\overline{CD}$ es **menor que** $\overline{AB}$ y lo denotamos como $\overline{CD} < \overline{AB}$.

DEFINICIÓN 12.2. Dados dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$, decimos que $\angle ABC$ es **mayor que** $\angle DEF$, denotado $\angle ABC > \angle DEF$ si $\measuredangle ABC > \measuredangle DEF$. Si $\angle ABC > \angle DEF$ también decimos que el ángulo $\angle DEF$ es **menor que** el ángulo $\angle ABC$ y lo denotamos así $\angle DEF < \angle ABC$.

DEFINICIÓN 12.3. En un triángulo $\triangle ABC$ si $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CD}$ son rayos opuestos, decimos que el ángulo $\angle BCD$ es un **ángulo externo** del $\triangle ABC$. Además a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BAC$ se les llaman **ángulos internos no contiguos** al $\angle BCD$. Al $\angle ACB$ se le llama **ángulo interno contiguo** al $\angle BCD$.



Teorema 12.1. Teorema del ángulo externo. *Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y $\angle BCD$ un ángulo externo no contiguo a los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ del triángulo. Llamémosle E al punto medio de $\overline{BC}$ y F al punto que está en el rayo opuesto a $\overrightarrow{EA}$ tal que $EA = EF$. Ahora por el teorema de los ángulos opuestos por el vértice $\angle BEA \cong \angle CEF$ y se tiene que $BEA \longleftrightarrow CEF$ es una correspondencia LAL, así $\angle ECF \cong \angle EBA$, es decir $\angle BCF \cong \angle B$. Ahora, por el teorema de adición de ángulos y el teorema 8.1 tenemos que $\angle BCD > \angle BCF$, por lo tanto $\angle BCD > \angle B$. Ahora sea $\overrightarrow{CG}$

un rayo opuesto a $\overrightarrow{CB}$. Por un argumento análogo al anterior tenemos que $\angle ACG > \angle A$, pero $\angle ACG \cong \angle BCD$ por ser opuestos por el vértice, de modo que también $\angle BCD > \angle A$ con lo que el teorema queda demostrado. ∎

Definición 12.4. Decimos que un ángulo es **agudo** si mide menos de 90° y que es **obtuso** si mide más de 90°.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior tenemos los siguientes 3 corolarios.

Corolario 12.1.1. *Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces los otros dos ángulos son agudos.*

Corolario 12.1.2. *Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, entonces los otros dos ángulos son agudos.*

Corolario 12.1.3. *En cualquier triángulo al menos dos de sus ángulos son agudos.*

Definición 12.5. Sea $ABC \longleftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos. Si $AB = DE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $\angle BCA \cong \angle EFD$, entonces decimos que es una correspondencia **lado-ángulo-ángulo** o **LAA**.

Teorema 12.2. Teorema LAA. *Toda correspondencia LAA es una congruencia.*

Demostración. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos tales que $AC = DF$, $\angle CAB \cong \angle FDE$ y $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Si $AB = DE$, entonces $ABC \longleftrightarrow DEF$ es una congruencia debido al postulado LAL. Veamos que es imposible que $AB < DE$. Supongamos que $AB < DE$. Sea $B' \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AB' = DE$. Con estas condiciones $\angle ABC$ es un ángulo externo no contiguo al $\angle BB'C$ en el triángulo $\triangle BB'C$ por lo que $\angle ABC > \angle BB'C$, pero como $\angle DEF \cong \angle ABC$, entonces $\angle DEF > \angle BB'C$ y observando que $\angle BB'C = \angle AB'C$ tenemos $\angle DEF > \angle AB'C$ contradiciendo al postulado LAL puesto que $CAB' \longleftrightarrow FDE$ sería una correspondencia LAL, por lo tanto es imposible que $AB < DE$. Análogamente es imposible que $AB > DE$, por lo tanto $AB = DE$ y $ABC \longleftrightarrow DEF$ es una congruencia. ∎

Definición 12.6. En un triángulo rectángulo al lado opuesto al ángulo recto se le llama la **hipotenusa** y a cada lado adyacente al ángulo recto se le llama **cateto**.

Teorema 12.3. Teorema de la hipotenusa y el cateto. *Dada una correspondencia entre dos triángulos rectángulos tal que las hipotenusas de ambos son correspondientes. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo, entonces la correspondencia es una congruencia.*

Demostración. Sea $ABC \longleftrightarrow DEF$ una correspondencia tal que $\measuredangle ACB = \measuredangle DFE = \frac{\pi}{2}$, $AB = DE$ y $BC = EF$, es decir satisface las hipótesis del teorema. Sea G un punto en el rayo opuesto a $\overrightarrow{FD}$ tal que $FG = CA$. Se tiene que $ABC \longleftrightarrow GEF$ es una correspondencia LAL por lo que $EG = BA = ED$ y $\angle BAC \cong \angle EGF$, ahora por el teorema del triángulo isósceles $\angle EGF \cong \angle EDF$ de modo que $\angle EDF \cong \angle BAC$, luego $ABC \longleftrightarrow DEF$ es una correspondencia LAA, por lo que es una congruencia. ∎

Teorema 12.4. *Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.*

Demostración. Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos no son congruentes puesto que si lo fueran contradiría al recíproco del teorema del triángulo isósceles.

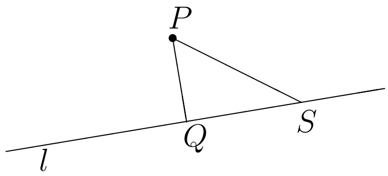
Sea $\triangle ABC$ tal que $AB > AC$ y $D \in \overrightarrow{AC}$ tal que $AB = AD$. Por el teorema del triángulo isósceles $\angle ABD \cong \angle ADB$ pero por el teorema de adición de ángulos y el teorema 8.1 tenemos $\angle ABC < \angle ABD$. Ahora, $\angle ADB < \angle ACB$ debido al teorema del ángulo externo. Por lo tanto $\angle ABC < \angle ACB$. ∎

Procediendo por contradicción se tiene que una consecuencia inmediata del teorema 12.4 es el siguiente teorema.

Teorema 12.5. *Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes y el lado mayor es opuesto al ángulo mayor.*

Teorema 12.6. Primer teorema de la distancia mínima. *Sea l una recta, P un punto que no está en ella, $Q \in l$ tal que $\overline{PQ} \perp l$ y $S \in l$ tal que $S \neq Q$. Tenemos que $PQ < PS$.*

Dicho de otra manera, el segmento más corto que une un punto con una recta es el segmento perpendicular a la recta.



Demostración. Este teorema es una consecuencia inmediata del teorema 12.5 y del corolario 12.1.1. ∎

Definición 12.7. Sea l una recta y P un punto que no está en ella. Definimos la **distancia** entre P y l como la longitud del segmento $\overline{PQ}$ tal que $Q \in l$ y $\overline{PQ} \perp l$.

Teorema 12.7. Desigualdad del triángulo. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo.*

$$AB + BC > AC.$$

Demostración. Si $\overline{AC}$ no es mayor que los otros dos lados del triángulo, la conclusión es directa. Supongamos que $\overline{AC}$ es mayor que $\overline{AB}$ y que $\overline{BC}$. Sea $D \in \overline{AC}$ tal que $AD = AB$. Por el teorema del triángulo isósceles $\angle ABD \cong \angle ADB$. Ahora, por el corolario 12.1.3 $\angle ABD$ y $\angle ADB$ son agudos. Debido al teorema del suplemento $\angle BDC$ es obtuso. Ahora, por el corolario 12.1.2 y el teorema 4, $BC > BD$. Por lo anterior se tiene que

$$AB + BC = AD + BC > AD + DC = AC,$$

es decir $AB + BC > AC$. ∎

Definición 12.8. Una circunferencia y una recta incluidas en un mismo plano se dice que son **tangentes** si su intersección tiene solamente un punto. En estas condiciones también se dice que una es **tangente** a la otra en el punto de intersección. También decimos que un segmento es tangente a una circunferencia cuando se intersecan y la recta que contiene al segmento es tangente a la circunferencia.

Teorema 12.8. *Sea c una circunferencia con centro en Q y l una recta tangente a la circunferencia c en un punto P. Bajo estas condiciones se tiene que $l \perp \overline{QP}$.*

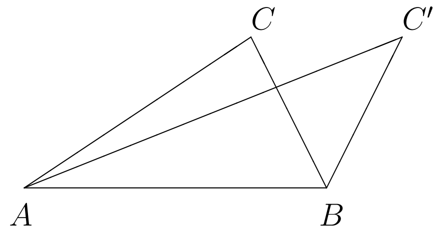
Demostración. Procedamos por contradicción. Si l no fuera perpendicular a $\overline{QP}$, entonces por el primer teorema de la distancia mínima la proyección A de Q en l está en el interior de c y si tomáramos P' en el rayo opuesto a $\overrightarrow{OP}$ tal que $OP = OP'$, entonces por el postulado LAL el punto P' también estaría en la intersección de l y c, luego l y c no serían tangentes. Por lo tanto $l \perp \overline{QP}$. ∎

El teorema 12.8 tiene el siguiente recíproco.

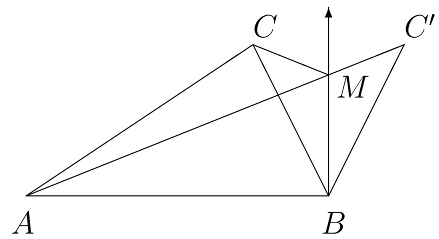
Teorema 12.9. *Sea c una circunferencia con centro en Q y l una recta que interseca a c en un punto P tal que $l \perp \overline{QP}$. La recta l es tangente a la circunferencia c.*

Demostración. Si la recta l cortara a c en algún punto P' diferente de P, entonces por el teorema del triángulo isósceles $\angle QPP' \cong \angle QP'P$ y tendríamos un triángulo con dos ángulos rectos, lo cual es imposible debido al corolario 12.1.1. ∎

Teorema 12.10. Teorema de la bisagra. *Sean $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$ dos triángulos tales que C y C' están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, $BC = BC'$ y $\angle ABC < \angle ABC'$. El segmento $\overline{AC'}$ es más largo que el segmento $\overline{AC}$.*



Demostración. Sea M el punto donde la bisectriz del ángulo $\angle CBC'$ corta al segmento $\overline{AC'}$.



Por el postulado LAL tenemos que $MC = MC'$, ahora $AC' = AM + MC' = AM + MC > AC$, por lo que el segmento $\overline{AC'}$ es más largo que el segmento $\overline{AC}$ (si C está entre A y M la última desigualdad se sigue del hecho de que $AM = AC + CM$ si no se sigue de la desigualdad del triángulo). ∎

13. Rectas Paralelas

Definición 13.1. Dos rectas son **paralelas** si están incluidas en un mismo plano y su intersección es el conjunto vacío. Al hecho de que dos rectas l_1 y l_2 sean paralelas lo denotaremos así

$$l_1 \parallel l_2.$$

De manera más general, si m_1 es una recta, rayo o segmento incluido en l_1, m_2 es una recta, rayo o segmento incluido en l_2 y además $l_1 \parallel l_2$, entonces decimos que m_1 es **paralelo** con m_2 y lo denotamos como $m_1 \parallel m_2$.

Teorema 13.1. *Dos rectas paralelas están incluidas solamente en un plano.*

Demostración. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas. Por definición de rectas paralelas l_1 y l_2 están incluidas en al menos un plano Π. Sea $P \in l_1$, por el teorema 3.3 existe sólo un plano que incluye a l_1 y $\{P\}$, por lo que tal plano debe ser Π y ningún otro plano puede incluir a l_1 y l_2. ∎

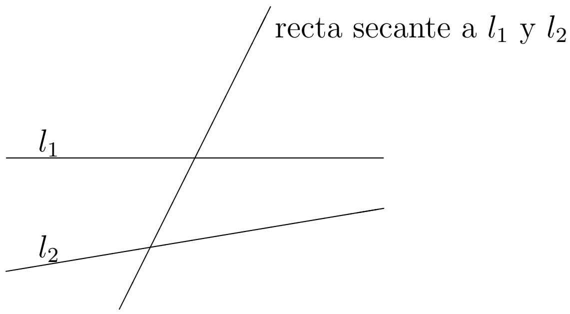
Teorema 13.2. *Si dos rectas diferentes incluidas en un mismo plano son perpendiculares a una tercera, entonces las rectas son paralelas.*

Demostración. Este teorema se deduce del corolario 12.1.1. ∎

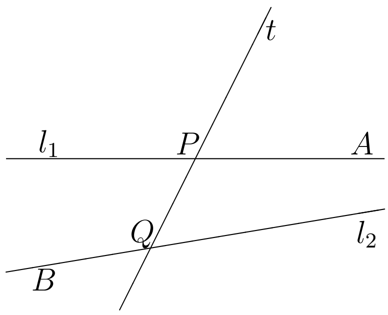
Teorema 13.3. *Sea l una recta y P un punto que no está en l. Existe una recta l_1 tal que $P \in l_1$ y $l \parallel l_1$.*

Demostración. Sea $Q \in l$ tal que $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$. Ahora en el plano en que está incluido $l \cup \{P\}$ tomemos la recta l_1 perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ tal que $P \in l_1$. Del teorema anterior concluimos que $l_1 \parallel l$. ∎

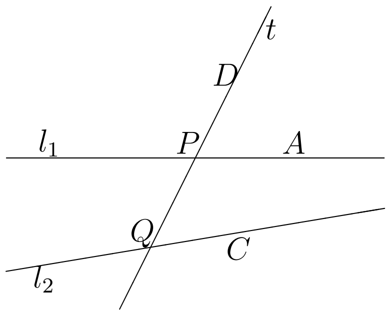
Definición 13.2. Una **secante** a dos rectas en un mismo plano es una recta que las interseca a cada una en puntos diferentes.



Definición 13.3. Dadas dos rectas l_1 y l_2 cortadas por una secante t en los puntos P y Q respectivamente. Sean $A \in l_1$ y $B \in l_2$ en lados opuestos de t. Bajo estas condiciones decimos que los ángulos $\angle APQ$ y $\angle PQB$ son **ángulos alternos internos**.



Definición 13.4. Dadas dos rectas l_1 y l_2 cortadas por una secante t en los puntos P y Q respectivamente. Sean $A \in l_1$ y $C \in l_2$ del mismo lado de t y $\overrightarrow{PD}$ un rayo opuesto a $\overrightarrow{PQ}$. Bajo estas condiciones decimos que los ángulos $\angle DPA$ y $\angle PQC$ se dice que son **ángulos correspondientes**, y que los ángulos $\angle APQ$ y $\angle PQC$ son **ángulos internos del mismo lado**.



Del teorema del suplemento se deduce el siguiente teorema.

Teorema 13.4. *Si dos rectas son cortadas por una secante y si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces los otros dos ángulos alternos internos también son congruentes.*

Teorema 13.5. *Sean dos rectas l_1 y l_2 cortadas por una secante t. Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas l_1 y l_2 son paralelas.*

Demostración. Si las rectas l_1 y l_2 se cortaran, entonces se tendría un triángulo con un ángulo externo congruente con uno de sus ángulos internos no contiguos, lo que contradice al teorema del ángulo externo. ∎

Del teorema 13.5 y del teorema de los ángulos opuestos por el vértice se sigue el siguiente corolario.

Corolario 13.5.1. *Sean dos rectas l_1 y l_2 cortadas por una secante t. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas l_1 y l_2 son paralelas.*

El siguiente postulado es equivalente al quinto postulado del libro "Los Elementos" de Euclides.

Postulado 13.15. Postulado de las paralelas. *Dada una recta l y un punto $P \notin l$. Existe una única recta l' tal que $P \in l'$ y $l' \parallel l$.*

Teorema 13.6. *Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.*

Demostración. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas y t una secante a ellas, además sean $P \in l_1 \cap t$ y $Q \in l_2 \cap t$. Por el postulado de construcción de ángulos, existe una recta l_1' tal que $P \in l_1'$ y tomando t como secante forme con l_2 ángulos alternos internos congruentes. Por el teorema 13.5 $l_1' \parallel l_2$, pero por el postulado de las paralelas $l_1' = l_1$, además los otros dos ángulos alternos internos también son congruentes debido al teorema 13.4. ∎

Del teorema 13.6 y del teorema de los ángulos opuestos por el vértice se siguen los siguientes dos corolarios.

Corolario 13.6.1. *Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante y tenemos un par de ángulos correspondientes, éstos son congruentes.*

Corolario 13.6.2. *Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces las medidas de ángulos internos del mismo lado suman* $180°$.

Lema 13.1. *Sea* $\triangle ABC$ *un triángulo. Si* D *está en el interior de* $\angle BAC$, *entonces* $\overleftrightarrow{AD}$ *corta a* $\overleftrightarrow{CB}$.

Demostración. Sea B' tal que A está entre B y B'. Las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{CB}$ no pueden ser paralelas puesto que los ángulos $\angle B'AD$ y $\angle ABC$ serían correspondientes al tomar $\overleftrightarrow{AB}$ como secante, de modo que si fueran paralelas tendríamos que $\angle B'AD \cong \angle ABC$, pero $\angle B'AC < \angle B'AD \cong \angle ABC$, contradiciendo al teorema del ángulo externo. ∎

Lema 13.2. *Sea* $\triangle ABC$ *un triángulo y* l *la recta paralela a* $\overline{AC}$ *con* $B \in l$. *Si* $E \in l$ *y además* E *y* C *están del mismo lado de* $\overleftrightarrow{AB}$, *entonces* E *y* A *están en lados opuestos de* $\overleftrightarrow{BC}$.

Demostración. Supongamos que $E \in l$ y además E y C están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Si E y A estuvieran del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, entonces debido al lema 13.1 $\overleftrightarrow{BE}$ cortaría a $\overline{AC}$, contradiciendo el hecho de que $l \parallel \overline{AC}$. ∎

Teorema 13.7. *Para todo triángulo la suma de las medidas de sus ángulos es* $180°$.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualesquiera y l la recta a la cual pertenece B y que es paralela a $\overline{AC}$. Tomemos $D, E \in l$ en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$ (y por consecuencia de $\overleftrightarrow{BC}$) con E del mismo lado que C de $\overleftrightarrow{AB}$. Por el lema 13.2 A y E están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$ y por el teorema 13.6 $\angle DBA \cong \angle BAC$ y $\angle EBC \cong \angle BCA$. Ahora por los teoremas del suplemento y de adición de ángulos tenemos que

$$\measuredangle PBA + \measuredangle ABC + \measuredangle EBC = 180°$$

pero debido a las congruencias anteriores tenemos

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA = 180°,$$

con lo que terminamos la demostración. ∎

Los siguientes 3 corolarios se deducen inmediatamente del teorema 13.7.

Corolario 13.7.1. *Dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces el otro par ángulos correspondientes también son congruentes.*

Corolario 13.7.2. *Los ángulos agudos de cualquier triángulo rectángulo son complementarios.*

Corolario 13.7.3. *En todo triángulo la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos.*

Ejercicio 13.1. Demostrar el siguiente resultado, conocido como "el quinto postulado de Euclides": *Dadas dos rectas diferentes l_1 y l_2 que son cortadas por una secante t en los puntos P y Q respectivamente, y dados dos puntos $A \in l_1$ y $B \in l_2$ del mismo lado de t, tales que $\measuredangle APQ + \measuredangle PQC < 180°$; existe un punto B en el cual se cortan las rectas l_1 y l_2, además B está del mismo lado de t que A y C.*

Teorema 13.8. *Dado un plano Π y un punto P que no está en Π, existe una única recta l, tal que $P \in l$ y $l \perp \Pi$.*

Demostración. Sea $Q \in \Pi$. Si $\overleftrightarrow{PQ} \perp \Pi$ hemos terminado debido al teorema 11.8 y a que un triángulo no tiene dos ángulos rectos diferentes. Supongamos que $\overleftrightarrow{PQ}$ no es perpendicular a Π y sea l' la única recta perpendicular a Π a la cual pertenece Q. Ahora sea l la única recta tal que $P \in l$ y $l \parallel l'$. Sean Π' el plano en el cual están incluidas l y l', y R el punto en la intersrección de las rectas $\Pi \cap \Pi'$ y l (tal punto existe por que de otro modo habría dos paralelas diferentes a l, a saber l' y $\Pi \cap \Pi'$, que pasan por Q). Por el teorema 13.6 $l \perp \overleftrightarrow{RQ}$ ($\overleftrightarrow{RQ} = \Pi \cap \Pi'$). Sea ahora en Π un punto $S \notin \overleftrightarrow{RQ}$ y l'' la recta perpendicular a Π tal que $S \in l''$. por argumentos análogos a los anteriores $l \perp \overleftrightarrow{RS}$ por lo que $l \perp \Pi$ ya que $\overleftrightarrow{RS} \neq \overleftrightarrow{RQ}$. Ahora, no existe ninguna otra recta a la cual pertenezca P que sea perpendicular a Π puesto que tendríamos un triángulo con dos ángulos rectos diferentes. ∎

Definición 13.5. Sea P un punto, Π un plano y l la recta perpendicular a Π tal que $P \in l$. La **proyección** de P en Π es el punto Q

tal que $Q \in l \cap \Pi$. La **proyección** de un conjunto $\mathcal{A}$ del espacio en un plano es el conjunto formado por las proyecciones de los elementos de $\mathcal{A}$.

Veamos ahora algunos resultados concernientes a las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Lema 13.3. *Dadas dos bisectrices de un triángulo, éstas no son paralelas.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo, y $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BE}$ las bisectrices de $\angle CAD$ y $\angle CBA$ respectivamente. Por el teorema 10.6, C, E y D están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Ahora, por definición de mediatriz y por el teorema 13.7, la suma de las medidas de los ángulos $\angle DAC$ y $\angle EBA$ es menor que $90°$. Si tomamos $\overleftrightarrow{AB}$ como secante de las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ tenemos que $\angle DAC$ es el suplemento del correspondiente a $\angle EBA$, por lo que hay un par de ángulos correspondientes, uno de los cuales es agudo y el otro obtuso, por lo tanto, debido al corolario 13.6.1, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BE}$ no son paralelos. ∎

Lema 13.4. *Cualquier par de bisectrices de ángulos de un triángulo se cortan en algún punto.*

Demostración. Siguiendo la misma idea de la demostración del lema 13.3, sea $\triangle ABC$ un triángulo, y $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BE}$ las bisectrices de $\angle CAD$ y $\angle CBA$ respectivamente. Por el lema 13.3, las rectas que contienen a las bisectrices $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BE}$ se cortan. Veamos que deben cortarse, efectivamente, del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que C. En efecto, si se cortaran en un punto F del lado opuesto a C de $\overleftrightarrow{AB}$, entonces el triángulo $\triangle ABF$ tendría dos ángulos obtusos, lo cual contradice al corolario 12.1.2. Así tenemos que el punto donde se cortan las rectas que contienen a las bisectrices pertenecen a las bisectrices. ∎

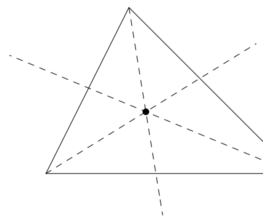
Lema 13.5. *Cualquier par de bisectrices de ángulos de un triángulo se cortan en el interior del triángulo.*

Demostración. Este lema es consecuencia del lema 13.4 y del hecho de que el interior de un triángulo es la intersección del interior cualesquiera dos de sus ángulos. ∎

Lema 13.6. *Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de las rectas que contienen a los lados del ángulo.*

Demostración. Sea $\overrightarrow{AD}$ la bisectriz de un ángulo $\angle CAB$ y sean B' y C' los puntos más cercanos a D de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ respectivamente. Por el primer teorema de la distancia mínima tenemos que $\measuredangle AB'D = \measuredangle AC'D = 90°$, por lo que debido al teorema LAA tenemos que la distancia de D a $\overleftrightarrow{AC}$ es igual a la distancia de D a $\overleftrightarrow{AB}$. ■

Teorema 13.9. *Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un mismo punto en el interior del triángulo.*



Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y D el punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$. Por el lema 13.5 tenemos que D está en el interior del triángulo y por el lema 13.6 tenemos que D equidista de las rectas que contienen a los lados del triángulo. Así tenemos que D equidista de las rectas $\overleftrightarrow{CB}$ y $\overleftrightarrow{CA}$, de modo que usando el primer teorema de la distancia mínima y el postulado LAL vemos que D está en la bisectriz del ángulo $\angle ACB$. ■

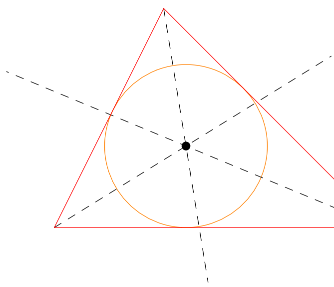
DEFINICIÓN 13.6. Al punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo se le llama **incentro** del triángulo.

Teorema 13.10. *El incentro de un triángulo está a la misma distancia r de cada recta que contiene a los lados del triángulo. Además, en el plano que contiene al triángulo, la circunferencia cuyo centro es el incentro del triángulo y tiene radio r es tangente a los lados del triángulo.*

Demostración. Por el lema 13.6 tenemos que el incentro de un triángulo está a la misma distancia r de cada recta que contiene a los lados del triángulo. Ahora, por el primer teorema de la distancia mínima y el teorema 12.9 tenemos que la circunferencia de radio r cuyo centro es el centro del triángulo es tangente a las rectas que contienen a los lados del triángulo. Para demostrar que los puntos donde se cortan tales rectas con la circunferencia están en los lados de los triángulos supongamos que tenemos un triángulo $\triangle ABC$ cuyo incentro es I y sea $P \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que $\overline{IP} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y veamos que $P \in \overline{AC}$. Como lo ángulos $\angle CAI$ y $\angle ACI$ son agudos, entonces A no puede estar entre P y C puesto que en tal caso tendríamos al $\triangle AIP$ con un ángulo recto ($\angle IPA$) y otro obtuso ($\angle IAP$). Análogamente vemos que C no está entre A y P, por lo cual $P \in \overline{AC}$ con lo cual terminamos la demostración. ∎

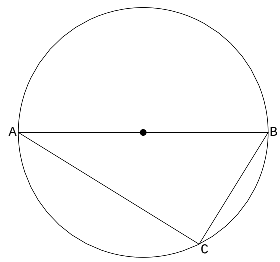
Definición 13.7. La circunferencia que es tangente a los lados de un triángulo se dice que está **inscrita** en el triángulo.

Teorema 13.11. *Dado un triángulo, éste solamente tiene una circunferencia inscrita y el centro de la circunferencia es el incentro del triángulo.*



Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y c una circunferencia inscrita a este con radio r y centro I. Sea P el punto donde se cortan la circunferencia y $\overline{AC}$ y Q el punto donde se cortan la circunferencia y $\overline{AB}$. Por el teorema 23.8 y el teorema de la hipotenusa y el cateto tenemos que $\overrightarrow{AI}$ es la bisectriz de $\angle BAC$. Análogamente $\overrightarrow{BI}$ es la bisectriz de $\angle ABC$ y $\overrightarrow{CI}$ es la bisectriz de $\angle ACB$, por lo que I es el incentro del triángulo y por el teorema 13.10 y el primer teorema de la distancia mínima, el radio r es la distancia de I a las rectas que contienen a los lados del triángulo. ∎

Teorema 13.12. *Si un triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia c y AB es el diámetro de la circunferencia, entonces el ángulo $\angle ACB$ es recto.*



Demostración. Sean $\theta = \measuredangle ABC$ y $\alpha = \measuredangle BAC$. Por el teorema del triángulo isósceles tenemos que $\theta = \measuredangle BCQ$ y $\alpha = \measuredangle ACQ$. Ahora, por el teorema de adición de ángulos, tenemos que $\measuredangle ACB = \theta + \alpha$, y por el teorema 13.7

$$180° = \measuredangle ACB + \measuredangle ABC + \measuredangle BAC$$

$$= (\theta + \alpha) + \theta + \alpha = 2(\theta + \alpha) = 2\measuredangle ACB,$$

es decir $\measuredangle ACB = 90°$, por lo que el ángulo $\angle ACB$ es recto. ∎

Teorema 13.13. *Si un triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia c y el ángulo $\angle ABC$ intercepta al arco menor $\widehat{AC}$, entonces la medida de $\angle ABC$ es la mitad es la mitad de la medida del ángulo central que intercepta al arco $\widehat{AC}$.*

Demostración. Sea Q el centro de c. Hagamos la demostración primero para el caso en que $Q \in \overline{AB}$. En este caso, por el teorema 13.12 tenemos que $\measuredangle ACB = 90°$. Sea $\theta = \measuredangle AQC$ y $\beta = \measuredangle ABC$. Por el teorema del triángulo isósceles $\measuredangle BCQ = \beta$ y por los teoremas 13.7 y del suplemento $2\beta + 180° - \theta = 180°$, es decir $\beta = \frac{\theta}{2}$.

Si $Q \in \overline{BC}$, la demostración es análoga a la del caso en que $Q \in \overline{BA}$.

Veamos el caso en que Q está en el interior del ángulo $\angle ABC$. Sea R el punto en c tal que Q es el punto medio de $\overline{BR}$. Debido al caso anterior y al teorema de adición de ángulos

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABQ + \measuredangle QBC$$

$$= \tfrac{1}{2}\measuredangle AQR + \tfrac{1}{2}\measuredangle RQC = \tfrac{1}{2}(\measuredangle AQR + \measuredangle RQC) = \tfrac{1}{2}\measuredangle AQC,$$

por lo que el resultado también es válido cuando Q está en el interior del ángulo $\angle ABC$.

Finalmente, si Q está en el exterior de $\angle ABC$, sea de nuevo $R \in c$ tal que Q es el punto medio de $\overline{BR}$. Por el primer caso y por el teorema de adición de ángulos

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CBQ = \measuredangle ABR$$

$$= \tfrac{1}{2}\measuredangle AQR = \tfrac{1}{2}(\measuredangle AQC + \measuredangle CQR)$$

$$= \tfrac{1}{2}\measuredangle AQC + \tfrac{1}{2}\measuredangle CQR = \tfrac{1}{2}\measuredangle AQC + \measuredangle CBQ,$$

por lo tanto $\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\measuredangle AQC$. ∎

Teorema 13.14. *Si un triángulo $\triangle ABC$ está inscrito es una circunferencia c con centro Q y el ángulo $\angle ABC$ intercepta al arco mayor $\widehat{AC}$, entonces la medida de $\angle ABC$ es $180° - \frac{\measuredangle AQC}{2}$.*

Demostración. $\measuredangle ABC = 180° - \measuredangle ACB - \measuredangle BAC = 180° - \frac{\measuredangle AQB}{2} - \frac{\measuredangle BQC}{2}) = 180° - \frac{\measuredangle AQC}{2}$. ∎

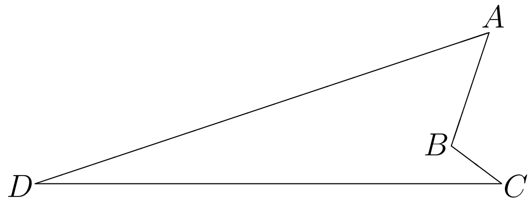
Teorema 13.15. *Si $\triangle ABC$ es un triángulo y D un punto en su interior, entonces $\angle ADB > \angle ACB$.*

Demostración. Sea E el punto donde la recta $\overleftrightarrow{CB}$ corta a $\overline{AB}$. Por el teorema del ángulo externo $\angle BDE > \angle BCD$ y $\angle ADE > \angle ACD$. Ahora, por el teorema de adición de ángulos $\measuredangle ADB = \measuredangle ADE + \measuredangle BDE > \measuredangle ACD + \measuredangle BCD = \measuredangle ACB$. ∎

14. Cuadriláteros

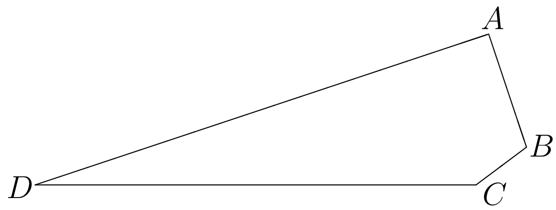
En esta sección definiremos distintos tipos de cuadriláteros y conceptos relacionados con éstos.

Definición 14.1. Cualquier poligonal cerrada simple de cuatro lados incluida en un plano se llama **cuadrilátero**. Es decir un cuadrilátero es la unión de cuatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ que no se cortan más que posiblemente en sus extremos. Los ángulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$ se llaman **ángulos** del cuadrilátero.



cuadrilátero $\square ABCD$

Definición 14.2. Un **cuadrilátero convexo** es un cuadrilátero tal que para todo vértice del cuadrilátero y todo ángulo del cuadrilátero tenemos que el vértice no está en el exterior del ángulo. En general, una **poligonal convexa** es una poligonal cerrada simple l que está incluida en un plano tal que si $\overline{AB}$ es uno de los lados de la poligonal l, entonces todos los vértices de l diferentes de A y de B están en un mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.



cuadrilátero convexo $\square ABCD$

Se invita al lector a representar con dibujos las definiciones siguientes.

Definición 14.3. El **interior** de un cuadrilátero convexo es el conjunto de puntos que están en el interior de cada uno de sus ángulos. En general, el **interior** de una poligonal convexa es el conjunto de puntos que están en el interior de cada uno de sus ángulos.

Definición 14.4. Dada una poligonal convexa. Se dice que el conjunto que es la unión de la poligonal y su interior está **delimitado** por la poligonal.

Observemos que un cuadrilátero convexo no es un conjunto convexo pero su interior si lo es.

Definición 14.5. Dos lados de un cuadrilátero son **opuestos** si no se intersecan, en otro caso diremos que son **consecutivos**. Dos ángulos de un cuadrilátero son **opuestos** si no incluyen un mismo lado, en otro caso diremos que son **consecutivos**. Al cuadrilátero cuyos vértices son A, B, C y D, y cuyos lados son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se le denotará como $\square ABCD$. Las **diagonales** de un cuadrilátero $\square ABCD$ son los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Daremos a continuación las definiciones de las figuras geométricas más importantes.

Definición 14.6. Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene al menos dos lados paralelos.

Definición 14.7. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el cual cualquier lado es paralelo a su lado opuesto.

Observemos que según la definicińń anterior, todos los paralelogramos son trapecios.

Definición 14.8. Un **rombo** es un paralelogramo cuyos lados son congruentes entre sí.

Definición 14.9. Un **rectángulo** es un paralelogramo cuyos ángulos son rectos.

Definición 14.10. Un **cuadrado** es un rectángulo que es rombo.

Definición 14.11. Un **romboide** es un paralelogramo que no es rombo.

Definición 14.12. Un **cuadrilongo** es un rectángulo que no es cuadrado.

Definición 14.13. Un **trapezoide** es un cuadrilátero que no es trapecio, es decir que no tiene ningún par de lados paralelos.

Definición 14.14. La **distancia** entre dos rectas paralelas es la distancia de cualquier punto de una de ellas a la otra. ¿Por qué esta definición tiene sentido?

Definición 14.15. En un trapecio a las longitudes de los lados paralelos se les llama **bases** del trapecio y a la distancia entre las rectas que incluyen tales lados se le llama **altura** correspondiente a tales bases.

Definición 14.16. En un triángulo la longitud de uno de sus lados es una **base** y su **altura** correspondiente es la distancia de la recta que incluye al lado, al vértice del triángulo que no está en ese lado.

Definición 14.17. Una **región rectangular** es la unión de un rectángulo con su interior. Una **región trapecial** es la unión de un trapecio con su interior. Una **región cuadrada** es la unión de un cuadrado con su interior.

Definición 14.18. La **base** y la **altura** de una región trapecial o triangular R son respectivamente la base y la altura del trapecio o triángulo t tal que R es la unión de t con su interior.

Teorema 14.1. Teorema del paralelogramo. *En un paralelogramo las bases opuestas son congruentes.*

Demostración. Se dejará al lector el justificar cada paso de la demostración. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo. Sean los puntos E, F, G, H e I en los rayos opuestos de $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BA}$ respectivamente. Tenemos que

$\angle DAB \cong \angle ADG$,

$\angle ADG \cong \angle EDC$,

$\angle EDC \cong \angle DCB$,

$\angle DCB \cong \angle CBI$,

$\angle GDB \cong \angle IBD$,

$\angle ADB \cong \angle CBD$,

$\angle CDB \cong \angle ABD$,

$ADB \cong CBD$, por lo tanto $AB = DC$ y $AD = BC$. ■

Teorema 14.2. *Si tres rectas paralelas m, n y l son cortadas por dos rectas diferentes r y s en los puntos A, B, C y D, E, F respectivamente y además $AB = BC$, entonces $DE = EF$.*

Demostración. Si s y r son paralelas, entonces el resultado se sigue directamente del teorema 14.1. Supongamos que r y s no son paralelas. Sea $G \in n$ tal que $\overline{DG} \parallel r$ y $H \in l$ tal que $\overline{EH} \parallel r$. Por el postulado de las paralelas tenemos que $\overline{DG} \parallel \overline{EH}$, además por el teorema 14.1

y la hipótesis tenemos que $DG = AB = BC = EH$. Ahora, por el corolario 13.5.1 $\angle GDE \cong \angle HEF$ y $\angle DEG \cong \angle EFH$ y del teorema LAA concluimos el teorema. ∎

Teorema 14.3. *Un cuadrilátero convexo $\square ABCD$ está inscrito en alguna circunferencia si y sólo si $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°$.*

Demostración. Si $\square ABCD$ está inscrito en alguna circunferencia, llamémosle Q al centro de tal circunferencia. Si $\widehat{ADC}$ es una semicircunferencia, entonces también lo es $\widehat{ABC}$, por lo que debido al teorema 13.12, los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ADC$ son rectos, teniéndose así $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°$.

Si $\widehat{ADC}$ es un arco menor, entonces $\widehat{ABC}$ es un arco mayor y por los teoremas 13.13 y 13.14 se tiene $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180° - \frac{\measuredangle AQC}{2} + \frac{\measuredangle AQC}{2} = 180°$ y análogamente se tiene el resultado cuando $\widehat{ADC}$ es un arco mayor. De esta forma, el hecho de que $\square ABCD$ está inscrito en alguna circunferencia implica que $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°$.

Supongamos ahora que $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°$ y sea c la circunferencia en la cual está inscrito el triángulo $\triangle ABC$ y D' el punto en el rayo $\overrightarrow{BD}$ tal que $D' \in c$. De lo ya demostrado tenemos que $\measuredangle ABC + \measuredangle CD'A = 180°$. Si D estuviera en el interior de c, entonces por el teorema 13.15 $\angle ADC > \angle AD'C$ y no se cumpliría que $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°$. Si D estuviera en el exterior de c, entonces por el teorema 13.15 $\angle ADC < \angle AD'C$ y tampoco se cumpliría que $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°$. Así, la única posibilidad es que $D \in c$. ∎

Ejercicio 14.1. Demostrar que si en cuadrilátero $\square ABCD$ se tiene que $AB = BC$ y que $CD = DA$, entonces la recta $\overleftrightarrow{BD}$ es mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

15. Semejanza y Proporcionalidad

Podemos observar que la idea de que dos figuras sean congruentes es que tengan la misma forma y el mismo tamaño (ya sea finito o infinito). La idea de que dos figuras sean semejantes es que tengan la misma forma aunque posiblemente tengan diferente tamaño. En esta sección estableceremos el concepto de semejanza y sus propiedades principales.

Definición 15.1. Dada una correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ entre dos triángulos, decimos que la correspondencia es una **semejanza** si los ángulos correspondientes son congruentes y además

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Al hecho de que la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ se una semejanza lo denotaremos así $ABC \sim DEF$ y diremos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son **semejantes**, denotando este último hecho así $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Definamos ahora el concepto de proporcionalidad que nos facilitará el lenguaje.

Definición 15.2. Dos sucesiones de números positivos $(a_k)_{k=1}^n$ y $(b_k)_{k=1}^n$ son **proporcionales** si para cada $k \in J_n := \{1, 2, ..., n\}$ tenemos

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_k}{b_k} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Al valor común de $\frac{a_k}{b_k}$ se le llama **constante de proporcionalidad**.

Definición 15.3. Dos sucesiones de segmentos son **proporcionales** si sus longitudes respectivas son sucesiones de números proporcionales.

En la definición de semejanza podríamos decir que la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ es una semejanza si y sólo si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

El concepto de proporcionalidad se puede generalizar a cualquier tipo de funciones con valores numéricos.

Definición 15.4. Dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$ son **proporcionales** si existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ diferente de cero, tal que $f = \alpha g$. Al número α se le llama **constante de proporcionalidad** entre f y g. Para indicar que f y g son proporcionales se acostumbra escribir $f \propto g$.

Teorema 15.1. Teorema fundamental de la proporcionalidad. *En un $\triangle ABC$, si $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; entonces*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Demostración. Demostremos primero la siguiente afirmación que es un caso particular del teorema:

Si existe un $D_1 \in \overline{AB}$ y números enteros n y m tales que $n(AD_1) = AB$ y $m(AD_1) = AD$, entonces $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

En efecto, para cada número natural k, sea $D_k \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AD_k = k(AD_1)$. Sea ahora $E_k \in \overrightarrow{AC}$, tal que $\overline{D_kE_k} \parallel \overline{BC}$ (o bien $\overline{D_kE_k} = \overline{BC}$). Observemos que $D_kD_{k+1} = AD_1$, luego, por el teorema 14.2 $AE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = \cdots = E_kE_{k+1} = E_{k+1}E_{k+2} = \cdots$, por lo tanto

$$\frac{AB}{AD} = \frac{n(AD_1)}{m(AD_1)} = \frac{n}{m} = \frac{n(AE_1)}{m(AE_1)} = \frac{AC}{AE},$$

con lo que queda demostrada la afirmación.

En el caso general, para $k \in \mathbb{N}$ sea $D_k^* \in \overrightarrow{AD}$ tal que $AD_k^* = \frac{AD}{k}$ y sea m_k el primer entero positivo tal que $m_k(AD_k^*) > AB$. Sea a la vez $E_k^* \in \overrightarrow{AE}$ tal que $\overline{D_k^*E_k^*} \parallel \overline{BC}$. Tomemos ahora $B_k \in \overrightarrow{AD}$ tal que $AB_k = m_k(AD_k^*)$ y $C_k \in \overrightarrow{AE}$ tal que $\overline{B_kC_k} \parallel \overline{BC}$ (o bien $\overline{B_kC_k} = \overline{BC}$, en cuyo caso el teorema ya está demostrado).

De la afirmación demostrada anteriormente concluimos que $\frac{AB_k}{AD} = \frac{AC_k}{AE}$, pero podemos observar que $AB_k = AB + \delta_k$ y $AC_k = AC + \epsilon_k$, donde $0 < \delta_k \leq \frac{AD}{k}$ y $0 < \epsilon_k \leq \frac{AE}{k}$, por lo cual

$$\frac{AB + \delta_k}{AD} = \frac{AC + \epsilon_k}{AE},$$

por lo tanto

$$|\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE}| = |\frac{\epsilon_k}{AE} - \frac{\delta_k}{AD}| \leq \frac{\epsilon_k}{AE} + \frac{\delta_k}{AD} \leq \frac{2}{k},$$

es decir $|\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE}| \leq \frac{2}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y debido a la propiedad arquimediana, lo anterior significa que el número $|\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE}| \geq 0$ es menor que cualquier número positivo, pero el único número real no negativo menor que cualquier número positivo es el cero, por lo tanto

$$\left|\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE}\right| = 0,$$

de donde concluimos que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, con lo cual terminamos la demostración. ■

El siguiente corolario se deduce directamente del teorema anterior.

Corolario 15.1.1. *En un $\triangle ABC$, si $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; entonces*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}.$$

El teorema fundamental de la proporcionalidad tiene el siguiente teorema recíproco.

Teorema 15.2. *En un $\triangle ABC$, si $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ y además*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Demostración. Sea l la recta paralela a $\overline{DE}$ a la cual pertenece B. por el postulado de las paralelas la única recta paralela a l a la cual pertenece E es $\overleftrightarrow{DE}$, por lo que l corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en algún punto $C' \in \overrightarrow{EC}$.

Usando el teorema fundamental de la proporcionalidad tenemos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE},$$

pero por hipótesis

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE},$$

de donde $AC = AC'$ y por el teorema de localización de puntos obtenemos que $C = C'$, con lo que $l = \overleftrightarrow{BC} \parallel \overline{DE}$. ■

Teorema 15.3. Teorema de semejanza AAA. *Dada una correspondencia entre dos triángulos tal que los ángulos correspondientes son congruentes, se tiene que la correspondencia es una semejanza.*

Demostración. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos tales que en la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ los ángulos correspondientes son congruentes. Sea $E' \in \overrightarrow{AB}$ y $F' \in \overrightarrow{AC}$ tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Por el postulado LAL tenemos que $AE'F' \cong DEF$. Ahora, por el teorema de los ángulos opuestos por el vértice y el teorema 13.5 tenemos que $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ y por el teorema fundamental de la proporcionalidad tenemos que

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'},$$

pero como $AE' = DE$ y $AF' = DF$, se sigue que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Análogamente se tiene la igualdad

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$$

con lo que el teorema queda demostrado. ∎

Del hecho de que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es $\pi = 180°$ se tiene el siguiente corolario.

Corolario 15.3.1. Corolario AA. *Dada una correspondencia entre dos triángulos en la cual dos pares de ángulos sean congruentes, se tiene que la correspondencia es una semejanza.*

Corolario 15.3.2. *Si una recta paralela a un lado de un triángulo dado interseca a los otros dos lados en puntos diferentes, entonces determina un triángulo semejante al triángulo dado.*

Otra forma de enunciar el corolario 15.3.2 es: *Si $\triangle ABC$ es un triángulo, $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ tal que D está entre A y B, y E está entre A y C, entonces $ABC \longleftrightarrow ADE$ es una semejanza.*

Demostración. Como $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, entonces $\angle ADE \cong \angle ABC$, por lo que debido al corolario AA $ABC \sim ADE$. ∎

Los siguientes dos teoremas se dejan como ejercicio. En uno se usan para su demostración manipulaciones algebraicas simples y construcciones del estilo de las que se han visto en esta sección.

Teorema 15.4. *La relación $\sim$ de semejanza entre triángulos es una relación de equivalencia.*

Teorema 15.5. Teorema de semejanza LAL. *En los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ se tiene la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ donde $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y $\angle BAC \cong \angle EDF$. Con estas condiciones $ABC \sim DEF$.*

Otra forma de enunciar el teorema es la siguiente: *Dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.*

Teorema 15.6. Teorema de semejanza LLL. *Dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza.*

Otra forma de enunciar el teorema es la siguiente: *Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, si*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

entonces $ABC \sim DEF$.

Demostración. En la demostración se darán solamente una serie de afirmaciones que el lector deberá justificar.

1. Sean E' y F' puntos en $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ respectivamente tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$.
2. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.
3. $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$.
4. $ABC \cong AE'F'$.
5. $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$.
6. $E'F' = BC\frac{AE'}{AB} = BC\frac{DE}{AB}$.
7. $EF = BC\frac{DE}{AB}$.
8. $E'F' = EF$.
9. $AE'F' \cong DEF$.
10. $ABC \sim DEF$. ∎

Teorema 15.7. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con $\angle ACB$ recto. Tomando como base la longitud de la hipotenusa y $D \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que CD es la altura correspondiente. Tenemos que D está entre A y B, y además $ABC \sim ACD \sim CBE$.*

Demostración. Como los ángulos $\angle CBA$ y $\angle CAB$ son agudos, entonces D debe estar entre A y B porque de otro modo se contradiría al teorema del ángulo externo. Ahora, como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, se tiene que las correspondencias $ABC \longleftrightarrow ACD$ y $ACD \longleftrightarrow CBD$ son semejanzas debido al teorema de semejanza AAA. ∎

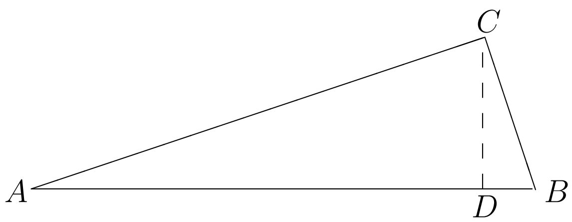
El siguiente teorema (teorema de Pitágoras) es uno de los más importantes de las matemáticas. Se ha creído que Pitágoras o alguno de sus discípulos fue el primero en demostrarlo, aunque la demostración más antigua de la que se tenga registro en la antigua Grecia se encuentra en “Los Elementos” de Euclides que fueron escritos alrededor de 300 años antes de Cristo, es decir casi 200 años después de la muerte de Pitágoras. Sin embargo, en China, durante la dinastía Han (206 A. C.

al 220 D. C.) los astrónomos usaban el libro “Chou Pei Suan Ching” (La aritmética clásica del gnomon y las órbitas del firmamento), en el cual se encuentra una demostración del teorema de Pitágoras. No se conoce la fecha en que fue escrito el Chou Pei Suan Ching, las fechas estimadas varían desde 500 años antes de Cristo hasta 300 años antes de Cristo, aunque hay quienes dicen que es más antiguo. Se sabe que en la antigua Babilonia, mil años antes de Pitágoras ya se tenía conocimiento del teorema, pero no hay vestigios de ninguna demostración de esa época.

Teorema 15.8. Teorema de Pitágoras. *En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.*

Pitágoras de Samos

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con $\angle ACB$ recto. Sea $D \in \overline{AB}$ tal que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Por el teorema 15.7 tenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ y $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, por lo tanto $(BC)^2 + (AC)^2 = (AB)(BD) + (AB)(AD) = (AB)(BD + AD) = (AB)(AB) = (AB)^2$, con lo que el teorema está demostrado. ∎



El siguiente teorema, que se puede ver como una generalización del teorema de Pitágoras, fue demostrado en el siglo II por el astrónomo griego Claudio Ptolomeo quien tenía una concepción geocéntrica del universo.

Teorema 15.9. Teorema de Ptolomeo. *Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero $\square ABCD$ esté inscrito en una circunferencia es que se satisfaga la siguiente fórmula*

$$(AB)(CD) + (BC)(AD) = (AC)(BD).$$

Demostración. Supongamos primero que $\square ABCD$ está inscrito en una circunferencia. Sea $E \in \overline{AC}$ tal que $\angle ADB \cong \angle CDE$. Por el teorema 13.13, $\angle ABD \cong \angle ACD$, $\angle DAC \cong \angle DBC$, $\angle ADB \cong \angle ACB$ y $\angle CDB \cong \angle CAB$. Por el teorema de adición de ángulos $\angle ADE \cong \angle CDB$. Ahora, por el corolario AA tenemos que $CDE \sim BDA$ y $AED \sim BCD$. Por lo tanto

$$\frac{CD}{BD} = \frac{EC}{AB}$$

y

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BC},$$

de donde obtenemos

$$(AB)(CD) + (BC)(AD)$$

$$= (EC)(BD) + (AE)(BD) = (EC + AE)(BD) = (AC)(BD),$$

es decir se satisface la fórmula.

Supongamos ahora que se satisface la fórmula $(AB)(CD) + (BC)(AD) = (AC)(BD)$. Tomemos E en el interior del ángulo $\angle ADC$ tal que $\angle CDE \cong \angle ADB$ y $\frac{BD}{DC} = \frac{AD}{DE}$. Por el teorema de semejanza LAL tenemos que $EDC \sim ADB$ y además $BDC \sim ADE$, por lo tanto $\frac{AB}{EC} = \frac{BD}{CD}$, $\angle CED = \angle DAB$, $\frac{BC}{AE} = \frac{BD}{AD}$ y $\angle DEA \cong \angle DCB$. Ahora, $(AE+EC)BD = (AC)(AD)+(AB)(CD)$ y $\measuredangle CED + \measuredangle DEA = \measuredangle DAB + \measuredangle DCB$. Más aún, $(AC)(BD) = (AB)(CD) + (BC)(AD) = (AE + EC)(BD)$, de modo que $AC = AE + EC$, lo que implica que E está entre A y C. Así tenemos que

$$\measuredangle DAB + \measuredangle DCB = \measuredangle CED + \measuredangle DEA = 180°,$$

con lo que, por el teorema 13.16, $\square ABCD$ está inscrito en una circunferencia. ∎

Ejercicio 15.1. Demostrar los teoremas 15.4 y 15.5.

16. Áreas

Otro término no definido que introduciremos a continuación es el de **área**. Dado cualquier plano, a algunos subconjuntos Ω del plano se les asigna un único número $\mathrm{a}(\Omega)$ mayor o igual que cero que se llama el área de Ω y es tal que satisface los postulados de esta sección.

Definición 16.1. Una **región poligonal** es las unión de un número finito de regiones triangulares en un plano, tales que si dos regiones triangulares se intersecan, entonces su intersección está incluida en un segmento.

Postulado 16.16. Postulado de la congruencia. *Si dos conjuntos con área son congruentes, entonces tienen la misma área.*

En particular, si dos triángulos son congruentes, las regiones triangulares determinadas por ellos tienen la misma área.

Postulado 16.17. Postulado de adición de áreas. *Si Ω es la unión de dos conjuntos en un plano Ω_1 y Ω_2 con áreas $\mathrm{a}(\Omega_1)$ y $\mathrm{a}(\Omega_2)$ respectivamente, y $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es la unión finita de subconjuntos de segmentos. Entonces*

$$\mathrm{a}(\Omega) = \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2).$$

Postulado 16.18. *Sean Ω_1 y Ω_2 dos conjuntos con área.*

(i) *Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Entonces*

$$\mathrm{a}(\Omega_2 \backslash \Omega_1) = \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1).$$

(ii) *Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ y Ω_2 tiene área cero, entonces también Ω_1 tiene área cero.*

(iii) *Cualquier segmento tiene área cero.*

(iv) *Cualquier región poligonal es un conjunto con área.*

Postulado 16.19. *El área de una región rectangular es el producto de una base y su altura correspondiente.*

Notación. Cuando escribamos $\mathrm{a}(\triangle ABC)$ nos estaremos refiriendo al área de la región triangular determinada por el $\triangle ABC$. Cuando escribamos $\mathrm{a}(\square ABCD)$ nos estaremos refiriendo al área de la región determinada por el $\square ABCD$. Por razones de brevedad a veces abusaremos del lenguaje y diremos área del triángulo, cuadrado, rectángulo, etc. cuando en realidad queremos decir área de la región cuadrada, región triangular, región rectangular, etc.

Teorema 16.1. *El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de las longitudes de sus catetos.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cuyo ángulo $\angle C$ es recto. Sea D un punto del mismo lado que A de $\overleftrightarrow{BC}$ tal que $\overline{BD} \perp \overline{BC}$ y $BD = AC$. Por el teorema de adición de ángulos y el corolario 13.7.2 tenemos $\angle DBA \cong \angle CAB$, por lo que $ABC \longleftrightarrow BAD$ es una correspondencia LAL, de modo que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ con lo que además $\overline{DA} \perp \overline{AC}$, es decir $\square ACBD$ es un rectángulo. Pero como $ABC \cong BAD$ y $\triangle ABC \cap \triangle BAD = \overline{AB}$, se tiene que

$$\mathrm{a}(\square ACBD) = \mathrm{a}(\triangle ABC) + \mathrm{a}(\triangle BAD) = 2\,\mathrm{a}(\triangle ABC),$$

es decir

$$\mathrm{a}(\triangle ABC) = \frac{\mathrm{a}(\square ACBD)}{2} = \frac{(AC)(BC)}{2}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 16.2. *El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquier base y su altura correspondiente.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo, tomemos AB como base y sea CD la altura con $D \in \overleftrightarrow{AB}$. Tenemos tres posibilidades:

(a) D está entre A y B;

(b) $D = A$ ó $D = B$; y

(c) $D \notin \overline{AB}$.

Cuando se tiene la posibilidad (b), entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo y el resultado se sigue del teorema 16.1. Si se tiene la posibilidad (a), entonces por el postulado de adición de áreas y por el teorema 16.1

$$\mathrm{a}(\triangle ABC) = \mathrm{a}(\triangle ADC) + \mathrm{a}(\triangle CDB) = \frac{(AD)(DC)}{2} + \frac{(DB)(DC)}{2},$$

pero como D está entre A y B tenemos que $AD + DB = AB$, por lo cual

$$\mathrm{a}(\triangle ABC) = \frac{(AB)(DC)}{2}.$$

Ahora supongamos que $D \notin \overline{AB}$ y consideremos el caso en que A está entre D y B (el caso en que B está entre D y A se resuelve de manera análoga). Por argumentos similares a los del caso (a) tenemos que

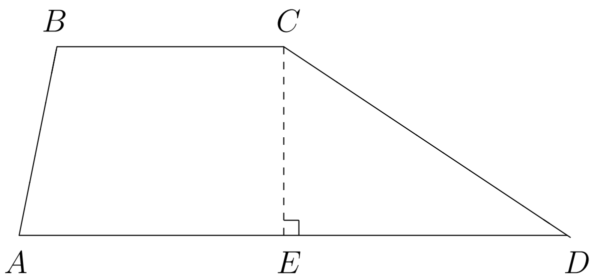
$$\frac{(DA + AB)(DC)}{2} = \frac{(DB)(DC)}{2} = \mathrm{a}(\triangle CDB)$$

$$= \mathrm{a}(\triangle CDA) + \mathrm{a}(\triangle ABC) = \frac{(DA)(DC)}{2} + \mathrm{a}(\triangle ABC),$$

por lo que $\mathrm{a}(\triangle ABC) = \frac{(AB)(DC)}{2}$. ∎

El lector debe estar listo para demostrar el siguiente teorema importante.

Teorema 16.3. Teorema del área de un trapecio. *El área de un trapecio es la mitad de la suma de sus bases por su altura correspondiente. Es decir, si en el trapecio* $\square ABCD$ *tenemos* $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ *y* CE *es la distancia entre* $\overleftrightarrow{BC}$ *y* $\overleftrightarrow{AD}$, *entonces* $\mathrm{a}(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AD + BC)CE$.



La demostración queda como ejercicio aunque se sugiere calcular las áreas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$ tomando como altura común al número CE.

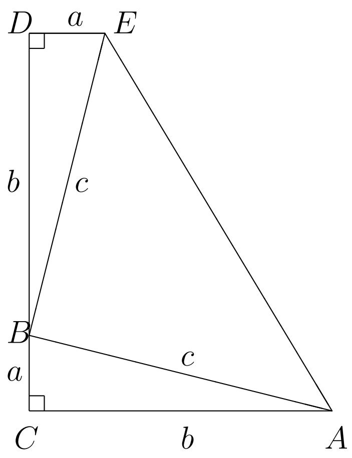
A continuación se demostrará el teorema de Pitágoras y el teorema fundamental de la proporcionalidad utilizando los resultados de esta sección.

Teorema 16.4. Teorema de Pitágoras. *En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con $\angle BCA$ recto. Sea, para facilitar la escritura, $c = AB$, $a = BC$ y $b = AC$.

Debemos demostrar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Sea $D \in \overrightarrow{CB}$ tal que $CD = a + b$. Sea ahora E un punto del mismo lado que A de la recta $\overleftrightarrow{BC}$ tal que $\overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{BC}$ y $a = DE$. Por el postu-



lado LAL tenemos que $EB = c$ y que $\angle EBD \cong \angle BAC$. Pero los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ABC$ son complementarios por ser los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, por lo que $\angle EBD$ y $\angle ABC$ son complementarios, de donde por los teoremas del suplemento y de adición de ángulos tenemos que el ángulo $\angle EBA$ es recto.

Ahora, por una parte el área del trapecio $\square AEDC$ es igual a a$\square AEDC = \frac{(b+a)(b+a)}{2} = \frac{b^2}{2} + ab + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} + ab$ y por otro lado es la suma de las áreas de los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle EDB$ y $\triangle EBA$, es decir a$(\square AEDC) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2} + ab$, de donde se tiene que $\frac{a^2+b^2}{2} + ab = \frac{c^2}{2} + ab$, luego $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Una demostración del teorema de Pitágoras basada en la figura anterior fue hecha por el General James A. Garfield quien también fue presidente de los Estados Unidos de América.

Teorema 16.5. Teorema fundamental de la proporcionalidad. *En un $\triangle ABC$, si $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; entonces*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Demostración. Demostremos primero que $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$. Si en los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle DBE$ tomamos respectivamente las bases AD y BD, entonces ambos triángulos tienen la misma altura h, por lo que de la fórmula para el área de un triángulo obtenemos

$$\frac{BD}{AD} = \frac{(BD)h/2}{ADh/2} = \frac{\mathrm{a}(\triangle BDE)}{\mathrm{a}(\triangle ADE)}.$$

Análogamente obtenemos

$$\frac{CE}{AE} = \frac{\mathrm{a}(\triangle CDE)}{\mathrm{a}(\triangle ADE)}.$$

Ahora, los triángulos $\triangle BDE$ y $\triangle CDE$ tienen una misma base DE con alturas correspondientes iguales, por lo que tienen la misma área, por lo tanto

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}.$$

Sumando 1 en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BD + AD}{AD} = \frac{BD}{AD} + 1 = \frac{CE}{AE} + 1 = \frac{CE + AE}{AE} = \frac{AC}{AE}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 16.6. Teorema de las áreas de triángulos semejantes. *Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son dos triángulos tales que $ABC \sim DEF$, entonces* $\mathrm{a}(\triangle ABC) = \alpha^2\, \mathrm{a}(\triangle DEF)$, *donde* $\alpha = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

Demostración. Cuando los triángulos son congruentes, se tiene que $\alpha = 1$ y la igualdad se cumple por el postulado de la congruencia. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $\alpha < 1$. Sean $A' \in \overrightarrow{ED}$ y $C' \in \overrightarrow{EF}$ tales que $EA' = BA$ y $EC' = BC$; tomemos $Q \in \overleftrightarrow{DF}$ tal que $\overleftrightarrow{EQ} \perp \overleftrightarrow{DF}$ y sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{EQ}$ con $\overleftrightarrow{A'C'}$. Como $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DF}$, tenemos que

$$\frac{DF}{A'C'} = \frac{DE}{A'E} = \frac{QE}{PE} = \alpha,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathrm{a}(\triangle ABC) &= \mathrm{a}(\triangle A'EC') = \tfrac{1}{2}(A'C')(PE) \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha(DF)\alpha(EQ) = \alpha^2\, \mathrm{a}(\triangle DEF). \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Teorema 16.7. Fórmula de Herón. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ y $s = \frac{a+b+c}{2}$. Se tiene la fórmula siguiente:*

$$\mathrm{a}(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que en el triángulo $\triangle ABC$ el ángulo $\angle C$ tiene medida mayor o igual que las de los otros ángulos. Sea $P \in \overline{AB}$ tal que $\overline{CP} \perp \overline{AB}$ y sean $h = CP$, $p = PB$ y $q = PA$. Observemos lo siguiente:

$$2s = a + b + c$$

$$2(s-a) = -a + b + c$$

$$2(s-b) = a - b + c$$

$$2(s-c) = a + b - c$$

y

$$p + q = c.$$

Del teorema de Pitágoras tenemos

$$h^2 + p^2 = a^2 \quad \text{y} \quad h^2 + q^2 = b^2,$$

pero como $q = c - p$, entonces $q^2 = (c-p)^2 = c^2 - 2cp + p^2$, por lo tanto $b^2 = h^2 + q^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2 = a^2 - 2cp + p^2$, es decir

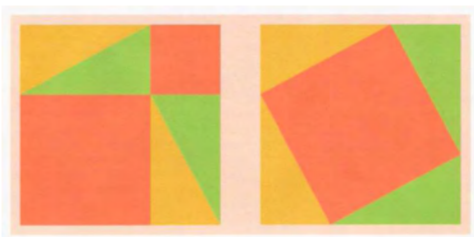
$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}.$$

Por otra parte tenemos que $h^2 = a^2 - p^2 = (a+p)(a-p) = (a + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c})(a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}) = \frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4c^2} = \frac{((a+b)-b^2)(b^2-(a-c)^2)}{4c^2} = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4c^2} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} = \frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}{4c^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$, por lo tanto, por el teorema 16.2 tenemos que

$$\mathrm{a}(\triangle ABC) = \frac{ch}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 16.1. Demostrar el teorema 16.3.

Ejercicio 16.2. Observar la figura siguiente y usarla como guía para demostrar el teorema de Pitágoras de manera rigurosa, pero diferente a como se ha hecho en esta sección y en la anterior.



17. Área del Círculo y Sectores Circulares

En esta sección introduciremos el concepto de área de un círculo, el de área de secciones de círculo y daremos algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 17.1. Sea $\widehat{AB}$ un arco de circunferencia con centro Q y radio r. La unión de todos los segmentos de la forma $\overline{QP}$, con $P \in \widehat{AB}$ se llama **sector circular** o más precisamente **sector determinado** por $\widehat{AB}$ y r es el **radio** del sector de círculo o **radio** del arco $\widehat{AB}$.

Sea c una circunferencia con centro Q y radio r, y $(P_k)_{k=1}^{n+1}$ una sucesión finita de puntos en c que son los vértices de una poligonal cerrada simple $\bigcup_{k=1}^{n} \overline{P_k P_{k+1}}$ de n lados. Para cada rayo $\overrightarrow{QP_k}$ sea P'_k un punto tal que $QP'_k = 1$. Por el teorema de semejanza LAL se deduce que cada $\triangle P_k Q P_{k+1}$ es semejante con $\triangle P'_k Q P'_{k+1}$, por el teorema 15.2 $\overline{P_k P_{k+1}} \parallel \overline{P'_k P'_{k+1}}$ y además la constante de proporcionalidad es r, es decir $P_k P_{k+1} = r(Pk'Pk + 1')$, además $a\triangle P_k Q P_{k+1} = r^2 a\triangle P'_k Q P'_{k+1}$ puesto que las alturas correspondientes a las bases $P_k P_{k+1}$ y $P'_k P'_{k+1}$ son también proporcionales con la misma constante de proporcionalidad r (lo anterior es también por el teorema fundamental de la proporcionalidad). Ahora, esto nos da una correspondencia biunívoca (biyección) entre las poligonales cerradas simples inscritas en c y las inscritas en la circunferencia con centro en Q y radio 1 de tal forma que si la poligonal inscrita en la de radio 1 tiene longitud α, la inscrita en c tiene longitud $r\alpha$. Como la longitud de una circunferencia de radio 1 es 2π, de la definición de longitud de circunferencia se deduce que la longitud de c es $2\pi r$. Es decir.

Teorema 17.1. *La longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$.*

De forma similar se deduce el siguiente teorema.

Teorema 17.2. *Sea $\widehat{AB}$ un arco de circunferencia con centro en Q, radio r y que es interceptado por $\angle AQB$. Si $\theta = \measuredangle AQB$, entonces $\ell\widehat{AB} = r\theta$.*

Definición 17.2. El **área** de un círculo es el supremo de las áreas de las poligonales cerradas simples inscritas en él.

Definición 17.3. El **área** de un sector determinado por $\widehat{AB}$ con centro en Q es el supremo de las áreas de las regiones poligonales que están delimitadas por los segmentos $\overline{QA}$ y $\overline{QB}$ y una poligonal inscrita en $\widehat{AB}$.

Definición 17.4. La **cuerda** de un arco $\widehat{AB}$ es $\overline{AB}$.

De la definición de longitud de arco y de la desigualdad del triángulo se deduce el siguiente teorema.

Teorema 17.3. *La longitud de un arco es mayor que la de su cuerda.*

Lema 17.1. *El área de un círculo de radio r es menor o igual que πr^2.*

Demostración. Sea c una circunferencia con centro Q y radio r, $(P_k)_{k=1}^{n+1}$ la sucesión de vértices de una poligonal cerrada simple $\bigcup_{k=1}^{n} \overline{P_k P_{k+1}}$ que está inscrita en c. La región delimitada por tal poligonal tiene un área de $\sum_{k=1}^{n} \frac{P_k P_{k+1}}{2} a_k$, donde a_k es la altura correspondiente a la base $P_k P_{k+1}$ en el triángulo $\triangle P_k Q P_{k+1}$. El lema se deduce del hecho de que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(P_k P_{k+1})}{2} a_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{(P_k P_{k+1})}{2} r = \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{n} P_k P_{k+1} \leq \frac{r}{2} 2\pi r = \pi r^2. \quad \blacksquare$$

Lema 17.2. *El área de un círculo de radio r es mayor o igual que πr^2.*

Demostración. Sea c una circunferencia de radio r y $\alpha < \pi r^2$. Como $\alpha < \pi r^2$, entonces $\frac{2\alpha}{r} < 2\pi r$ por lo que existe una sucesión de vértices $(P_k)_{k=1}^{n+1}$ en c de una poligonal cerrada simple $\bigcup_{k=1}^{n} \overline{P_k P_{k+1}}$ tal que $\sum P_k P_{k+1} > \frac{2\alpha}{r}$.

Ahora, sea $P_k^* \in c$ tal que $\overline{QP_k^*} \perp \overline{P_k P_{k+1}}$. El área $\mathrm{a}(\triangle P_k Q P_{k+1})$ es menor que el área $\mathrm{a}(\square P_k Q P_{k+1} P_k^*)$. Pero la región delimitada por la poligonal cerrada simple cuyos vértices son los puntos P_k y P_k^* con $k \in J_n$ tiene área $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{a}(\square P_k Q P_{k+1} P_k^*)$. Pero

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{a}(\square P_k Q P_{k+1} P_k^*) = \sum_{k=1}^{n} r \frac{(P_k P_{k+1})}{2} = \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{n} P_k P_{k+1} > \frac{r}{2} \left(\frac{2\alpha}{r} \right) = \alpha.$$

Es decir, el área del círculo de radio r es mayor que α para todo $\alpha < \pi r^2$, por lo tanto el área es mayor o igual que πr^2. $\blacksquare$

Los lemas 17.1 y 17.2 nos conducen al siguiente teorema.

Teorema 17.4. *El área de un círculo de radio r es πr^2.*

De manera similar a como se demostró el teorema 17.4 (usando lemas similares a los lemas 17.1 y 17.2 que el lector podrá enunciar y cuyas demostraciones son análogas) se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 17.5. *El área de un sector determinado por un arco cuyo ángulo central mide θ es $\frac{1}{2} r^2 \theta$.*

El lector que haya leído y comprendido lo que va de la sección, debe ser capaz de demostrar fácilmente el siguiente teorema.

Teorema 17.6. *Si un sector circular está inscrito en una región poligonal, entonces el área del sector circular es menor que el área de la región poligonal. Si una región poligonal está inscrita en un sector circular, entonces el área de la región poligonal es menor que el área del sector circular.*

Definición 17.5. Por definición acordaremos que el **área** de una circunferencia es cero.

Ejercicio 17.1. Demostrar que $\pi > 2$.

Ejercicio 17.2. Demostrar que $\pi > 2\sqrt{2}$.

Ejercicio 17.3. Demostrar que $\pi > 3$.

Ejercicio 17.4. Demostrar que $\pi < 4$.

Ejercicio 17.5. Demostrar que $\pi < 4(1 - (\sqrt{2} - 1)^2)$.

Ejercicio 17.6. Demostrar el teorema 17.6.

18. Funciones Trigonométricas

Definición 18.1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo tal que $\angle C$ es recto, donde $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son los ángulos del triángulo. Si $\theta = \measuredangle A$, $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$; definimos las **funciones trigonométricas** **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** evaluadas en θ como:

$$\operatorname{sen}\theta = \tfrac{a}{c}, \qquad \cos\theta = \tfrac{b}{c},$$

$$\tan\theta = \tfrac{a}{b}, \qquad \cot\theta = \tfrac{b}{a},$$

$$\sec\theta = \tfrac{c}{b} \quad \text{y} \qquad \csc\theta = \tfrac{c}{a}$$

respectivamente.

Observemos, por el corolario de semejanza AA, que estos valores dependen solamente del valor de θ y no del triángulo rectángulo que se haya tomado con $\measuredangle A = \theta$. De esto podemos observar que si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta, \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \operatorname{sen}\theta,$$

$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta, \qquad \cot(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta,$$

$$\sec(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \csc\theta \quad \text{y} \qquad \csc(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \sec\theta.$$

Observemos que conociendo el seno y el coseno se conocen las demás funciones trigonométricas pues

$$\tan = \tfrac{\operatorname{sen}}{\cos}, \qquad \cot = \tfrac{\cos}{\operatorname{sen}},$$

$$\sec = \tfrac{1}{\cos} \quad \text{y} \qquad \csc = \tfrac{1}{\operatorname{sen}}.$$

Deduciremos a continuación los valores de las funciones trigonométricas en 30°, 45° y 60°.

Tomemos un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ tal que su ángulo agudo $\angle A$ mida 30° y la hipotenusa tenga longitud 2. El ángulo $\angle B$ del triángulo mide 60° por ser complementario. Si tomamos B' en $\overrightarrow{BC}$ tal que $BB' = 2BC$, entonces el $\angle B'$ del $\triangle AB'C$ mide 60° y el $\angle B'AC$ mide 30° (LAL), por lo que el $\triangle ABB'$ tiene todos sus ángulos congruentes, por lo que sus lados también son congruentes, de modo que

$BC = 1$ pues C es el punto medio de $\overline{BB'}$. Ahora, por el teorema de Pitágoras
$$(AC)^2 + 1^2 = 2^2,$$
es decir $AC = \sqrt{3}$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \tfrac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{sen} 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}, \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Ahora tomemos un cuadrado $\square ABCD$ cuyos lados tengan longitud 1. Cada ángulo del cuadrado mide 90° y $\measuredangle BAC = 45^\circ$ ¿por qué? Por el teorema de Pitágoras $AC = \sqrt{2}$, de tal suerte que

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45^\circ = 1, \qquad \cot 45^\circ = 1,$$

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2} \quad \text{y} \qquad \csc 45^\circ = \sqrt{2}.$$

19. Sistema de Coordenadas

En esta sección daremos la terminología necesaria para poder empezar a incursionar en la disciplina de la geometría analítica.

Definición 19.1. Sean dos rectas perpendiculares X e Y que se intersecan en un punto O. En ambas rectas tomamos un sistema de coordenadas tal que al punto O le corresponde el cero. Al plano que incluye las rectas X e Y le llamamos **plano XY**.

Definición 19.2. Dado un plano XY, haremos corresponder a cada punto P del plano XY una pareja ordenada (x, y) de números reales de tal forma que x es la coordenada del punto A en la recta X tal que A está en la recta perpendicular a X que pasa por P (es decir, A es la proyección de P en X) y y es la coordenada del punto B en la recta Y tal que B está en la recta perpendicular a Y que pasa por P (es decir, B es la proyección de P en Y). A una correspondencia como la anterior se le llama **sistema de coordenadas del plano** XY. A la recta X se le llama **eje de las abscisas** y a la recta Y se le llama **eje de las ordenadas**. A la pareja ordenada (x, y) que le corresponde a P le llamamos **coordenadas** de P o **pareja de coordenadas** de P. El número x es la **primera coordenada** de P o **abscisa** de P y el número y es la **segunda coordenada** de P u **ordenada** de P. Al conjunto de puntos $A \in$ X cuya primera coordenada no sea negativa se le llama **semieje X positivo** o **parte positiva del eje X**. Al punto O cuyas coordenadas son $(0, 0)$ se le llama **origen** del sistema de coordenadas.

Definición 19.3. En el plano XY al eje X y a todas las rectas paralelas al eje X se les llama rectas **horizontales**. Al eje Y y a todas las rectas paralelas al eje Y se les llama rectas **verticales**. Cualquier rayo o segmento incluido en una recta horizontal se llama **horizontal** y cualquier rayo o segmento incluido en una recta vertical se llama **vertical**.

En lo sucesivo, mientras no se indique otra cosa, el plano XY será el conjunto de parejas ordenadas (x, y) con $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$, es decir XY $= \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Con estas condiciones el punto P cuyas coordenadas sean (x, y) será simplemente $P = (x, y)$.

Teorema 19.1. *Si (x_0, y_0) está en una recta horizontal l, entonces*

$$l = \{(x, y_0) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Demostración. Como l es horizontal, entonces es perpendicular al eje Y y lo corta en $(0, y_0)$. Ahora, en el plano XY la perpendicular al eje Y en $(0, y_0)$ es única, de modo que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $(x, y_0) \in l$. Recíprocamente, si $(x, y) \in l$, entonces la segunda coordenada es y_0, pues la proyección de (x, y) en el eje Y es $(0, y_0)$, es decir $y = y_0$. ∎

La demostración del siguiente teorema es análoga a la del anterior.

Teorema 19.2. *Si (x_0, y_0) está en una recta vertical l, entonces*

$$l = \{(x_0, y) : \ y \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 19.4. Si (x_0, y_0) está en una recta no vertical, el lado de la recta en el cual está $(x_0, y_0 + 1)$ se llama el **lado de arriba** de la recta y al lado opuesto se le llama el **lado de abajo** de la recta.

Si (x_0, y_0) está en una recta no horizontal, el lado de la recta en el cual está $(x_0 + 1, y_0)$ se llama el **lado a la derecha** de la recta y al lado opuesto se le llama el **lado a la izquierda** de la recta.

Definición 19.5. En el plano XY al conjunto de puntos que están arriba del eje X y a la derecha del eje Y se le llama **primer cuadrante**; al conjunto de puntos que están arriba del eje X y a la izquierda del eje Y se le llama **segundo cuadrante**; al conjunto de puntos que están abajo del eje X y a la izquierda del eje Y se le llama **tercer cuadrante**, y al conjunto de puntos que están abajo del eje X y a la derecha del eje Y se le llama **cuarto cuadrante**.

Definición 19.6. Una recta que no es vertical ni horizontal se llama recta **inclinada** u **oblicua**.

Del teorema de Pitágoras se sigue la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en el plano dadas sus coordenadas. Los detalles de la demostración se dejan al lector.

Teorema 19.3. Fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano. *Sea $P = (x, y)$ y $Q = (a, b)$.*

$$PQ = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Definición 19.7. Sean P y Q dos puntos tales que tienen la misma abscisa y la ordenada de P es menor que la de Q. En estas condiciones decimos que Q está **arriba** de P o que P está **abajo** de Q.

Definición 19.8. Sean P y Q dos puntos tales que tienen la misma ordenada y la abscisa de P es menor que la de Q. En estas condiciones decimos que Q está a la **derecha** de P o que P está a la **izquierda** de Q.

Así como se definió un sistema de coordenadas en el plano XY también se puede definir un sistema de coordenadas en el espacio de tres dimensiones de la siguiente forma.

Definición 19.9. Supongamos que tenemos el plano XY con su sistema de coordenadas. Sea Z la recta perpendicular al plano XY en el origen O y tómese en la recta Z un sistema de coordenadas tal que la coordenada de O sea el número 0. Tomemos la biyección entre el espacio y el conjunto $\mathbb{R}^3$ de ternas de números reales tal que a cada punto P del espacio le hace corresponder la única terna (x, y, z) con la propiedad de que (x, y) son las coordenadas de la proyección del punto P en el plano XY e y es la coordenada de la proyección del punto P en la recta Z. Una biyección como la anterior se llama **sistema de coordenadas del espacio**; a la terna (x, y, z) se le llama **coordenadas** del punto P (con respecto al sistema de coordenadas establecido); se dice que los números x, y, y z son las **primera**, **segunda** y **tercera** coordenadas respectivamente del punto P. De acuerdo al sistema de coordenadas en el espacio establecido, a las rectas X, Y y Z se les llama **ejes** del espacio.

Deduciremos ahora la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos del espacio dadas sus coordenadas.

Teorema 19.4. Fórmula para la distancia entre dos puntos en el espacio. *Sea P un punto en el espacio con coordenadas (x, y, z) y Q otro punto en el espacio con coordenadas (a, b, c). La distancia entre P y Q está dada por*

$$PQ = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Demostración. Haremos la demostración con todo detalle para todos los posibles casos. Sean P' y Q' las proyecciones de P y Q al plano XY, P'' y Q'' las proyecciones de P y Q al eje Z y V el punto con coordenadas (a, b, z).

Observemos que $QV = Q''P''$ (en el caso en que $Q, V \in$ Z se tiene que $Q = Q''$ y que $V = P''$, y en el caso en que Q y V no están en Z se tiene un rectángulo $\square QVP''Q''$, por lo que los lados opuestos $\overline{QV}$ y $\overline{Q''P''}$ son congruentes.

Analicemos primero el caso extremo en que $(x, y) = (a, b)$. En este caso $PQ = P'Q' = |z - c| = \sqrt{(z-c)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, por lo que la fórmula es válida para este caso.

Supongamos ahora que $(x, y) \neq (a, b)$, es decir que$P' \neq Q'$

Si $z = 0$, entonces $P = P'$ y $V = Q'$ por lo que la distancia entre P y V es $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. En este caso si $c = 0$, entonces $Q = V$, por lo que $PQ = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ y si $c \neq 0$, entonces $QV = Q''V'' = |z-c|$ y por el teorema de Pitágoras y observando V es el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo $\triangle PVQ$ tenemos $PQ = \sqrt{(PV)^2 + (QV)^2} = \sqrt{(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})^2 + |z-c|^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ por lo que la fórmula es válida cuando $z = 0$.

Si $z \neq 0$, entonces en el rectángulo $\square PVQ'P'$ los segmentos $\overline{PV}$ y $\overline{P'Q'}$ son lados opuestos, por lo que $PV = P'Q' = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. En este caso, si $Q = V$, entonces $z = c$ y $PQ = PV = P'Q' = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, y si $z \neq c$, entonces $QV = Q''V'' = |z-c|$ y por el teorema de Pitágoras y observando V es el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo $\triangle PVQ$ tenemos $PQ = \sqrt{(PV)^2 + (QV)^2} = \sqrt{(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})^2 + |z-c|^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ por lo que la fórmula es válida cuando $z \neq 0$, con lo que terminamos la demostración. ∎

La mayoría de los libros de análisis matemático, geometría analítica y álgebra lineal en sus primeros capítulos definen la **distancia** o **distancia euclidiana** entre dos elementos $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ como

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_n - y_n)^2},$$

que es una generalización de la fórmula para la distancia entre dos puntos en espacios de cualquier dimensión.

A continuación se dará un teorema que describe los puntos de una recta que pasa por dos puntos dados.

Teorema 19.5. *Sean $Q = (x_0, y_0)$ y $P = (x_1, y_1)$ puntos en el plano XY. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $\overleftrightarrow{QP} = \{S \in \mathbb{R}^2 : S = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1)$ *para algún* $t \in \mathbb{R}\}$.

(ii) $\overline{QP} = \{S \in \mathbb{R}^2 : \ S = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1)$ *para algún* $t \in [0;1]\}$.

(iii) *En el sistema de coordenadas de la recta* $\overleftrightarrow{QP}$ *que le hace corresponder a* Q *el cero y a* P *un número positivo tenemos que la coordenada del punto* $S = ((1-t)x_0+tx_1, (1-t)y_0+ty_1)$ *es* $t(QP)$.

Antes de demostrar el teorema démosle una interpretación física. Si una párticula se mueve a velocidad constante a lo largo de la recta $\overleftrightarrow{QP}$ de tal manera que en una unidad de tiempo recorre una distancia QP y en el tiempo $t_0 = 0$ la partícula se encuentra en la posición del punto Q avanzando hacia P, entonces en un tiempo cualquiera $t \neq 0$ la partícula estará (o estuvo) en la posición $S(t) = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1)$, por ejemplo en el tiempo $t_1 = 1$ la partícula se encontrará en la posición $P = (x_1, y_1)$. Procedamos ahora a hacer la demostración del teorema.

Demostración. Sea $S(t) = ((1-t)x_0+tx_1, (1-t)y_0+ty_1)$. Observemos primero que para cualquier número real t la distancia entre Q y $S(t)$ está dada por $d(Q, S(t)) = \sqrt{(tx_1 - tx_0)^2 + (ty_1 - ty_0)^2} = |t|QP$ y la distancia entre $S(t)$ y P está dada por $d(S(t), P) = \sqrt{((1-t)(x_1 - x_0))^2 + ((1-t)(y_1 - y_0))^2} = |1-t|QP$. Si en particular $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$d(Q, S(t)) + d(S(t), P) = tQP + (1-t)QP = QP$$

por lo que $S(t) \in \overline{QP}$.

Sea ahora x un número real y R el punto en $\overleftrightarrow{QP}$ con coordenada x (de acuerdo al sistema de coordenadas que le asigna 0 a Q y un número positivo a P), afirmamos que $R = S(\frac{x}{QP})$. En efecto, si $R \in \overline{QP}$, entonces $0 \leq x \leq QP$ y además, puesto que la distancia entre Q y $S(\frac{x}{QP})$ es $\frac{x}{QP}QP = x$, se tiene $R = S(\frac{x}{QP})$; así, hemos demostrado (ii). Si $R \in \overrightarrow{QP}$ y $x > QP$, es decir $R \notin \overline{QP}$, entonces $QP + d(P, S(\frac{x}{QP}) = QP + |1 - \frac{x}{QP}|QP = QP + (\frac{x}{QP} - 1)QP = x = d(Q, S(\frac{x}{QP}))$ por lo que P está entre Q y $S(\frac{x}{QP})$ y la coordenada de $S(\frac{x}{QP})$ es x, es decir $R = S(\frac{x}{QP})$. Finalmente, si $x < 0$, entonces $d(S(\frac{x}{QP}), Q) + QP = \frac{|x|}{QP}QP + QP = (1 - \frac{x}{QP})QP = |1 - \frac{x}{QP}|QP = d(S(\frac{x}{QP}), P)$, por lo que Q está entre P y $S(\frac{x}{QP})$ y la coordenada de $S(\frac{x}{QP})$ es $-d(S(\frac{x}{QP}), Q) = \frac{-|x|}{QP}QP = x$, es decir $S(\frac{x}{QP}) = R$, por lo que la afirmación de que $R = S(\frac{x}{QP})$ está demostrada, por lo tanto $\overleftrightarrow{QP} \subset \{S \in \mathbb{R}^2 : S = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1)$ para algún $t \in \mathbb{R}\}$. Para demostrar que $\{S \in \mathbb{R}^2 : \ S = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1)$ para algún $t \in \mathbb{R}\} \subset \overleftrightarrow{QP}$

solamente observemos que el punto $S(t) = S(\frac{tQP}{QP})$ es el punto sobre la recta con coordenada tQP con lo que queda demostrado (i) y (iii). ∎

Ejercicio 19.1. Si $Q = (x_0, y_0)$ y $P = (x_1, y_1)$, entonces el rayo $\overrightarrow{QP} = \{(x, y) : \ x = (1-t)x_0 + tx_1$ y $y = (1-t)y_0 + ty_1$ para algún $t \geq 0\}$.

Queda como ejercicio para el lector la demostración del siguiente teorema que es una generalización del anterior para el caso en que P y Q son puntos cualesquiera en el espacio de tres dimensiones.

Teorema 19.6. *En el espacio sean Q y P puntos con coordenadas (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) respectivamente. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $\overleftrightarrow{QP} = \{S :$ *las coordenadas de S son* $((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1, (1-t)z_0 + tz_1)$ *para algún* $t \in \mathbb{R}\}$.

(ii) $\overline{QP} = \{S :$ *las coordenadas de S son* $((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1, (1-t)z_0 + tz_1)$ *para algún* $t \in [0; 1]\}$.

(iii) *En el sistema de coordenadas de la recta $\overleftrightarrow{QP}$ que le hace corresponder a Q el cero y a P un número positivo tenemos que la coordenada del punto $S = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1, (1-t)z_0 + tz_1)$ es $t(QP)$.*

Ejercicio 19.2. Demostrar el teorema 19.1.

20. Volúmenes

En esta sección se deducirán las fórmulas para obtener los volúmenes de los principales cuerpos geométricos como son los de los prismas, pirámides, los cuerpos cónicos y esféricos.

A continuación se generalizará el concepto de semejanza.

Definición 20.1. Dos subconjuntos del espacio S_1 y S_2 son **semejantes** si existe una correspondencia biunívoca $f : S_1 \longrightarrow S_2$ entre S_1 y S_2 y una constante positiva α tal que para cualesquiera dos puntos P y Q de S_1 se tiene que la distancia entre P y Q es α veces la distancia entre $f(P)$ y $f(Q)$. A una correspondencia como la anterior se le llama **semejanza**. Al hecho de que S_1 y S_2 sean semejantes se le denota así

$$S_1 \sim S_2.$$

Observemos que con la definición anterior se conserva la idea de que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma.

Definamos ahora lo que es un prisma.

Definición 20.2. Sea B una región poligonal en un plano Π_1 y Π_2 un plano paralelo a Π_1; sea además l una recta que corta a Π_1 y Π_2 pero que no corta a B. A la unión de todos los segmentos paralelos a l tales que uno de sus extremos está en B y el otro en Π_2 se le llama **prisma**. A la región poligonal B se le llama **base** del prisma y a la distancia entre Π_1 y Π_2 se le llama **altura** del prisma. Cuando la recta l es perpendicular a Π_1, entonces el prisma se llama **prisma recto**. Cuando la base del prisma es una región delimitada por un paralelogramo, entonces el prisma se llama **paralelepípedo**. Cuando la base de un prisma recto es una región rectangular, al prisma recto se le llama **paralelepípedo rectangular**. Cuando la intersección de un prisma con un plano paralelo al plano en el cual está una de las bases es no vacía, entonces a la intersección se le llama **sección transversal** del prisma.

Definiremos ahora lo que es una pirámide.

Definición 20.3. Sea B una región poligonal en un plano Π y V un punto que no está en Π. A la unión de todos los segmentos tales que uno de sus extremos es V y el otro está en B se le llama **pirámide**. A la región poligonal B se le llama **base** de la pirámide, al punto V se le llama **vértice** de la pirámide y a la distancia entre el plano Π y el vértice V se le llama **altura** de la pirámide. Cuando la intersección de una pirámide con un plano paralelo al plano en el cual está la base es no vacía, entonces a la intersección se le llama **sección transversal** de la pirámide.

Definición 20.4. Sea B un conjunto en un plano Π_1 y Π_2 un plano paralelo a Π_1; sea además l una recta que corta a Π_1 y Π_2 pero que no corta a B. A la unión de todos los segmentos paralelos a l tales que uno de sus extremos está en B y el otro en Π_2 se le llama **cilindro**. Al conjunto B se le llama **base** del cilindro y a la distancia entre Π_1 y Π_2 se le llama **altura** del cilindro. Cuando la recta l es perpendicular a Π_1, entonces el cilindro se llama **cilindro recto**. Cuando la intersección de un cilindro con un plano paralelo al plano en el cual está una de las bases es no vacía, entonces a la intersección se le llama **sección transversal** del cilindro. Cuando la base de un cilindro es un círculo, decimos que el cilindro es un **cilindro circular**.

Observemos que los prismas son los cilindros cuya base es una región poligonal y que todos los cilindros tienen dos bases.

Definición 29.5. Sea B un conjunto contenido en un plano Π y V un punto que no está en Π. A la unión de todos los segmentos tales que uno de sus extremos es V y el otro está en B se le llama **cono**. Al conjunto B se le llama **base** del cono, al punto V se le llama **vértice** del cono y a la distancia entre el plano Π y el vértice V se le llama **altura** del cono. Cuando la intersección de un cono con un plano paralelo al plano en el cual está la base es no vacía, entonces a la intersección se le llama **sección transversal** del cono. Cuando la base del cono es un círculo, decimos que el cono es un **cono circular**. Si el segmento, cuyos extremos son el vértice del cono circular y el centro del círculo B, es perpendicular al plano Π, entonces decimos que el cono circular es un **cono circular recto**.

Observemos que cualquier pirámide es un cono cuya base es una región poligonal.

Definición 20.6. Sea C un punto en el espacio y r un número positivo. Al conjunto de todos los puntos del espacio que están a una distancia r del punto C se le llama **esfera**. Al punto C se le llama **centro** de la esfera y al número r se le llama el **radio** de la esfera. Al conjunto de todos los puntos del espacio que están a una distancia menor que r del centro C de la esfera se le llama **interior** de la esfera y al conjunto de todos los puntos del espacio que están a una distancia mayor que r de C se le llama **exterior** de la esfera. A la unión de una esfera con su interior se le llama **cuerpo esférico** y el centro y radio de la esfera serán el **centro** y **radio** del cuerpo esférico respectivamente. Al igual que en la circunferencia, al doble del radio se le llama **diámetro** (de la esfera o del cuerpo esférico).

Introduzcamos ahora la idea de volumen de subconjuntos del espacio la cual es similar a la de área.

El término de volumen será el último no definido en este capítulo. Aceptemos que a algunos subconjuntos Ω del espacio se les asigna un único número $\mathrm{vol}(\Omega)$ mayor o igual que cero que se llama el **volumen** de Ω y que satisface los siguientes 6 postulados.

Postulado 20.20. Postulado de la congruencia para volúmenes. *Si dos conjuntos con volumen son congruentes, entonces tienen el mismo volumen.*

Postulado 20.21. Postulado de adición de volúmenes. *Si Ω es la unión de dos conjuntos en el espacio Ω_1 y Ω_2 con volúmenes $\mathrm{vol}(\Omega_1)$ y $\mathrm{vol}(\Omega_2)$ respectivamente, y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Entonces*

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \mathrm{vol}(\Omega_1) + \mathrm{vol}(\Omega_2).$$

Postulado 20.22. *Sean Ω_1 y Ω_2 son dos conjuntos con volumen.*

(i) *Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Entonces*

$$\mathrm{vol}(\Omega_2 \backslash \Omega_1) = \mathrm{vol}(\Omega_2) - \mathrm{vol}(\Omega_1).$$

(ii) *Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ y $\mathrm{vol}(\Omega_2) = 0$, entonces $\mathrm{vol}(\Omega_1) = 0$.*

(iii) *Si Ω_1 está incluido en algún plano, entonces $\mathrm{vol}(\Omega_1) = 0$.*

(iv) *$\Omega_1 \cup \Omega_2$ es un conjunto con volumen.*

Postulado 20.23. *Si la base de un cilindro recto es un conjunto con área, entonces el volumen del cilindro es el producto del área de la base y su altura.*

Postulado 20.24. Principio de Cavalieri. *Dados dos subconjuntos del espacio y un plano. Supongamos que los dos conjuntos tiene asignado un volumen. Si todo plano paralelo al plano dado que interseca a uno de los dos conjuntos, interseca también al otro y las secciones intersecadas de ambos conjuntos tienen áreas iguales. Entonces ambos conjuntos tienen el mismo volumen.*

Postulado 20.25. *Los cuerpos esféricos, los conos cuya base es un conjunto con área y los cilindros cuya base es un conjunto con área son conjuntos con volumen.*

El siguiente teorema, que se deduce directamente del postulado 20.23 y de la fórmula para hallar el área de un círculo, nos da la importante fórmula para calcular el volumen de un cilindro circular recto.

Teorema 20.1. *El volumen de un cilindro circular recto con altura h y radio de la base r, es $\pi r^2 h$.*

Teorema 20.2. *Toda sección transversal de un cilindro es congruente con su base.*

Demostración. Supongamos que las dos bases distintas de un cilindro son B_1 y B_2 y que l es la recta tal que el cilindro es la unión de los segmentos paralelos a l con extremos en B_1 y B_2. Si B' es una sección transversal del cilindro, entonces existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos B_1 y B' tal que a cualquier punto $P \in B_1$ le corresponde el punto $P' \in B'$ tal que, $\overline{PP'} \parallel l$. Ahora, si P y Q son dos puntos diferentes en B_1 y P' y Q' son los puntos correspondientes en B' (de acuerdo a la correspondencia anterior), podemos observar que $\square PQQ'P'$ es un paralelogramo, por lo cual $PQ = P'Q'$, es decir la correspondencia es una congruencia, de donde concluímos que $B_1 \cong B'$, con lo que hemos demostrado que toda sección transversal de un cilindro es congruente con su base. ∎

En lo sucesivo, para ahorrar tiempo y hacer el tratado más ameno, haremos uso del postulado 20.25 sin mencionarlo explícitamente. Una generalización del postulado 20.23 es el siguiente teorema.

Teorema 20.3. *El volumen de un cilindro es el producto del área de la base y su altura.*

Demostración. Supongamos que tenemos un cilindro C con bases B_1 y B_2 en los planos Π_1 y Π_2 respectivamente. Debido al teorema anterior, el cilindro recto C', el cual una base es B_1 y la otra está contenida en Π_2, tiene al igual que el cilindro C todas sus secciones transversales congruentes con B_1. Ahora, debido al postulado de Cavalieri y al postulado 16.16, ambos cilindros tienen el mismo volumen. De acuerdo al postulado 20.23, el volumen de C' (y por lo tanto también el de C) es el producto del área de la base y su altura. ∎

Teorema 20.4. *Dada una pirámide con base triangular y altura h. El área de la sección transversal de la pirámide que se encuentra a una distancia x del plano en el cual está la base, es $(\frac{h-x}{h})^2$ veces el área de la base.*

Demostración. Dada una pirámide con base triangular T y altura h; sean A, B y C los vértices en la base T y sea D el vértice de la pirámide tomando a T como base. Sean $A^{'}$, $B^{'}$ y $C^{'}$ los puntos que están en $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente y que además están a una distancia x del plano que contiene a la base T. Tomemos la recta l que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a T. Sean además $P, P^{'} \in l$ tales que P está en el plano que contiene a T y $P^{'}$ está en el plano en el que están los puntos $A^{'}$, $B^{'}$ y $C^{'}$. Por el teorema fundamental de la proporcionalidad tenemos que

$$\frac{AD}{A'D} = \frac{BD}{B'D} = \frac{CD}{C'D} = \frac{PD}{P'D} = \frac{h}{h-x}.$$

Ahora, por el teorema de semejanza LAL, tenemos que

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{h}{h-x}.$$

Así, utilizando el teorema de las áreas de triángulos semejantes, concluímos la demostración del teorema. ∎

Teorema 20.5. *Si dos pirámides con bases triangulares tienen la misma altura y bases congruentes, entonces tienen el mismo volumen.*

Demostración. Supongamos que tenemos dos pirámides Υ_1 y Υ_2 con altura h, bases triangulares T_1 y T_2, y vértices V_1 y V_2 respectivamente. Sea $V_1^{'}$ el punto del mismo lado que V_1 del plano que contiene a T_1, tal que la pirámide $\Upsilon_1^{'}$ con base triangular T_1 y vértice $V_1^{'}$ es congruente con Υ_2. (¡Verificar que es posible localizar $V_1^{'}$ con tales propiedades!)

Por el teorema 20.4 y el principio de Cavalieri tenemos que Υ_1 y $\Upsilon_1^{'}$ tienen el mismo volumen, pero por el postulado de la congruencia para volúmenes tenemos que $\Upsilon_1{}'$ y Υ_2 tienen el mismo volumen. De lo anterior concluímos que las pirámides Υ_1 y Υ_2 tienen el mismo volumen. ∎

Teorema 20.6. *El volumen de una pirámide con base triangular es un tercio del área de la base multiplicada por la altura.*

Demostración. Sea Υ una pirámide de altura h y base triangular T, donde A, B y C son los vértices de la base. Sea Ψ un prisma recto con base T y altura h, y l una recta perpendicular al plano que contiene a T y que no interseca a Ψ. Sea $T^{'}$ la otra base de Ψ, y $A^{'}$, $B^{'}$ y $C^{'}$ los vértices de $T^{'}$ tales que los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son paralelos a l. Observemos ahora que debido a los postulados 20.21 y 20.22, el volumen de Ψ es la suma de los volúmenes de Υ_1, Υ_2 y Υ_3, donde Υ_1 es la pirámide con base T y vértice $A^{'}$; Υ_2 es la pirámide con base $T^{'}$ y vértice B, y Υ_3 es la pirámide cuya base es la región triangular con vértices B, C y $C^{'}$, y el vértice correspondiente a tal base es el punto $A^{'}$.

Afirmamos que las pirámides Υ_1, Υ_2 y Υ_3 tienen el mismo volumen. En efecto, las pirámides Υ_1 y Υ_2 tienen el mismo volumen debido al teorema 20.5, mientras que las pirámides Υ_2 y Υ_3 tienen el mismo volumen también por el teorema 20.5 pero tomando a la región triangular con vértices B, $B^{'}$ y $C^{'}$ como base de Υ_2, en cuyo caso el vértice correspondiente es $A^{'}$. De esta forma, el volumen de Υ_1 es un tercio del volumen del prisma Ψ. De nuevo por el teorema 20.5, el volumen de Υ es un tercio del volumen del prisma Ψ, pero debido al postulado 20.23 el volumen de la pirámide Υ es un tercio del área de su base T multiplicado por su altura h. ∎

Como consecuencia inmediata del teorema 20.6 y de los postulados 20.21 y 20.22 se tiene el corolario siguiente.

Corolario 20.6.1. *El volumen de una pirámide es un tercio del área de la base multiplicada por la altura.*

Se deja al lector los detalles de la demostración.

Teorema 20.7. *Dado un cono circular recto de altura h y radio de la base r. El radio r_0 de la sección transversal cuyo centro está a una distancia x del centro de la base, está dado por $r_0 = \frac{(h-x)}{h}r$.*

Demostración. Sea V el vértice del cono y Q el centro de la base. Tomemos la sección transversal A del cono que está a una distancia x de la base y sea P el punto de intersección de A y $\overline{VQ}$. Observemos que A es un círculo con centro en P. En efecto, hay una correspondencia biunívoca entre los puntos P' de A y los puntos Q' de la base B del cono de tal manera que P' es el único punto en la intersección de $\overline{VQ'}$ y A. Ahora, por el teorema fundamental de la proporcionalidad y por el teorema de semejanza LAL, tenemos que si P' está en el plano que contiene a A, entonces $P' \in A$ si y sólo si $PP'\frac{h}{h-x} = QQ'$ para algún $Q' \in B$, es decir $PP' \leq \frac{(h-x)}{h}r$ si y sólo si $P' \in A$. Lo anterior demuestra que A es un círculo con centro en P y radio $r_0 = \frac{(h-x)}{h}r$. ∎

Una generalización del teorema anterior es el siguiente.

Teorema 20.8. *Dado un cono circular de altura h y radio de la base r. El radio r_0 de la sección transversal cuyo centro está a una distancia x del plano que contiene a la base, está dado por $r_0 = \frac{(h-x)}{h}r$.*

Demostración. Debido al teorema 20.7, es suficiente suponer que el cono es un cono circular, pero no es un cono circular recto. Sean V el vértice del cono, P la proyección de V al plano que contiene a la base, Q un punto en el borde de la base, Q_0 el punto en el borde de la sección transversal que está entre Q y el vértice V, C el centro de la base, C_0 el centro de la sección transversal y P_0 el punto donde se corta el segmento $\overline{PV}$ y el plano que contiene a la sección transversal. Por el teorema fundamental de la proporcionalidad y el teorema de semejanza LAL, tenemos que

$$\frac{r}{r_0} = \frac{QV}{Q_0V} = \frac{PV}{P_0V} = \frac{h}{(h-x)},$$

de donde tenemos que $r_0 = \frac{(h-x)}{h}r$. ∎

Del teorema anterior y de la fórmula del área de un círculo se concluye el corolario siguiente.

Corolario 20.8.1. *Dado un cono circular de altura h y radio de la base r. El área de la sección transversal cuyo centro está a una distancia x del plano que contiene a la base, está dado por $(\frac{h-x}{h})^2\pi r^2$.*

Teorema 20.9. *El volumen de un cono circular de altura h y radio de la base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.*

Demostración. Dado un cono circular de altura h y radio de la base r, sean V su vértice y Π el plano que contiene a la base. Tomemos una región triangular T contenida en el plano Π con área πr^2 y comparemos a la pirámide con base T y vértice V con el cono dado. De acuerdo al corolario 20.8.1 y al teorema 20.4, la sección transversal del cono y la de la pirámide, contenidas ambas en un mismo plano paralelos a Π, tienen la misma área, por lo que aplicando el principio de Cavalieri tenemos que el volumen de tal pirámide es igual al volumen del cono dado. Así, el volumen del cono es igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. ■

A continuación deduciremos una fórmula para calcular el volumen de un cuerpo esférico.

Teorema 20.10. *El volumen de un cuerpo esférico de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

Demostración. Sea S un cuerpo esférico con centro en un punto O y radio r. Tomemos un plano Π al cual pertenezca el centro de S. Sea C el cilindro circular recto de altura r cuya base es la intersección de S y Π y tal que los puntos que no están en la base están en un lado E^+ de Π. Sea K el cono con vértice O cuya base es la base del cilindro C que está en E^+.

Procederemos primero a calcular el volumen de la parte de S que está en E^+.

Sea S^+ la intersección de S y E^+. Veamos que el volumen del cono K es igual al de $C \backslash S^+$. Tomemos un plano $\Pi_0 \subset E^+$, paralelo a Π, tal que la distancia r_0 ente Π_0 y O sea menor que r. Por el teorema de Pitágoras podemos ver que la intersección de S^+ y Π_0 es un círculo de radio $\sqrt{r^2 - r_0^2}$, por lo que el área de la intersección de $C \backslash S^+$ y Π_0 es

$$\pi r^2 - \pi \left(\sqrt{r^2 - r_0^2} \right)^2 = \pi r_0^2,$$

la cual es la misma que la de la sección transversal del cono K (la intersección de K con Π_0). De esta manera, por el principio de Cavalieri tenemos que K y $C \backslash S^+$ tienen el mismo volumen, el cual debido al teorema 20.9 es igual a $\frac{1}{3}\pi r^3$.

Ahora, por el postulado 20.21, el volumen de S^+ es el volumen del cilindro menos el de $C \backslash S^+$, es decir es

$$\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Análogamente se demuestra que el volumen de la intersección de la esfera S con el otro lado de Π diferente de E^+ es $\frac{2}{3}\pi r^3$. Finalmente, por los postulados 20.21 y 20.22 se tiene que el volumen de S es $\frac{4}{3}\pi r^3$. ■

II. TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

1. Ángulos Dirigidos y sus Medidas

En la geometría elemental se estudió el concepto de ángulo y sus medidas, solamente se consideraron ángulos cuyas medidas eran mayores que 0 y menores que 180°. Aquí definiremos el concepto de ángulo dirigido y su medida que tomará valores más generales.

Definición 1.1. Sean Q, P y R tres puntos en el plano XY con $P, R \neq Q$. Definimos el **ángulo dirigido** (o **ángulo orientado**) $\overleftarrow{\angle} RQP$ o el **ángulo que va de $\overrightarrow{QR}$ a $\overrightarrow{QP}$** como la pareja ordenada $(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP})$. Al punto Q se le llama **vértice** del ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} RQP$, al rayo $\overrightarrow{QR}$ se le llama **lado inicial** y al rayo $\overrightarrow{QP}$ se le llama **lado terminal** del ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} RQP$.

Observemos que en la notación de ángulos dirigidos es importante el orden de aparición de los puntos, por ejemplo $\overleftarrow{\angle} RQP$ no necesariamente es igual a $\overleftarrow{\angle} PQR$, además no se exige que los puntos P, Q y R no sean colineales.

Definición 1.2. Sea c una circunferencia con centro en $Q = (a, b)$ y radio 1, $R = (a + 1, b)$ el punto en c a la derecha de Q y $P = (x, y)$ un punto en la circunferencia c. Si $P = R$, decimos que la **medida** del ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} RQP$ es cero. Si $P \neq R$, definimos la **medida** del ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} RQP$ o **medida en sentido contrario a las manecillas del reloj** del ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} RQP$ como la longitud del arco $\widehat{RP}$ de c, donde $\widehat{RP}$ es un arco menor si P está arriba de $\overleftrightarrow{QR}$ y $\widehat{RP}$ es un arco mayor si P está abajo de $\overleftrightarrow{QR}$. A la medida de $\overleftarrow{\angle} RQP$ la denotaremos $\overleftarrow{\measuredangle} RQP$. Si $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QP}$ son rayos opuestos, entonces $\overleftarrow{\measuredangle} RQP = 180° = \pi$.

Generalicemos esta definición para un ángulo dirigido cualquiera en el plano XY.

Definición 1.3. Sea $\overleftarrow{\angle} PQS$ un ángulo dirigido y R un punto a la derecha de Q.

(i) Si la medida de $\overleftarrow{\angle} RQS$ es mayor o igual que la de $\overleftarrow{\angle} RQP$, definimos la **medida** o **medida en sentido contrario a las manecillas del reloj** de $\overleftarrow{\angle} PQS$ como

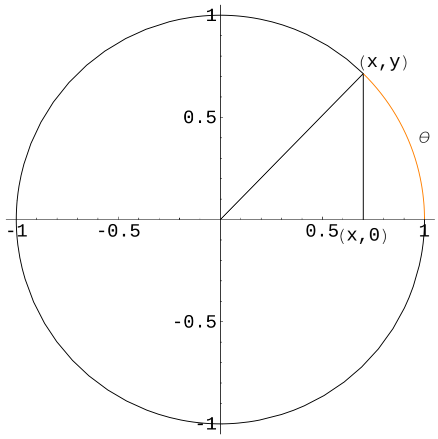
$$\overleftarrow{\measuredangle} RQS - \overleftarrow{\measuredangle} RQP.$$

(ii) Si la medida de $\overleftarrow{\angle} RQS$ es menor que la de $\overleftarrow{\angle} RQP$, definimos la **medida** o **medida en sentido contrario a las manecillas del reloj** de $\overleftarrow{\angle} PQS$ como

$$(\overleftarrow{\measuredangle} RQS - \overleftarrow{\measuredangle} RQP) + 2\pi.$$

Observemos que si θ es la medida de un ángulo dirigido, entonces $0 \leq \theta < 2\pi$.

2. Funciones Trigonométricas



Definición 2.1. Sea U la circunferencia con centro en el origen $O = (0,0)$ y radio 1, $P = (x,y)$ un punto en U y θ la medida del ángulo dirigido que va de la parte positiva del eje X a $\overrightarrow{OP}$. Definimos el **seno** de θ y el **coseno** de θ como y y x respectivamente y los denotamos así

$$y = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad x = \cos\theta.$$

Si n es un número entero y $0 \leq \theta < 2\pi$, definimos $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi n) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta$.

Definición 2.2. El **seno** y **coseno** de un ángulo dirigido son el seno y coseno de sus medidas respectivas.

Observemos que con la definición anterior quedan definidos el seno y el coseno de cualquier número real y que no contradice las definiciones que se tenían anteriormente de las funciones trigonométricas. Observemos también que hay una correspondencia entre los números reales y los ángulos dirigidos en el plano XY de tal manera que el seno y el coseno de un número sea el seno y el coseno del ángulo dirigido correspondiente, tal correspondencia no es biunívoca, ni siquiera define una función en ninguno de los sentidos.

Definición 2.3. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $\overleftarrow{\angle}PQS$ un ángulo dirigido. Decimos que al ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle}PQS$ le **corresponde** el número θ (o que a θ le **corresponde** el ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle}PQS$) si $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ son iguales respectivamente al seno y coseno del ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle}PQS$.

Tenemos por ejemplo que si $\alpha = \overleftarrow{\measuredangle}PQS$, entonces al ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle}PQS$ le corresponde cualquier número θ de la forma $\theta = \alpha + 2\pi n$, donde n es un entero. Observemos que α representa el mínimo giro en sentido contrario a las manecillas del reloj que debe hacer el rayo $\overrightarrow{QP}$ para que coincida con el rayo $\overrightarrow{QS}$, mientras que si n es un entero positivo, $2\pi n$ representa n vueltas completas en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de Q y si n es un entero negativo $2\pi n$ representa $-n$ vueltas completas en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de Q.

Observemos que $\operatorname{sen}\theta = 0$ si y sólo si $\theta = n\pi$ para algún entero n y $\cos\theta = 0$ si y sólo si $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ para algún entero n.

Volvamos ahora a la circunferencia con centro en el origen y radio 1 y definamos las demás funciones trigonométricas. En este capítulo, el símbolo U siempre representará la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Definición 2.4. Sea $O = (0,0)$, $P = (x,y) \in \mathrm{U}$ y $R = (1,0)$. Si θ es un número real que le corresponde al ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle ROP}$, entonces definimos:

- $\tan\theta = \frac{y}{x}$ cuando $x \neq 0$, es decir cuando $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$.
- $\cot\theta = \frac{x}{y}$ cuando $y \neq 0$, es decir cuando $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ \theta \neq n\pi$.
- $\sec\theta = \frac{1}{x}$ cuando $x \neq 0$, es decir cuando $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$.
- $\csc\theta = \frac{1}{y}$ cuando $y \neq 0$, es decir cuando $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ \theta \neq n\pi$.

Fácilmente se pueden deducir las siguientes fórmulas:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad (\theta \neq \tfrac{\pi}{2} + n\pi),$$
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\tan\theta} \quad (\theta \neq n\pi),$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad (\theta \neq \tfrac{\pi}{2} + n\pi),$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \quad (\theta \neq n\pi).$$

donde n es un entero.

Ahora cuando P no está en ninguno de los ejes de coordenadas, los puntos $P = (x,y)$, $O = (0,0)$ y $(x,0)$ son los vértices de un triángulo rectángulo con hipotenusa 1 y catetos $|x|$ y $|y|$, de donde

$$|x|^2 + |y|^2 = 1,$$

pero $|x|^2 = x^2 = (\cos\theta)^2$ y $|y|^2 = y^2 = (\operatorname{sen}\theta)^2$, de donde obtenemos la siguiente fórmula importante

$$\boxed{(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1}$$

la cual también es válida obviamente cuando P está en uno de los ejes de coordenadas.

Ahora observemos que si en la fórmula anterior dividimos ambos lados de la igualdad entre $(\operatorname{sen}\theta)^2$, obtenemos

$$\boxed{1 + (\cot\theta)^2 = (\csc\theta)^2}$$

similarmente se obtiene la fórmula

$$\boxed{1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2.}$$

Lema 2.1. *Si el ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} ROP$ mide θ, entonces el ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} POR$ mide $2\pi - \theta$.*

Demostración. $\overleftarrow{\measuredangle} ROR - \overleftarrow{\measuredangle} ROP = 0 - \theta < 0$, por lo que $\overleftarrow{\measuredangle} POR = -\theta + 2\pi = 2\pi - \theta$. ∎

Lema 2.2. *Si $y > 0$, $P = (x, y) \in \mathrm{U}$, $P' = (x, -y)$, $R = (1, 0)$ y $\theta = \overleftarrow{\measuredangle} ROP$, entonces $\overleftarrow{\measuredangle} ROP' = 2\pi - \theta$.*

Demostración. Por congruencia de los triángulos $\triangle ROP$ y $\triangle ROP'$ la longitud θ del arco menor $\widehat{RP}$ es la misma que la del arco menor de la circunferencia con extremos R y P', por lo que la longitud del arco mayor $\widehat{RP'}$ de la circunferencia U es $2\pi - \theta$, es decir $\overleftarrow{\measuredangle} ROP' = 2\pi - \theta$.
∎

Teorema 2.1. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Demostración. Sea $0 \leq \theta < 2\pi$ tal que $\alpha = \theta + 2n\pi$, con n entero, $R = (0, 1)$ y $P = (x, y) \in \mathrm{U}$ tal que $\overleftarrow{\measuredangle} ROP = \theta$. Tenemos cuatro posibilidades

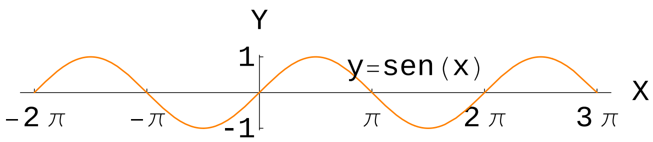
(i) $\theta = 0$, (ii) $0 < \theta < \pi$, (iii) $\theta = \pi$, (iv) $\pi < \theta < 2\pi$.

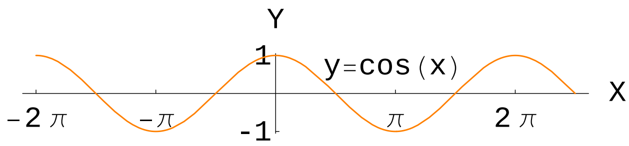
(i) Si $\theta = 0$, entonces $\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen}(-2n\pi) = 0 = -0 = -\operatorname{sen}(2n\pi)$ $= -\operatorname{sen}\alpha$ y también $\cos(-\alpha) = \cos(-2n\pi) = \cos 0 = \cos(2n\pi) = \cos\alpha$.

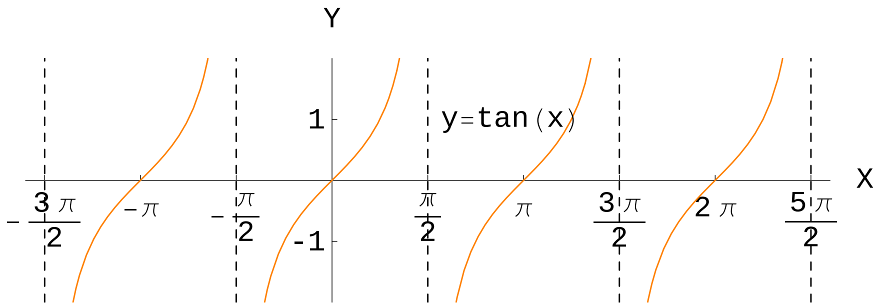
(ii) Si $0 < \theta < \pi$, entonces $\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen}(-\theta - 2n\pi) = \operatorname{sen}(2\pi - \theta)$ $= -y = -\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$ y también $\cos(-\alpha) = \cos(-\theta - 2n\pi) = \cos(-\theta) = x = \cos\theta = \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\alpha$.

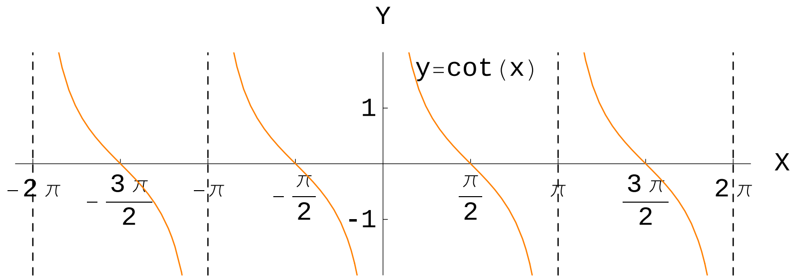
(iii) Si $\theta = \pi$, entonces $\operatorname{sen}(-\alpha) = 0 = -\operatorname{sen}\alpha$ y también $\cos(-\alpha) = \cos(-\pi) = \cos(-\pi + 2\pi) = \cos\pi = \cos\theta$.

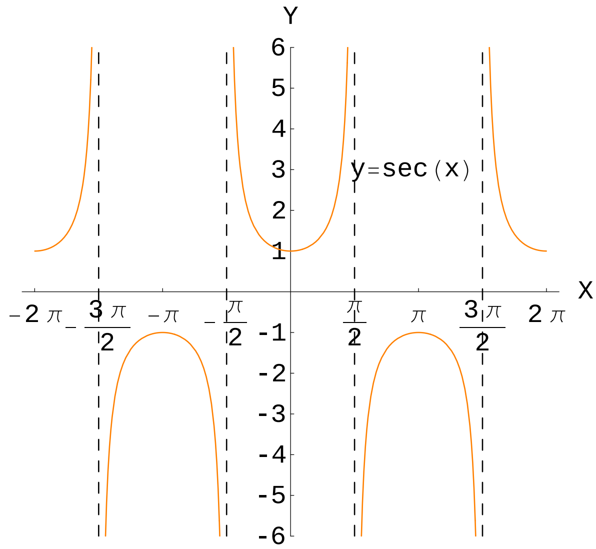
(iv) Si $\pi < \theta < 2\pi$, entonces $-x > 0$, por lo que $\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen}(-\theta - 2n\pi) = \operatorname{sen}(2\pi - \theta) = -y = -\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\alpha$ y además $\cos(-\alpha) = \cos(-\theta - 2n\pi) = \cos(2\pi - \theta) = x = \cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta = \cos\alpha$. ∎

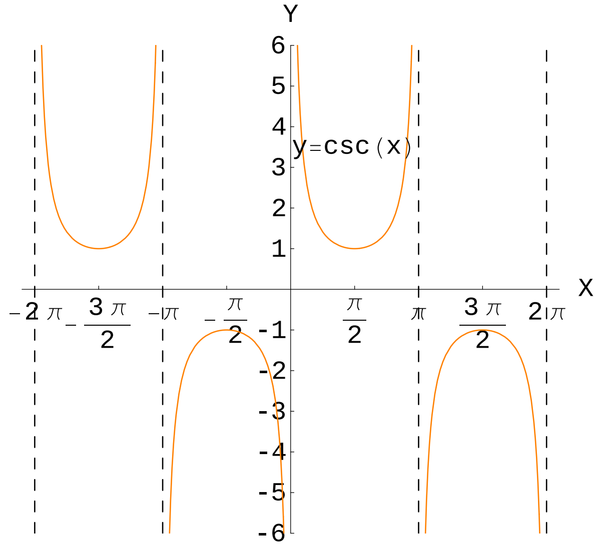







Y
y=cot(x)
1
-1
X
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


Y
y=sec(x)
X
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


Y
y=csc(x)
X
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

3. Funciones Trigonométricas de Sumas y Diferencias

En esta sección deduciremos las fórmulas para calcular las funciones sen, cos y tan evaluadas en sumas y diferencias de números. Las fórmulas que deduzcamos en lo que sigue del capítulo no serán enunciadas como teoremas sino que simplemente se encerrarán en un recuadro para enfatizar la importancia.

Tomemos de nuevo la circunferencia U con centro en el origen $O = (0, 0)$ y radio 1. Sea $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$; $R = (1, 0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ los puntos de U tales que $\overleftarrow{\measuredangle} ROP_1 = \alpha$, $\overleftarrow{\measuredangle} ROP_2 = \beta$ y $\overleftarrow{\measuredangle} ROP_3 = \beta - \alpha$.

Se tiene una correspondencia LAL entre los triángulos $\triangle ROP_3$ y $\triangle P_1OP_2$ de tal forma que $RP_3 = P_1P_2$, pero $RP_3 = \sqrt{(x_3 - 1)^2 + y_3^2}$ y $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, por lo que

$$(x_3 - 1)^2 + y_3^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

así

$$x_3^2 - 2x_3 + 1 + y_3^2 = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2$$

pero por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$-2x_3 + 2 = -2x_1x_2 - 2y_2y_1 + 2,$$

es decir

$$x_3 = x_1x_2 + y_2y_1,$$

pero $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \cos\beta$, $y_1 = \operatorname{sen}\alpha$, $y_2 = \operatorname{sen}\beta$ y $x_3 = \cos(\beta - \alpha)$, por lo que

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Observemos que la fórmula anterior se demostró para el caso en que $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$.

Si $\alpha = \beta$, se tiene que $\cos(\beta - \alpha) = \cos 0 = 1$ y $\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = (\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1$.

Ahora, si $0 \leq \beta < \alpha < 2\pi$, se tiene que $\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta) = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Ahora, si α y β son dos números reales cualesquiera, se tiene que $\alpha = \theta_1 + 2n\pi$ y $\beta = \theta_2 + 2m\pi$, donde m y n son enteros y $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$. En estas condiciones tenemos que

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\theta_2 + 2m\pi) - (\theta_1 + 2n\pi)) = \cos(\theta_2 - \theta_1 + 2(m - n)\pi) =$$
$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Hemos demostrado en forma general la siguiente fórmula

$$\boxed{\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta.}$$

Es decir si conocemos $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$ podemos conocer $\cos(\beta-\alpha)$, por ejemplo $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = (1/\sqrt{2})(1/2) + (\sqrt{3}/2)(1/\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$.

De la fórmula anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\cos(\beta+\alpha) &= \cos(\beta - (-\alpha))\\ &= \cos(-\alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(-\alpha)\ \operatorname{sen}\beta\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta,\end{aligned}$$

obteniendo así la siguiente fórmula

$$\boxed{\cos(\beta + \alpha) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta.}$$

Ahora, si u y v son complementarios, es decir si $u + v = \frac{\pi}{2}$, tenemos que $u = \frac{\pi}{2} - v$ y $v = \frac{\pi}{2} - u$, de donde

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - u) = \cos\tfrac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}\ \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u,$$

por lo que $\operatorname{sen} u = \cos v$ cuando u y v son complementarios, es decir en general

$$\boxed{\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \quad \text{y} \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \operatorname{sen}\theta}$$

de donde, usando las fórmulas

$$\begin{aligned}&\tan\theta = \tfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad (\theta \neq \tfrac{\pi}{2} + n\pi),\\ &\cot\theta = \tfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \tfrac{1}{\tan\theta} \quad (\theta \neq n\pi),\\ &\sec\theta = \tfrac{1}{\cos\theta} \quad (\theta \neq \tfrac{\pi}{2} + n\pi),\\ &\csc\theta = \tfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \quad (\theta \neq n\pi)\end{aligned}$$

(con n entero); se deducen directamente las fórmulas

$$\boxed{\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta \quad \text{y} \quad \cot(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta}$$

y además

$$\boxed{\sec(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \csc\theta \quad \text{y} \quad \csc(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \sec\theta.}$$

Ahora, queremos establecer fórmulas para calcular $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$, $\operatorname{sen}(\beta+\alpha)$, $\tan(\beta-\alpha)$ y $\tan(\beta+\alpha)$, cuando se conozcan las funciones trigonométricas evaluadas en α y β. Tenemos primeramente

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\beta-\alpha) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(\beta-\alpha)\right) = \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right)+\alpha\right)\\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2}-\beta)\cos\alpha - \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}-\beta)\operatorname{sen}\alpha\\ &= \operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha,\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\operatorname{sen}(\beta-\alpha) = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha.}$$

Ahora $\operatorname{sen}(\beta+\alpha) = \operatorname{sen}(\beta-(-\alpha)) = \operatorname{sen}\beta\cos(-\alpha) + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha$, es decir

$$\boxed{\operatorname{sen}(\beta+\alpha) = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha.}$$

La primera deducción de estas dos últimas fórmulas fueron hechas por Ptolomeo y escritas en su cloección de 13 libros llamada "Almagesto" (La Recopilación Matemática).

Claudio Ptolomeo

Para deducir las fórmulas correspondientes para la tangente podemos usar las anteriores de modo que

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta} =$$

$$\frac{(\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha)/\cos\beta\cos\alpha}{(\cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta)/\cos\beta\cos\alpha} = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha},$$

es decir

$$\boxed{\tan(\beta-\alpha) = \tfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}.}$$

El lector podrá deducir de manera similar la siguiente fórmula

$$\boxed{\tan(\beta+\alpha) = \tfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}.}$$

Las siguientes fórmulas llamadas **fórmulas para el ángulo doble** se deducen directamente de las fórmulas para calcular las funciones trigonométricas de una suma.

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta.}$$

$$\boxed{\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 - 2(\operatorname{sen}\theta)^2 = 2(\cos\theta)^2 - 1.}$$

$$\boxed{\tan(2\theta) = \tfrac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}.}$$

De la fórmula para calcular $\cos 2\theta$ y haciendo $\alpha = 2\theta$ obtenemos

$$\boxed{|\operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2}| = \sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{2}},}$$

$$\boxed{|\cos\tfrac{\alpha}{2}| = \sqrt{\tfrac{1+\cos\alpha}{2}},}$$

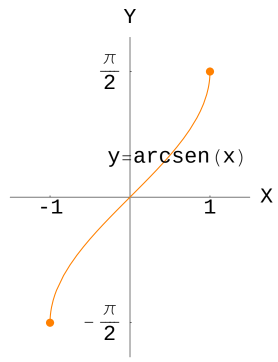
$$\boxed{|\tan\tfrac{\alpha}{2}| = \sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.}$$

Las tres fórmulas anteriores se llaman **fórmulas del ángulo medio**.

4. Funciones Trigonométricas Inversas

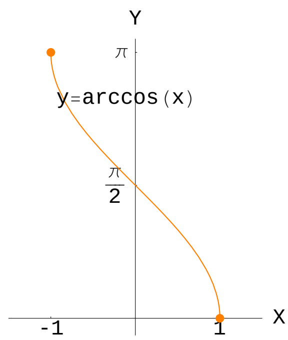
Debido a que las funciones trigonométricas no son inyectivas no podemos definir directamente las inversas de ellas, por ejemplo $\operatorname{sen}\pi = \operatorname{sen}-\pi = \operatorname{sen}0 = 0$, es decir no existe un único valor de θ que haga que $\operatorname{sen}\theta = 0$. Podemos observar sin embargo, que el recorrido de la función sen es el intervalo cerrado $[-1;1]$ y además para cualquier valor de $y \in [-1;1]$ existe un único valor de $\theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tal que $y = \operatorname{sen}\theta$. Debido a lo anterior tiene sentido y es legítima la siguiente definición.

Definición 4.1. A la función $\operatorname{arcsen} : [-1;1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tal que $\operatorname{arcsen} y = \theta$ si y sólo si $y = \operatorname{sen}\theta$ y $\theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ se le llama función **arcoseno**.



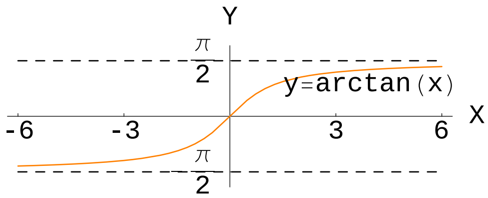
Podemos asimismo observar que el recorrido de la función cos es el intervalo $[-1;1]$ y además para cualquier valor de $x \in [-1;1]$ existe un único valor de $\theta \in [0;\pi]$ tal que $x = \cos\theta$ de donde tenemos la siguiente definición.

Definición 4.2. A la función $\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$ tal que $\arccos x = \theta$ si y sólo si $x = \cos\theta$ y $\theta \in [0;\pi]$ se le llama función **arcocoseno**.



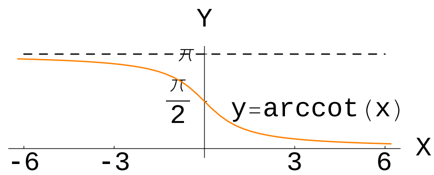
Observemos ahora que el recorrido de la función tan es el conjunto de todos los números reales y que para cualquier valor $z \in \mathbb{R}$ existe un único $\theta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ tal que $\tan\theta = z$, teniendo así la siguiente definición.

Definición 4.3. A la función $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ tal que $\arctan z = \theta$ si y sólo si $z = \tan\theta$ y $\theta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ se le llama función **arcotangente**.



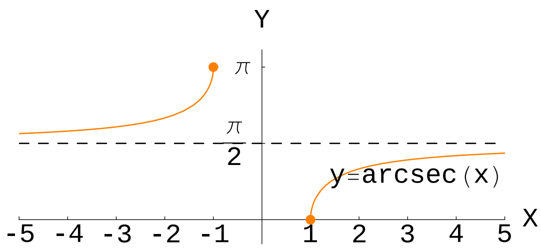
De manera similar tenemos que el recorrido de la función cot es $\mathbb{R}$ y que para todo $z \in \mathbb{R}$ existe un único $\theta \in (0; \pi)$ tal que $\cot\theta = z$, por lo que podemos establecer la definición siguiente.

Definición 4.4. A la función $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0; \pi)$ tal que $\operatorname{arccot} z = \theta$ si y sólo si $z = \cot\theta$ y $\theta \in (0; \pi)$ se le llama función **arcocotangente**.



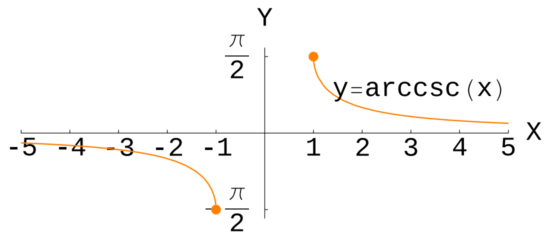
Observando ahora que el recorrido de la función sec es la unión de intervalos cerrados no acotados $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ y de que no existe la secante de $\frac{\pi}{2}$, tenemos ahora la definición de la función arcosecante.

Definición 4.5. A la función $\operatorname{arcsec} : (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \longrightarrow [0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi]$ tal que $\operatorname{arcsec} z = \theta$ si y sólo si $z = \sec\theta$ y $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi]$ se le llama función **arcosecante**.



De manera similar tenemos la definición de la función arcocosecante.

Definición 4.6. A la función arccsc : $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}]$ tal que $\operatorname{arccsc} z = \theta$ si y sólo si $z = \csc\theta$ y $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}]$ se le llama función **arcocosecante**.



5. Ley de los Senos

En lo sucesivo cuando tengamos un triángulo $\triangle ABC$ denotaremos por $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$ y $\gamma = \measuredangle ACB$. La fórmula que deduciremos en esta sección nos permite calcular las longitudes y medidas de todos los lados y ángulos de un triángulo cuando solamente conocemos las de dos ángulos y un lado. Tal fórmula vale la pena usarla solamente cuando el triángulo no es rectángulo. Cuando el triángulo es rectángulo se puede usar el teorema de Pitágoras.

Supongamos que tenemos un triángulo no rectángulo $\triangle ABC$ tal que (para simplificar lo cálculos) A está en el origen de coordenadas, B a la derecha de A y C arriba del eje X.

Sea D la proyección de C en el eje X y $h = CD$. Tenemos que $\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}$, es decir $h = a\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}$, es decir $h = b\operatorname{sen}\alpha$, por lo que $a\operatorname{sen}\beta = b\operatorname{sen}\alpha$, es decir

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}.$$

De manera similar, haciendo un cambio en el sistema de coordenadas, de tal manera que C esté en el origen y A a la derecha de C podemos obtener

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

En resumen tenemos el resultado conocido como la ley de los senos.

Ley de los Senos. *Si $\triangle ABC$ es un triángulo, entonces*

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.}$$

6. Ley de los Cosenos

En es sección se dará una fórmula para calcular la longitud de los lados y la medida de los ángulos de un triángulo cuando se conocen las longitudes de dos lados y la medida del ángulo entre ellos o cuando se conocen las longitudes los tres lados.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo y elíjase el sistema de coordenadas en el plano de tal manera que A esté en el origen, B a la derecha de A y C arriba del eje X.

Observemos que las coordenadas de B son $(c, 0)$ y las de C son $(b\cos\alpha, b\operatorname{sen}\alpha)$. Utilizando la fórmula de la distancia (teorema de Pitágoras) obtenemos que

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\cos\alpha - c)^2 + (b\operatorname{sen}\alpha)^2 \\ &= b^2(\cos\alpha)^2 - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2(\operatorname{sen}\alpha)^2 \\ &= b^2((\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

es decir, tenemos el resultado siguiente.

Ley de los cosenos.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.}$$

Como $\cos 90^\circ = 0$, podemos observar que esta ley es una generalización del teorema de Pitágoras.

III. GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Introducción

La geometría analítica es la rama de las matemáticas que estudia la descripción de figuras geométricas por medio de ecuaciones o fórmulas algebraicas. Su estudio data de 1637, cuando se publicó el libro "La Geométrie" (La Geometría), escrito por el filósofo y matemático francés Renato Cartesio (en franceés René Descartes). Los nombres 'cartesiano' o 'cartesiana' que se emplean frecuentemente en matemáticas fueron dados en honor a Cartesio.

Renato Cartesio

Las figuras que se estudiarán en éste capítulo serán las llamadas cónicas (rectas, circunferencias, parábolas, elipses, hipérbolas, rectas que se cortan y puntos). Las cónicas y sólo las cónicas en el plano XY tienen la peculiaridad de que satisfacen una ecuación general de segundo grado, es decir una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B, C, D, E y F son constantes. El nombre de cónicas proviene del hecho de que, en el espacio de tres dimensiones, son la intersección de un plano con un cono circular recto.

En el estudio de la geometría analítica plana estableceremos o consideraremos siempre establecido un sistema de coordenadas en el plano XY.

Definición 1.1. La **ecuación** de una figura en el plano XY o de algún conjunto incluido en el mismo será una expresión de la forma

$$R(x, y) = 0$$

o una expresión equivalente (donde $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$) de tal manera que el conjunto descrito sea

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ R(x, y) = 0, \ x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ y \in \mathbb{R}\},$$

es decir, la ecuación que representa a la figura debe ser tal que la figura sea el conjunto solución de la ecuación.

Ejemplos.

1. La ecuación de la recta vertical que pasa por un punto dado (x_0, y_0) es $x = x_0$.

2. La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 1 es $x^2 + y^2 = 1$.

3. La ecuación del conjunto cuyo único elemento es el punto $(3, 6)$ es $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 0$ o bien $|x - 3| + |y - 6| = 0$.

4. Dados dos puntos diferentes en el plano $Q_0 = (x_0, y_0)$ y $Q_1 = (x_1, y_1)$, determinemos la ecuación del segmento $\overline{Q_0Q_1}$. Primero que nada tenemos que una condición necesaria y suficiente para que un punto $P = (x, y)$ pertenezca al segmento es que $Q_0P + PQ_1 = Q_0Q_1$, es decir, usando la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos que la ecuación de tal segmento es

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

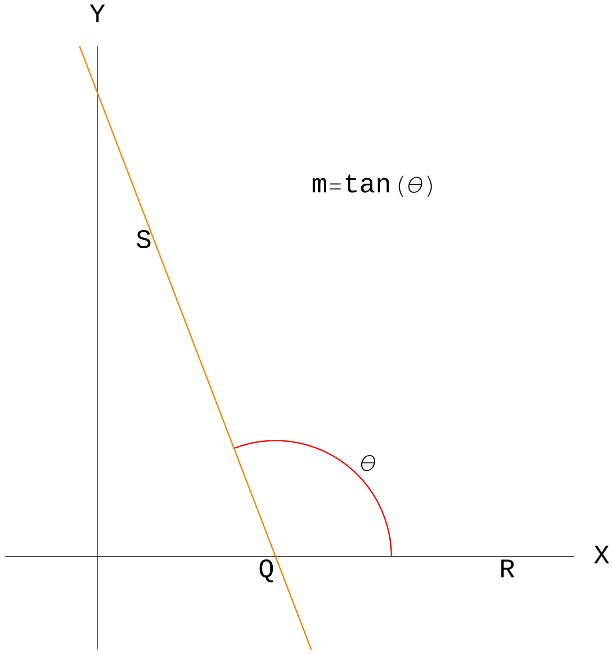
$$= \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

Comenzaremos este capítulo con el estudio de las rectas en el plano.

2. La Recta

Para empezar el estudio de las rectas definamos lo que es la pendiente de una recta.

Definición 2.1. Sea l una recta inclinada, Q el punto de intersección de l con el eje X, R un punto a la derecha de Q, $S \in l$ arriba del eje X, y θ la medida del ángulo $\angle RQS$. Al ángulo $\angle RQS$ se le llama **ángulo de inclinación** de la recta l. Al número θ se le llama la **inclinación** de la recta l y definimos la **pendiente** m de la recta l como la tangente de θ, es decir $m = \tan\theta$.



Observemos que si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces la pendiente es positiva y si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, entonces la pendiente es negativa.

Si l fuera vertical, el ángulo θ formado con el eje X sería $\frac{\pi}{2}$, pero sabemos que $\tan\frac{\pi}{2}$ no está definido. A continuación definiremos la pendiente de una recta vertical y de una recta horizontal.

Definición 2.2. Si l es una recta horizontal, entonces decimos que su **pendiente** y su **inclinación** son cero. Si l es una recta vertical decimos que su **inclinación** es $\frac{\pi}{2} = 90°$ y además decimos que tiene **pendiente infinita**.

Enunciemos nuestro primer teorema del capítulo.

Teorema 2.1. *Dos rectas paralelas en el plano* XY *tienen pendientes iguales.*

Demostración. Sean l y l' dos rectas paralelas en el plano XY. Si son verticales u horizontales, entonces por definición tienen pendientes iguales. Supongamos que l y l' no son verticales ni horizontales. El eje X es una secante común y los ángulos de inclinación de las rectas l y l' son correspondientes, por lo que tienen la misma medida, y por definición las pendientes de l y l' son iguales. ∎

Definición 2.3. Si dos rectas l_1 y l_2 diferentes y no horizontales se cortan en un punto Q. El **ángulo entre** l_1 y l_2 será el ángulo $\angle PQS$, donde $P \in l_1$ y $S \in l_2$ son puntos arriba de la horizontal a la que pertenece Q. El **ángulo entre** una recta horizontal y una no horizontal es el ángulo de inclinación de la recta no horizontal.

Teorema 2.2. *Sea l una recta no vertical en el plano* XY, $P_1 = (x_1, y_1)$ *y* $P_0 = (x_0, y_0)$ *dos puntos diferentes en la recta l. La pendiente m de la recta l está dada por*

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Demostración. Si l es horizontal, entonces $y_1 = y_0$, por lo que

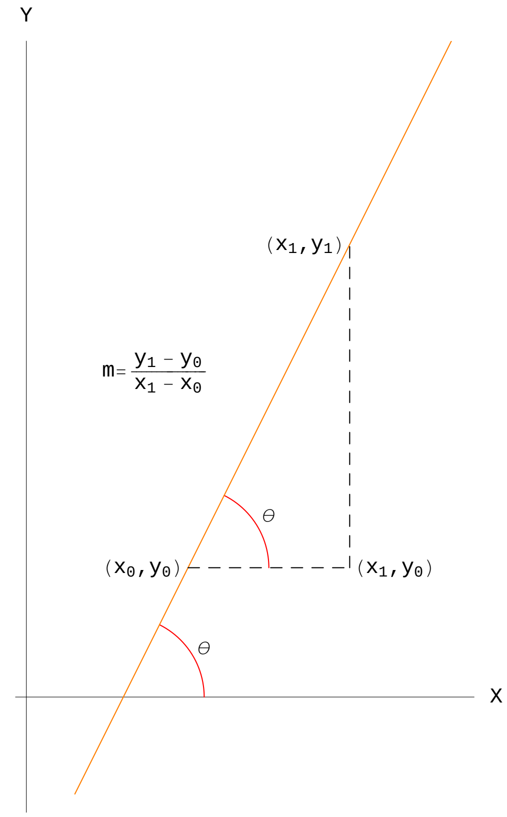
$$m = 0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Si l no es horizontal y P_1 está arriba de la horizontal a la cual pertenece P_0, tomamos R a la derecha de P_0. Las rectas $\overleftrightarrow{P_0R}$ y el eje X son paralelas (o iguales) y cortadas por la secante l por lo que el ángulo $\angle RP_0P_1$ es correspondiente (o igual) con el ángulo de inclinación de l, es decir $\measuredangle RP_0P_1$ es la inclinación de l, por lo que

$$m = \tan \measuredangle RP_0P_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Ahora, si P_0 está arriba de P_1, entonces debido a lo anterior tenemos

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{-(y_0 - y_1)}{-(x_0 - x_1)} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$ ∎



Teorema 2.3. *Sea l una recta no vertical con pendiente m, $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto en l y $P_1 = (x_1, y_1)$ diferente de P_0 tal que*

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Entonces $P_1 \in l$.

Demostración. Como l no es vertical, entonces no tiene pendiente infinita y $x_1 \neq x_0$. Ahora, sea $P_1' = (x_1, y_1')$ el punto en l cuya proyección en el eje X es $(x_1, 0)$. Por el teorema 2.2 tenemos que $m = \frac{y_1' - y_0}{x_1 - x_0}$, pero por otra parte $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, de modo que $y_1' - y_0 = y_1 - y_0$, es decir $y_1' = y_1$, por lo que $P_1 = P_1'$, luego $P_1 \in l$. ∎

Observemos que de los dos teoremas anteriores podemos concluir que existe sólo una recta con pendiente m que pasa por un punto dado P_0. El teorema siguiente nos da una caracterización de la recta por medio de una fórmula.

Teorema 2.4. *La ecuación de la recta no vertical que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ y tiene pendiente m está dada por*

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{1}$$

Demostración. Para el caso en que la pendiente m sea cero, la recta es horizontal y cualquier punto $P = (x, y)$ está en la recta si y sólo si $y = y_0$, es decir $y - y_0 = 0 = 0(x - x_0)$. Si la pendiente m es diferente de 0, entonces sea $P = (x, y)$ un punto que satisface la ecuación (1), entonces

$$(x, y) = (x_0, y_0) \qquad \text{ó} \qquad m = \frac{y - y_0}{x - x_0};$$

en ambos casos, por el teorema 2.3, P está en la recta con pendiente m que pasa por (x_0, y_0).

Ahora, si $P = (x, y)$ está en la recta, entonces por el teorema 2.2

$$(x, y) = (x_0, y_0) \qquad \text{ó} \qquad m = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad \text{con} \quad x \neq x_0$$

y en ambos casos se satisface (1). ∎

Es bien sabido (teorema 19.2 del capítulo I) que la ecuación de una recta vertical que pasa por el punto (x_0, y_0) es $x = x_0$

Del teorema anterior se deduce directamente la ecuación de cualquier recta que no sea vertical dados dos puntos diferentes por los que pasa. Tal ecuación está enunciada en el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *La ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), con $x_0 \neq x_1$, está dada por*

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \tag{2}$$

Teorema 2.6. Forma general de la ecuación de la recta. *Un conjunto en el plano es una recta si y sólo si su ecuación es de la forma*

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

donde A, B y C son constantes y $A \neq 0$ ó $B \neq 0$.

Demostración. Si $B = 0$, entonces la ecuación $Ax + By + C = 0$ es equivalente a $x = \frac{-C}{A}$ (con $A \neq 0$) que es la ecuación de una recta vertical. Si $B \neq 0$, entonces la ecuación $Ax + By + C = 0$ es equivalente a $y - (-\frac{C}{B}) = \frac{-A}{B}x$, que es la ecuación de la recta con pendiente $-\frac{A}{B}$ que corta al eje Y en $(0, -\frac{C}{B})$.

Recíprocamente, veamos que dada una recta, su ecuación es equivalente a una de la forma (3).

Si la recta es vertical su ecuación es $x = x_0$ o equivalentemente $x - x_0 = 0$ que es de la forma (3) al tomar $C = -x_0$, $B = 0$ y $A = 1$. Si la recta no es vertical, entonces tiene una ecuación de la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, pero esta ecuación es equivalente a una de la forma $mx - y - mx_0 + y_0 = 0$ la cual al tomar $A = m$, $B = -1$ y $C = -mx_0 + y_0$ queda de la forma (3). ∎

A la ecuación (3) se le llama **ecuación general de la recta**.

Analicemos ahora la relación entre las pendientes m_1 y m_2 de dos rectas perpendiculares l_1 y l_2 que son oblicuas.

Supongamos sin pérdida de generalidad que la inclinación θ_2 de l_2 es mayor que la inclinación θ_1 de l_1. Como $l_1 \perp l_2$, entonces $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} m_2 = \tan\theta_2 &= \tan\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta_1)\right) = \cot(-\theta_1) \\ &= -\cot\theta_1 = \frac{-1}{\tan\theta_1} = -\frac{1}{m_1}, \end{aligned}$$

es decir

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas perpendiculares inclinadas, entonces*

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Con el teorema anterior se facilitará hallar una fórmula para encontrar la distancia de un punto P_0 a una recta l (conociendo las coordenadas del punto y la ecuación de la recta). Cuando la recta es vertical u horizontal, es fácil hallar la distancia a un punto dado. Supongamos que l es una recta inclinada cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$ y $P_0 = (x_0, y_0)$. La pendiente de la recta l es $-\frac{A}{B}$. Sea l' la recta perpendicular a l tal que $P_0 \in l'$. Como l' es perpendicular a l, entonces la pendiente de l' es $\frac{B}{A}$. Sea $Q = (x_1, y_1)$ el punto donde se intersecan

l y l', es decir sea Q la proyección de P_0 en l. La distancia de P_0 a Q es la distancia de P_0 a l. La ecuación de l' está dada por

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0).$$

Ahora, (x_1, y_1) satisface las ecuaciones

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \qquad \text{y} \qquad Ax + By + C = 0,$$

de donde

$$Ax_1 + B\left(\frac{B}{A}(x_1 - x_0) + y_0\right) + C = 0,$$

pero

$$Ax_1 + B\left(\frac{B}{A}(x_1 - x_0) + y_0\right) + C = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$Ax_1 + \frac{B^2}{A}x_1 - \frac{B^2}{A}x_0 + By_0 = -C$$

$\Longleftrightarrow$

$$(A^2 + B^2)x_1 = B^2x_0 - ABy_0 - AC$$

$\Longleftrightarrow$

$$x_1 = \frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}.$$

Análogamente se tiene que

$$y_1 = \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}$$

y la distancia entre (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(-A^2x_0 - ABy_0 - AC)^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{(-B^2y_0 - ABx_0 - BC)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2(Ax_0 + By_0 + C)^2 + B^2(Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

por lo que si l es una recta inclinada con ecuación $Ax + By + C = 0$, entonces la distancia de $P_0 = (x_0, y_0)$ a la recta l es

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Supongamos ahora que l es una recta horizontal con ecuación $Ax + By + C = 0$. En este caso $A = 0$ y la ecuación de la recta es equivalente a $y = \frac{-C}{B}$, por lo que la distancia de (x_0, y_0) a l es $|\frac{-C}{B} - y_0| = \frac{|By_0+C|}{|B|} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Análogamente si l es una recta vertical con ecuación $Ax + By + C = 0$, la distancia de (x_0, y_0) a l es $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Así pues, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Dada una recta en el plano* XY*con ecuación* $Ax + By + C = 0$ *y* $P_0 = (x_0, y_0)$. *La distancia de* P_0 *a la recta está dada por*

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3. La Circunferencia

En esta sección deduciremos la ecuación de una circunferencia con centro en un punto dado $Q = (a, b)$ y radio $r > 0$.

Sea P un punto en el plano que está a una distancia r de (a, b), es decir $PQ = r$. De acuerdo a la fórmula de la distancia entre dos puntos, la expresión $PQ = r$ es equivalente a

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

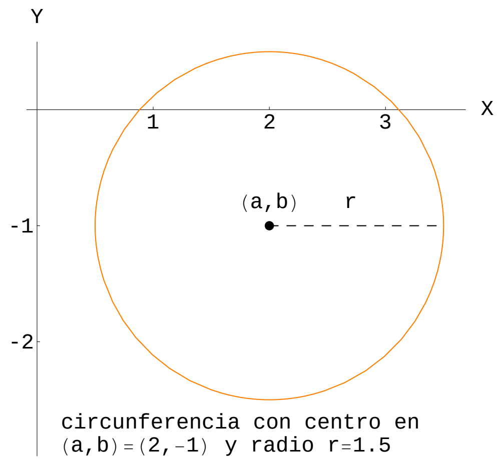
la cual a su vez es equivalente a

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema 3.1. *La fórmula de una circunferencia con centro en el origen y radio r está dada por*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$



Observemos que la ecuación de una circunferencia puede representarse en diferentes formas equivalentes, a saber,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0,$$

es decir la ecuación de la circunferencia puede tomar la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

al tomar $D = -2a$, $E = -2b$ y $F = a^2 + b^2 - r^2$. Pero una ecuación de la forma (1) no siempre representa una circunferencia. Hagamos un análisis más detallado.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F$$

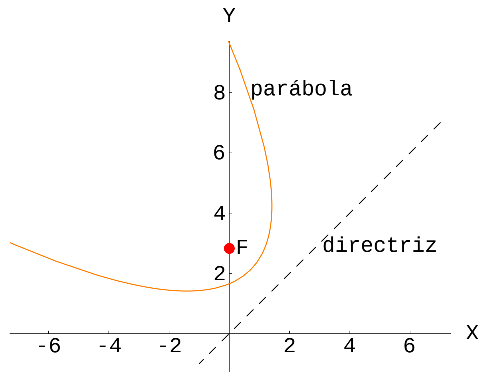
que representa una circunferencia con centro en $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y radio $\sqrt{(\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2 - F}$ solamente cuando $(\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2 - F > 0$. Si $(\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2 - F < 0$, entonces la ecuación (1) representa al conjunto vacío pues es imposible que dos números reales al cuadrado sumen un número negativo. Si $(\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2 - F = 0$, entonces la ecuación (1) representa al conjunto con un solo punto $\{(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})\}$, pues para que la suma de dos números al cuadrado sea cero es necesario que ambos números sean cero y esto ocurre sólo cuando $x = -\frac{D}{2}$ y $y = -\frac{E}{2}$.

4. La Parábola

El concepto de parábola tiene aplicaciones en distintas áreas del conocimiento y utilidad en la vida moderna como son la descripción de las trayectorias de los proyectiles, las telecomunicaciones, diseño de lámparas, radares y puentes.

DEFINICIÓN 4.1. Sea l una recta y F un punto que no está en l. La **parábola** con **directriz** l y **foco** F es el conjunto de puntos del plano al cual pertenecen F y los puntos de l cuya distancia al foco F es la distancia a la recta l.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta con ecuación $y = x$ y el foco es el punto $(0, 2\sqrt{2})$.



Solución. La recta $y = x$ en su forma general se puede representar mediante la ecuación $x - y = 0$. Ahora, cualquier punto (x, y) está en la parábola si y sólo si la distancia de la directriz a (x, y) es la misma que la distancia de (x, y) al foco $(0, 2\sqrt{2})$, expresado esto en fórmulas se tiene (debido a las fórmulas para la distancia entre dos puntos y para la distancia entre un punto y una recta) que el punto (x, y) está en la parábola si y sólo si

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{(x-0)^2+(y-2\sqrt{2})^2},$$

pero tenemos que

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{(x-0)^2+(y-2\sqrt{2})^2},$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{(x-y)^2}{2} = x^2 + (y-2\sqrt{2})^2$$

$\iff$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2 - 8\sqrt{2}y + 16$$

$\iff$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}y + 16 = 0.$$

Es decir, una ecuación de tal parábola está dada por

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}y + 16 = 0.$$

Definición 4.2. Sea l la directriz de una parábola y F su foco. La recta l' que es perpendicular a la directriz l' y pasa por el foco F se llama **eje** de la parábola. Sea A el punto de intersección de l y l' y sea V el punto medio del segmento $\overline{AF}$. El punto V por definición está en la parábola y se llama **vértice** de la parábola, además es el punto de la parábola más cercano al foco y a la directriz. Si B y B' son dos puntos diferentes en la parábola, entonces al segmento $\overline{BB'}$ se le llama **cuerda** de la parábola. Cualquier cuerda $\overline{CC'}$ que pase por el foco se llama **cuerda focal** de la parábola. La cuerda focal $\overline{LL'}$ perpendicular al eje se llama **lado recto**. Observemos que la longitud del lado recto es cuatro veces la distancia del vértice al foco.

Deduzcamos ahora en forma general la ecuación de una parábola cuya directriz es horizontal y su eje es vertical.

Sea $V = (h, k)$ el vértice de una parábola y $F = (h, k + p)$ su foco, donde p es un número diferente de cero. Observemos que el eje $\overleftrightarrow{VF}$ de la parábola es vertical y su ecuación es

$$x = h,$$

además la directriz es horizontal y su ecuación es

$$y = k - p.$$

Si $p > 0$, el foco está arriba de la directriz y si $p < 0$, el foco está abajo de la directriz.

Ahora, la ecuación de la directriz puede expresarse en la forma

$$y + (p - k) = 0.$$

Por definición de parábola $P = (x, y)$ está en la parábola si y sólo si la distancia del foco $F = (h, k + p)$ a P es igual a la distancia de la directriz a P. Es decir, P está en la parábola si y sólo si

$$\frac{|y + (p - k)|}{\sqrt{1^2}} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2},$$

pero tenemos que

$$\frac{|y + (p - k)|}{\sqrt{1^2}} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(y + (p - k))^2 = (x - h)^2 + y^2 - 2y(k + p) + (k + p)^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$y^2 + 2y(p - k) + (p - k)^2 = (x - h)^2 + y^2 - 2yk - 2yp + k^2 + 2kp + p^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$2yp - 2yk + p^2 - 2pk + k^2 = (x - h)^2 - 2yk - 2yp + k^2 + 2kp + p^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$4yp - 4pk = (x - h)^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Este resultado se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *la ecuación de una parábola con vértice $V = (h, k)$, foco $F = (h, k + p)$ y directriz con ecuación $y = k - p$ está dada por*

$$(x - h)^2 = 4p(y - k),$$

donde $|4p|$ es la longitud del lado recto y además:

(i) *Si $p > 0$, el foco está arriba de la directriz.*

(ii) *Si $p < 0$, el foco está abajo de la directriz.*

Análogamente se puede demostrar el siguiente teorema dual al anterior.

Teorema 4.2. *la ecuación de una parábola con vértice $V = (h, k)$, foco $F = (h + p, k)$ y directriz con ecuación $x = h - p$ está dada por*

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

donde $|4p|$ es la longitud del lado recto y además:

(i) *Si $p > 0$, el foco está a la derecha de la directriz.*

(ii) *Si $p < 0$, el foco está a la izquierda de la directriz.*

Observemos que la ecuación de una parábola con eje vertical puede expresarse en la forma

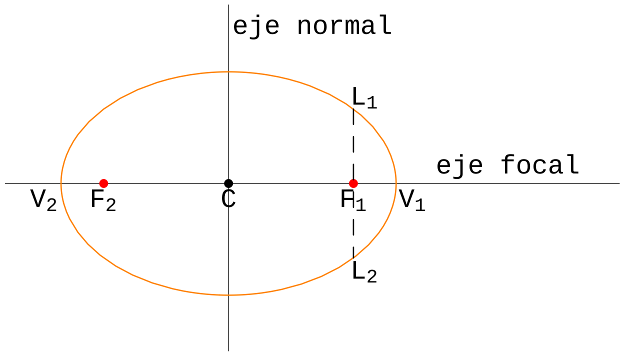
$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

mientras que la de una parábola con eje horizontal puede expresarse en la forma

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

5. La Elipse

Definición 5.1. Dados dos puntos F_1 y F_2 en un plano y s una constante mayor que F_1F_2. Al conjunto de puntos P en el plano tales que la distancia de P a F_1 más la distancia de P a F_2 sea la constante s, se le llama **elipse**. A los puntos F_1 y F_2 se le llaman **focos** de la elipse y al número s se le llama **constante** de la elipse.



Definición 5.2. Dada una elipse, a la recta l que pasa por los focos se le llama **eje focal**. Los puntos V_1 y V_2 de la elipse que están en el eje focal se llaman **vértices** de la elipse. Al segmento $\overline{V_1V_2}$ se le llama **eje mayor**. Al punto medio C de $\overline{F_1F_2}$ se le llama **centro** de la elipse. A la recta l' perpendicular a l y que pasa por C se le llama **eje normal**. Designemos por A_1 y A_2 a los puntos donde el eje normal corta a la elipse. Al segmento $\overline{A_1A_2}$ se le llama **eje menor**. Si B_1 y B_2 son dos puntos diferentes en la elipse, al segmento $\overline{B_1B_2}$ se le llama **cuerda** de la elipse. Una cuerda $\overline{E_1E_2}$ que pasa por el foco se llama **cuerda focal**. Una cuerda focal $\overline{L_1L_2}$ perpendicular al eje focal se llama **lado recto**.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la elipse con focos $F_1 = (-1, -4)$ y $F_2 = (-4, -2)$ y cantidad constante 5.

Solución. Un punto $P = (x, y)$ está en la elipse si y sólo si

$$PF_1 + PF_2 = 5,$$

es decir

$$\sqrt{(x-(-1))^2 + (y-(-4))^2} + \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-(-2))^2} = 5 \quad (1)$$

pero tenemos que

$$\sqrt{(x-(-1))^2 + (y-(-4))^2} + \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-(-2))^2} = 5$$

$\Longleftrightarrow$
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}=5$$
$\Longleftrightarrow$
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}=5-\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2} \tag{2}$$
$\Longrightarrow$
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2}=\left|5-\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}\right| \tag{3}$$
$\Longleftrightarrow$
$$(x+1)^2+(y+4)^2=25-10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+(x+4)^2+(y+2)^2$$
$\Longleftrightarrow$
$$x^2+2x+1+y^2+8y+16=25-10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+(x+4)^2+(y+2)^2$$
$\Longleftrightarrow$
$$x^2+2x+y^2+8y+17$$
$$=25-10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+x^2+8x+16+y^2+4y+4$$
$\Longleftrightarrow$
$$6x-4y+28=10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2} \tag{4}$$
$\Longrightarrow$
$$|6x-4y+28|=10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2} \tag{5}$$
$\Longleftrightarrow$
$$36x^2+16y^2+784-48xy+336x-224y=100(x+4)^2+100(y+2)^2$$
$\Longleftrightarrow$
$$36x^2-48xy+16y^2+336x-224y+784=100(x^2+8x+16)+100(y^2+4y+4)$$
$\Longleftrightarrow$
$$64x^2+48xy+84y^2+464x+624y+1216=0$$
$\Longleftrightarrow$
$$16x^2+12xy+21y^2+116x+156y+304=0, \tag{6}$$
por lo que la elipse debe satisfacer la ecuación (6). Para demostrar que (6) es la ecuación de la elipse es suficiente ver que (5)$\Longrightarrow$(4) y que (3)$\Longrightarrow$(2).

Para ver que (5)$\Longrightarrow$(4) demostremos que es imposible que se cumpla la ecuación
$$6x-4y+28=-10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}. \tag{7}$$
Tenemos que
$$6x-4y+28=-10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}$$

$\iff$

$x^2+2x+y^2+8y+17 = 25+10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+x^2+8x+y^2+4y+20$

$\iff$

$$x^2+2x+1+y^2+8y+16$$
$$= 25+10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+x^2+8x+16+y^2+4y+4$$

$\iff$

$(x+1)^2+(y+4)^2 = 25+10\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+(x+4)^2+(y+2)^2$

$\iff$

$$(x+1)^2+(y+4)^2 = (5+\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2})^2$$

$\iff$

$$\sqrt{(x-(-1))^2+(y-(-4))^2}-\sqrt{(x-(-4))^2+(y-(-2))^2} = 5. \quad (8)$$

Pero (8) es imposible, puesto que debido a la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x-(-1))^2+(y-(-4))^2}-\sqrt{(x-(-4))^2+(y-(-2))^2} \\ &\leq \sqrt{(-1-(-4))^2+(-4-(-2))^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} < 4, \end{aligned}$$

por lo tanto (5)$\Longrightarrow$(4).

De manera análoga a como se demostró la imposibilidad de (8) se demuestra la imposibilidad de la ecuación

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2} = -5+\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}$$

y tal imposibilidad nos lleva a que (3) $\Longrightarrow$ (2); por lo tanto (6) es la ecuación de la elipse, es decir el punto $P=(x,y)$ está en la elipse si y sólo si satisface (6).

Establezcamos ahora fórmulas de la elipse para los casos particulares en que los ejes sean paralelos a los ejes de coordenadas.

Veamos el caso en que la elipse tiene eje mayor horizontal. Sean $C=(h,k)$ el centro de la elipse; $F_1=(h-c,k)$, $F_2=(h+c,k)$ los focos, con $c>0$; $V_1=(h-a,k)$, $V_2=(h+a,k)$ los vértices, con $a>c$.

Observemos que la constante de la elipse es $2a$, de modo que un punto $P=(x,y)$ está en la elipse si y sólo si

$$F_1P+F_2P = 2a,$$

es decir

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = 2a,$$

pero tenemos que

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}=2a$$

$\Longleftrightarrow$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \quad (9)$$

$\Longrightarrow$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}=\left|2a-\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right| \quad (10)$$

$\Longleftrightarrow$

$$(x-(h-c))^2+(y-k)^2$$

$$=4a^2-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}+(x-(h+c))^2+(y-k)^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

$$=4a^2-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c))+(h+c)^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$4xc-4hc-4a^2=-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

$\Longleftrightarrow$

$$a^2-c(x-h)=a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \quad (11)$$

$\Longrightarrow$

$$(a^2-c(x-h))^2=a^2(((x-h)-c)^2+(y-k)^2) \quad (12)$$

$\Longleftrightarrow$

$$a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2=a^2((x-h)^2-2(x-h)c+c^2+(y-k)^2)$$

$\Longleftrightarrow$

$$a^4+c^2(x-h)^2=a^2(x-h)^2+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2. \quad (13)$$

Ahora, los extremos del lado menor son de la forma $A_1=(h,k+b)$ y $A_2=(h,k-b)$ con $b>0$, pero $F_1A_1=a$, de donde, por el teorema de Pitágoras, tenemos que $b^2=a^2-c^2$ y tenemos que la ecuación (13) es equivalente a

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2,$$

es decir, la ecuación (13) equivale a

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1. \quad (14)$$

Para ver que (14) es la ecuación de la elipse hay que demostrar que cualquier punto (x,y) que satisface (13) debe estar en la elipse. Ahora, la ecuación (13) conduce a que $\frac{(x-h)^2}{a^2}\le 1$, de donde $-a\le x-h\le a$, pero como $a>c$, tenemos que $c(x-h)<a^2$, es decir $a^2-c(x-h)>0$, de donde se puede ver que (12) $\Longrightarrow$ (11).

Veamos ahora que (10) $\Longrightarrow$ (9). Para demostrar que (10) $\Longrightarrow$ (9) es suficiente con demostrar la imposibilidad de la ecuación

$$-\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} = 2a - \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

la cual es equivalente a la ecuación

$$\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} - \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} = 2a,$$

pero por la desigualdad del triángulo $\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} - \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \leq 2c < 2a$, por lo que (14) es la ecuación de la elipse con centro en (h,k), focos $(h-c,k)$ y $(h+c,k)$, vértices $(h-a,k)$ y $(h+a,k)$. Observemos que los extremos de los lados rectos son $(h+c, k+\frac{b^2}{a})$, $(h+c, k-\frac{b^2}{a})$, $(h-c, k+\frac{b^2}{a})$ y $(h-c, k-\frac{b^2}{a})$, y la longitud de cada lado recto es $2\frac{b^2}{a}$.

Resumamos los análisis anteriores en forma del siguiente teorema.

Teorema 5.1. *La ecuación de una elipse con centro en (h,k), vértices en $(h+a,k)$ y $(h-a,k)$, y extremos del eje menor $(h,k+b)$ y $(h,k-b)$ es de la forma*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

donde los focos son $(h-c,k)$ y $(h+c,k)$ con $c^2 = a^2 - b^2$, la constante de la elipse es $2a$, $a > b > 0$ y la longitud de cada lado recto es $2\frac{b^2}{a}$.

Análogamente se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *La ecuación de una elipse con centro en (h,k), vértices en $(h,k+a)$ y $(h,k-a)$, y extremos del eje menor $(h+b,k)$ y $(h-b,k)$ es de la forma*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

donde los focos son $(h,k-c)$ y $(h,k+c)$ con $c^2 = a^2 - b^2$, la constante de la elipse es $2a$, $a > b > 0$ y la longitud de cada lado recto es $2\frac{b^2}{a}$.

Ejemplo 2. Dada la ecuación de la elipse

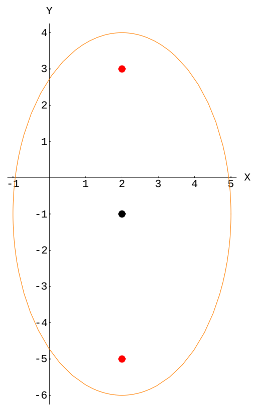
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1,$$

hallar los vértices, centro, focos, extremos del eje menor y utilizar lo anterior para trazar la gráfica de la elipse.

Solución. Observemos que la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-(-1))^2}{5^2}=1,$$

por lo que la elipse tiene su centro en $(h,k)=(2,-1)$, como $5>3$, entonces el eje mayor es vertical, $2\cdot 5=10$ es la constante de la elipse, así los vértices de la elipse son $(2,-1+5)$ y $(2,-1-5)$, es decir $(2,4)$ y $(2,-6)$. Los extremos del eje menor son $(2+3,-1)$ y $(2-3,-1)$, es decir $(5,-1)$ y $(-1,-1)$. Los focos son $(2,-1+c)$ y $(2,-1-c)$ donde $c^2=a^2-b^2$, es decir $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$ por lo que los focos son $(2,3)$ y $(2,-5)$. Tracemos ahora la gráfica de la elipse.

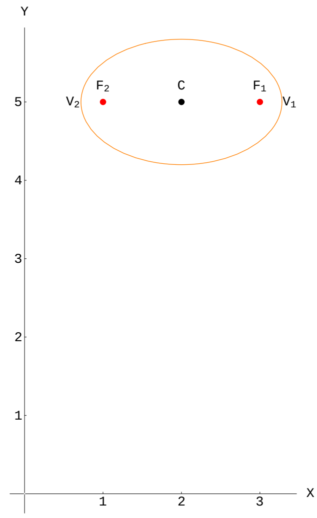


Ejemplo 3. Trazar la gráfica y hallar la ecuación de la elipse con focos en $(3,5)$ y $(1,5)$, y longitud de lado recto 1.

Solución. El centro (h,k) de la elipse es $(2,5)$ y el valor de c es 1 pues $(2+1,5)=(3,5)$ y $(2-1,5)=(1,5)$, además el eje focal es horizontal. La longitud del lado recto es $2\frac{b^2}{a}=1$, pero $b^2=a^2-c^2=a^2-1$, de donde $2\frac{a^2-1}{a}=1$, así $2a^2-a-2=0$, luego $a=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ó $a=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$, pero como $a>0$, entonces $a=\frac{1+\sqrt{17}}{4}\approx 1.28$. Ahora $b^2=\frac{a}{2}=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, de donde la ecuación de la elipse es

$$\frac{16(x-2)^2}{(1+\sqrt{17})^2}+\frac{8(y-5)^2}{1+\sqrt{17}}=1.$$

Tenemos pues que el centro de la elipse es el punto $(2,5)$, los vértices son los puntos $(2+\frac{1+\sqrt{17}}{4},5)$ y $(2-\frac{1+\sqrt{17}}{4},5)$, y los extremos del eje menor son $\left(2,5+\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}\right)$ y $\left(2,5-\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}\right)$, pudiendo así con estos datos trazar su gráfica.



Observemos que toda elipse con eje focal horizontal o vertical puede representarse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con $A, C > 0$. La ecuación anterior puede ser la de una circunferencia si $A = C$.

Ejemplo 4. Hallar el centro, focos, vértices, longitud de lados rectos y extremos del eje menor, y trazar la gráfica de la elipse cuya ecuación es

$$81x^2 + 49y^2 - 36x + 42y - 3956 = 0.$$

Solución. Agrupemos términos que contengan a x y y y completemos el cuadrado para obtener

$$(81x^2 - 36x + 4) + (49y^2 + 42y + 9) - 3956 = 4 + 9$$

lo que equivale a

$$(9x - 2)^2 + (7y + 3)^2 = 3969$$

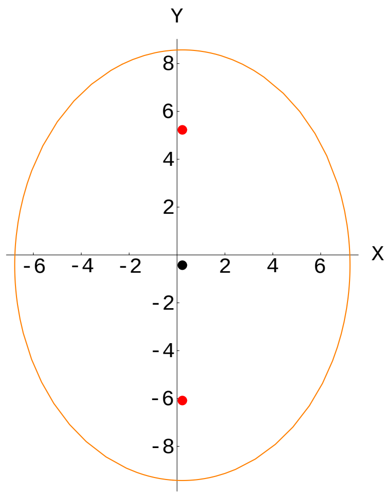
o bien

$$\frac{(x - 2/9)^2}{\frac{3969}{81}} + \frac{(y + 3/7)^2}{\frac{3969}{49}} = 1,$$

es decir

$$\frac{(x - 2/9)^2}{49} + \frac{(y + 3/7)^2}{81} = 1.$$

El centro de la elipse es $C = (2/9, -3/7)$, $a = 9$, $b = 7$, $c = \sqrt{81 - 49} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5.66$ y la longitud de los lados rectos es $2\frac{b^2}{a} = 2(\frac{49}{9}) = \frac{98}{9}$. De esto podemos concluir que los focos son $F_1 = (\frac{2}{9}, -\frac{3}{7} + 4\sqrt{2})$ y $F_2 = (\frac{2}{9}, -\frac{3}{7} - 4\sqrt{2})$, los vértices son $V_1 = (\frac{2}{9}, -\frac{3}{7} + 9)$ y $V_2 = (\frac{2}{9}, -\frac{3}{7} - 9)$, es decir $V_1 = (\frac{2}{9}, \frac{60}{7})$ y $V_2 = (\frac{2}{9}, -\frac{66}{7})$, los extremos del eje menor son $(\frac{2}{9} + 7, -\frac{3}{7})$ y $(\frac{2}{9} - 7, -\frac{3}{7})$, es decir $(\frac{65}{9}, -\frac{3}{7})$ y $(-\frac{61}{9}, -\frac{3}{7})$. Tracemos ahora la elipse con estos datos obtenidos.



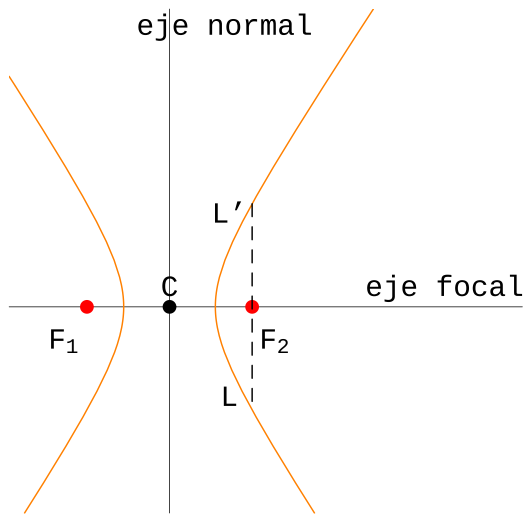
6. La Hipérbola

Definición 6.1. Una **hipérbola** es un conjunto de puntos en el plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos diferentes llamados **focos**, es siempre igual a una constante positiva menor que la distancia entre los focos; a tal constante positiva se le llama **constante de la hipérbola**.

Definición 6.2. Sean F_1 y F_2 los focos de una hipérbola. El **centro** C de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$. A la recta $l = \overleftrightarrow{F_1F_2}$ que pasa por los focos se le llama **eje focal** de la hipérbola. Los puntos V_1 y V_2 de intersección del eje focal con la hipérbola se le llaman **vértices**.

Ejercicio 6.1. Demostrar que una hipérbola solamente tiene dos vértices.

Definición 6.3. A la recta l' perpendicular al eje focal l y que pasa por el centro C se le llama **eje normal**. Al segmento $\overline{V_1V_2}$ cuyos extremos son los vértices se le llama **eje transverso**. Cualquier segmento $\overline{BB'}$ cuyos extremos pertenecen a la hipérbola se llama **cuerda** de la hipérbola. Una cuerda $\overline{EE'}$ que pasa por uno de los focos se llama **cuerda focal**. Una cuerda focal $\overline{LL'}$ perpendicular al eje focal se llama **lado recto**. En esta sección a la distancia del centro a uno de los focos se le denotará por c y a la distancia del centro a uno de los vértices se le denotará por a, de modo que $c > a$. Observemos que $2a$ es la constante de la hipérbola.



Calculemos ahora la longitud de cualquier lado recto de la hipérbola. Sea $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, F_1 un foco, L uno de los extremos del lado recto que pasa por F_1 y $d = F_1L$. Tenemos que el triángulo $\triangle F_2F_1L$ es rectángulo, donde F_1 es el vértice del ángulo recto, por lo cual

$$(F_1F_2)^2 + (F_1L)^2 = (F_2L)^2,$$

es decir

$$(2c)^2 + d^2 = (F_2L)^2,$$

pero por definición de hipérbola tenemos que $2a = F_2L - d$, por lo que

$$(2c)^2 + d^2 = (2a + d)^2,$$

desarrollando tenemos

$$4c^2 + d^2 = 4a^2 + 4ad + d^2,$$

luego $c^2 - a^2 = ad$, es decir $d = \frac{c^2-a^2}{a}$ o bien $d = \frac{b^2}{a}$. Análogamente se puede ver que la distancia de F_1 al otro extremo del lado recto es también $\frac{b^2}{a}$, por lo que d es la mitad de la longitud del lado recto, de modo que la longitud del lado recto es $2\frac{b^2}{a}$.

Determinemos ahora una ecuación de la hipérbola cuando sus ejes sean paralelos o perpendiculares a los ejes de coordenadas.

Supongamos que una hipérbola tiene eje focal horizontal con centro en $C = (h, k)$. Los vértices deben ser de la forma $V_1 = (h + a, k)$ y $V_2 = (h - a, k)$, y los focos de la forma $F_1 = (h + c, k)$ y $F_2 = (h - c, k)$, con $c > a$, donde $2a$ es la constante de la hipérbola. Todo punto $P = (x, y)$ del plano está en la hipérbola si y sólo si

$$|PF_1 - PF_2| = 2a, \tag{1}$$

pero se tiene que

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left|\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2}\ \right| = 2a$$

$\Longleftrightarrow$

$$\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} = 2a$$

o bien

$$\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} = -2a$$

$\Longleftrightarrow$

$$\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}$$

o bien

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}(x-h)^2-2(x-h)c+c^2+(y-k)^2 &= 4a^2+4a\sqrt{((x-h)+c)^2+(y-k)^2}\\ &\quad +(x-h)^2+2(x-h)c+c^2+(y-k)^2\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}(x-h)^2+2(x-h)c+c^2+(y-k)^2 &= 4a^2+4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}\\ &\quad +(x-h)^2-2(x-h)c+c^2+(y-k)^2\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$4|x-h|c = 4a(a+\sqrt{(c-|x-h|)^2+(y-k)^2})$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{|x-h|c}{a} - a = \sqrt{c^2-2|x-h|c+(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{(x-h)^2c^2}{a^2} - 2|x-h|c + a^2 = c^2 - 2|x-k|c + (x-h)^2 + (y-k)^2$$

con $\frac{|x-h|c}{a} - a \geq 0$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{(x-h)^2c^2}{a^2} - (x-h)^2 - (y-k)^2 = c^2 - a^2$$

con $\frac{|x-h|c}{a} \geq a$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{(x-h)^2(c^2-a^2)}{a^2} - (y-k)^2 = c^2 - a^2$$

con $\frac{(x-h)^2}{a^2} \geq \frac{a^2}{c^2}$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{(x-h)^2b^2}{a^2} - (y-k)^2 = b^2$$

con $\frac{(x-h)^2}{a^2} \geq \frac{a^2}{c^2}$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

con $\frac{(x-h)^2}{a^2} \geq \frac{a^2}{c^2}$.

Ahora, como $c > a$, tenemos que la ecuación (2) implica que $\frac{(x-h)^2}{a^2} \geq \frac{a^2}{c^2}$, de tal manera que (1) es equivalente a (2), es decir (2) es la ecuación de la hipérbola, estableciendo así el siguiente teorema.

Teorema 6.1. *En el plano* XY *la ecuación de una hipérbola con centro en $C = (h, k)$, focos $F_1 = (h + c, k)$ y $F_2 = (h - c, k)$, vértices $V_1 = (h + a, k)$ y $V_2 = (h - a, k)$, está dada por*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$ y la longitud de cada lado recto es $2\frac{b^2}{a}$.

Análogamente se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 6.2. *En el plano* XY *la ecuación de una hipérbola con centro en $C = (h, k)$, focos $F_1 = (h, k + c)$ y $F_2 = (h, k - c)$, vértices $V_1 = (h, k + a)$ y $V_2 = (h, k - a)$, está dada por*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$ y la longitud de cada lado recto es $2\frac{b^2}{a}$.

Observemos que cualquier hipérbola con eje focal vertical u horizontal tiene una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde $AB < 0$.

Definamos ahora lo que son las asíntotas de una hipérbola.

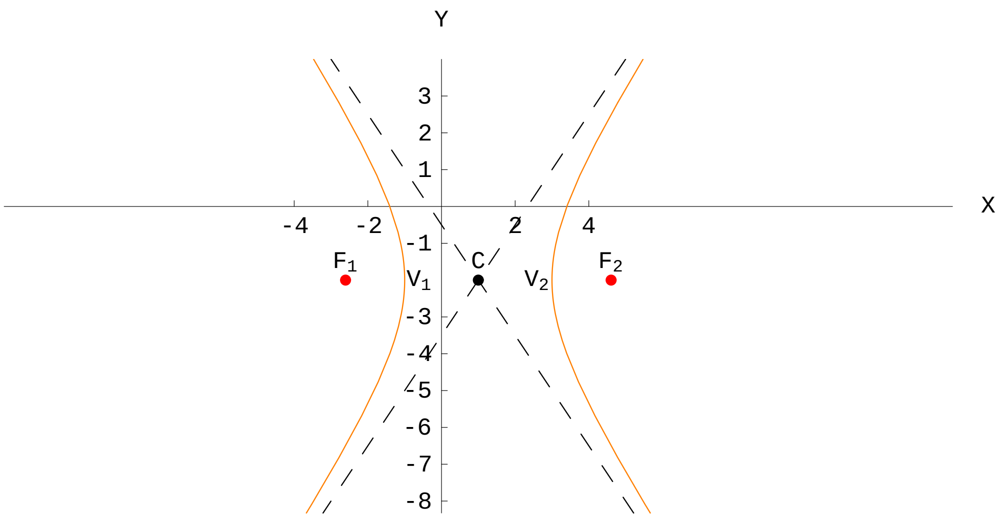
Definición 6.4. Sea $2a$ la constante de una hipérbola, es decir la distancia entre los vértices y $2c$ la distancia entre los focos, tomemos b el número positivo tal que $b^2 = c^2 - a^2$. Sean A y A' dos puntos diferentes en el eje normal tales que el centro C de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ y $AA' = 2b$. Al segmento $\overline{AA'}$ se le llama **eje conjugado** de la hipérbola. Dado un vértice V_1, sea G el punto en el cual se interseca la recta perpendicular al eje focal que pasa por V_1 y la perpendicular al eje conjugado que pasa por A. Análogamente sea G' el punto en el cual se interseca la perpendicular al eje focal que pasa por V_1 y la perpendicular al eje focal que pasa por A'. las rectas $\overleftrightarrow{CG}$ y $\overleftrightarrow{CG'}$ se llaman **asíntotas** de la hipérbola.

Podemos observar que toda hipérbola tiene dos asíntotas y que la definición no depende de la elección del vértice. Las asíntotas tienen propiedades importantes que nos ayudan en el trazo de la hipérbola, por ejemplo un punto de la hipérbola, entre más alejado esté del centro más cercano está de alguna de las asíntotas, pero la hipérbola nunca interseca a una asíntota aunque puede estar tan cercano como se desee de ella.

Ejemplo 1. Hallar el centro, focos, vértices, asíntotas y trazar la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

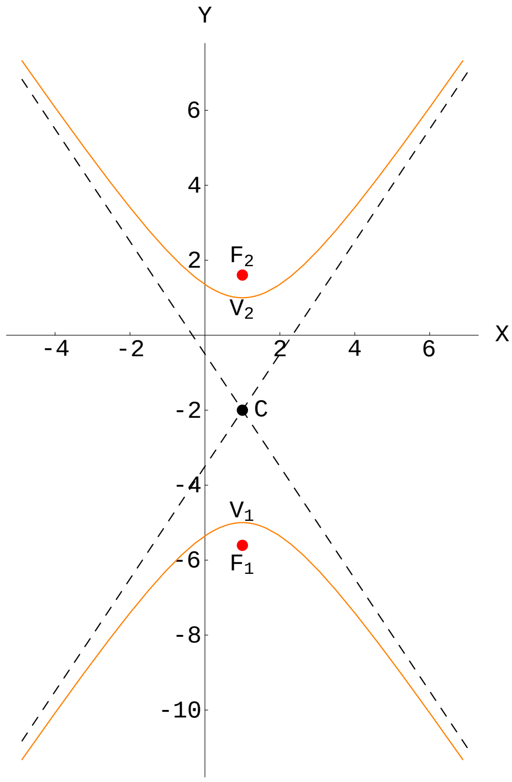
Solución. De acuerdo al teorema 6.1, el centro de la hipérbola es el punto $(1, -2)$, el eje focal es la recta con ecuación $y = -2$, los vértices son $V_1 = (1-2, -2) = (-1, -2)$ y $V_2 = (1+2, -2) = (3, -2)$, los focos son $F_1 = (1-\sqrt{4+9}, -2) = (1-\sqrt{13}, -2)$ y $F_2 = (1+\sqrt{4+9}, -2) = (1+\sqrt{13}, -2)$, los extremos de los lados rectos son $(1-\sqrt{13}, -2+\frac{9}{2}) = (1-\sqrt{13}, \frac{5}{2})$, $(1-\sqrt{13}, -2-\frac{9}{2}) = (1-\sqrt{13}, -\frac{13}{2})$, $(1+\sqrt{13}, -2+\frac{9}{2}) = (1+\sqrt{13}, \frac{5}{2})$ y $(1+\sqrt{13}, -2-\frac{9}{2}) = (1+\sqrt{13}, -\frac{13}{2})$, las asíntotas son las rectas con ecuaciones $y = \frac{3}{2}(x-1) - 2$ y $y = -\frac{3}{2}(x-1) - 2$. Con estos datos podemos hacer un buen trazo de la hipérbola.



Ejemplo 2. De manera similar al ejemplo 1, trazaremos a continuación la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1.$$

Observemos primero que tal hipérbola tiene la misma asíntota y el mismo centro, aunque los vértices son los puntos $(1,-5)$ y $(1,1)$, y los focos son los puntos $(1,-2-\sqrt{13})$ y $(1,-2+\sqrt{13})$.



7. Transformaciones Rígidas en el Plano

Una **transformación** en el plano $\mathbb{R}^2$ es cualquier función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. En esta sección estudiaremos transformaciones rígidas que también son llamadas congruencias o isometrías. Estudiaremos principalmente 3 tipos de transformaciones rígidas: las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones. El estudiar las transformaciones rígidas tiene su importancia debido a que para cualesquiera dos figuras o cuerpos que sean congruentes, se tiene que una es la imagen bajo una transformación rígida de la otra, y viceversa, la imagen de una figura geométrica bajo una transformación rígida es congruente con la figura geométrica. En especial son de interés las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones debido a que cualquier transformación rígida se puede expresar como composición de éstas. Veremos en la sección siguiente lo importante de estas transformaciones al estudiar la ecuación general de segundo grado.

Definición 7.1. Una **traslación** es una función de la forma

$T_{(h,k)} : \underset{(x,y) \mapsto (x+h,y+k)}{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2}$. Es decir, si $(x', y') = T_{(h,k)}(x_0, y_0)$, entonces

$$x' = x_0 + h \qquad \text{y} \qquad y' = y_0 + k.$$

Por ejemplo, si $P = (x, y)$, entonces $T_{(-2,1)}(P) = T_{(-2,1)}(x, y) = (x-2, y+1)$, $T_{(-2,1)}(4, 5) = (4-2, 5+1) = (2, 6)$. Cualquier traslación $T_{(h,k)}$ al evaluarla en un punto P recorre al punto h unidades a la derecha y k unidades arriba. Por ejemplo la traslación $T_{(7,4)}$ envía a la circunferencia con centro en el origen y radio 2 a la circunferencia con centro en el $(7, 4)$ y radio 2. La misma traslación envía a la recta con pendiente 1 y que pasa por $(-4, 0)$ a la recta con pendiente 1 que pasa por $(3, 4)$.

Si (x', y') es la traslación $T_{(h,k)}$ del punto (x_0, y_0), entonces $x_0 = x' - h$ y $y_0 = y' - k$, por lo que si (x_0, y_0) satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, entonces (x', y') satisface la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = 4$. En general tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7.1. *Un punto (x_0, y_0) satisface una fórmula*

$$xRy$$

si y sólo si $(x_1, y_1) = T_{(h,k)}(x_0, y_0)$ satisface la fórmula

$$(x-h)R(y-k).$$

En el teorema anterior R es una relación y xRy representa una fórmula que relaciona x y y, es decir xRy es una proposición que dice algo de (x,y). Así, decimos que (x_0,y_0) **satisface** xRy cuando x_0Ry_0 es verdadera.

Demostración del teorema 7.1. Si $(x_1,y_1) = T_{(h,k)}(x_0,y_0)$, entonces $(x_1,y_1) = (x_0+h, y_0+k)$ por lo que $x_0 = x_1 - h$ y $y_0 = y_1 - k$, de modo que

$$x_0Ry_0 \Longleftrightarrow (x_1-h)R(y_1-k). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 1. La traslación $T_{(3,-1)}$ transforma la hipérbola con ecuación $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ en la hipérbola con ecuación $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-(-1))^2}{9} = 1$, es decir en la hipérbola con ecuación $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

Ejemplo 2. La traslación $T_{(4,2)}$ transforma la elipse con ecuación $(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 1$ en la elipse con ecuación $(x-6)^2 + 5(y-1)^2 = 1$.

Ejemplo 3. La traslación $T_{(-\frac{1}{2},3)}$ transforma la parábola con ecuación $x^2 + 2x - 8y + 5 = 0$ en la parábola con ecuación $(x+\frac{1}{2})^2 + 2(x+\frac{1}{2}) - 8(y-3) + 5 = 0$.

El conjunto de puntos $\{(x,y)|y \geq x^2+1\}$ se transforma mediante $T_{(3,5)}$ en el conjunto $\{(x,y)|y-3 \geq (x-3)^2+1\} = \{(x,y)|y \geq (x-3)^2+4\}$.

Teorema 7.2. *Las traslaciones preservan distancias, es decir si* $T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es una traslación, entonces*

$$d(T_{(a,b)}(P_0), T_{(a,b)}(P_0')) = d(P_0, P_0').$$

Demostración. Sean $P_0 = (x_0,y_0)$, y $P_0' = (x_0',y_0')$ puntos del plano.

$$d(T_{(a,b)}(P_0), T_{(a,b)}(P_0')) = d((x_0+a, y_0+b), (x_0'+a, y_0'+b))$$

$$= \sqrt{((x_0+a)-(x_0'+a))^2 + ((y_0+b)-(y_0'+b))^2}$$

$$= \sqrt{(x_0-x_0')^2 + (y_0-y_0')^2} = d(P_0,P_0'). \qquad \blacksquare$$

Definición 7.2. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Una **rotación** θ (con respecto al origen) es una transformación $G_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada punto $P_0 \neq O$ lo envía al punto $P_1 \neq O$ tal que al ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} P_0OP_1$ le corresponde el valor θ, $OP_1 = OP_0$ y además $G_\theta(O) = O$.

Si $P_0 = (x_0, y_0)$ y $r = OP_0$, entonces $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Si R es un punto a la derecha del origen O y α es la medida del ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} ROP_0$, entonces $x_0 = r\cos\alpha$ y $y_0 = r \operatorname{sen}\alpha$ de modo que $x_1 = r\cos(\alpha+\theta)$ y $y_1 = r\operatorname{sen}(\alpha+\theta)$, pero

$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta$$

y

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha \operatorname{sen}\theta,$$

de donde

$$x_1 = r(\cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta) = x_0\cos\theta - y_0 \operatorname{sen}\theta$$

y (1)

$$y_1 = r(\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha \operatorname{sen}\theta) = y_0\cos\theta + x_0 \operatorname{sen}\theta.$$

Por ejemplo, el punto $(5, -1)$ al aplicarle una rotación de $30°$ se transforma en el punto $(5\cos 30° - (-1)\operatorname{sen} 30°, -1\cos 30° + 5\operatorname{sen} 30°) = (5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\cdot\frac{1}{2}) = (\frac{5\sqrt{3}+1}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2})$.

Si al punto $(-5, -2)$ le aplicamos una rotación de $-90°$, se transforma en el punto $(-5\cos(-90°) - (-2)\operatorname{sen}(-90°), -2\cos(-90°) + (-5)\operatorname{sen}(-90°)) = (-2, 5)$.

Teorema 7.3. *Un punto (x_0, y_0) satisface una fórmula*

$$xRy$$

si y sólo si el punto $(x_1, y_1) = G_\theta(x_0, y_0)$ satisface la fórmula

$$(x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta)R(y\cos\theta - x \operatorname{sen}\theta).$$

Demostración. De las fórmulas (1) tenemos que si $(x_1, y_1) = G_\theta(x_0, y_0)$, entonces $x_1 = x_0\cos\theta - y_0 \operatorname{sen}\theta$ y $y_1 = y_0\cos\theta + x_0\operatorname{sen}\theta$. Pero observemos que (x_1, y_1) es el resultado de una rotación θ del punto (x_0, y_0) si y sólo si (x_0, y_0) es el resultado de una rotación $-\theta$ de (x_1, y_1), por lo que

$$x_0 = x_1\cos(-\theta) - y_1 \operatorname{sen}(-\theta) = x_1\cos\theta + y_1\operatorname{sen}\theta \quad \text{y}$$

$$y_0 = y_1\cos(-\theta) + x_1 \operatorname{sen}(-\theta) = y_1\cos\theta - x_1\operatorname{sen}\theta,$$

por lo que $x_0Ry_0 \iff (x_1\cos\theta + y_1 \operatorname{sen}\theta)R(y_1\cos\theta - x_1 \operatorname{sen}\theta)$. ∎

Teorema 7.4. *Las rotaciones preservan distancias. Es decir*

$$d(G_\theta(P), G_\theta(P')) = d(P, P').$$

Demostración. Sean $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_0' = (x_0', y_0')$, $G_\theta(P_0) = P_1 = (x_1, y_1)$, $G_\theta(P_0') = P_1' = (x_1', y_1')$ y h la distancia entre P_0 y P_0'. Por el teorema 7.3 tenemos que

$$h = d((x_1 \cos\theta + y_1 \operatorname{sen}\theta, y_1 \cos\theta - x_1 \operatorname{sen}\theta), (x_0', y_0')).$$

Aplicando de nuevo el teorema 7.3 tenemos que $h = d((x_1 \cos\theta + y_1 \operatorname{sen}\theta, y_1 \cos\theta - x_1 \operatorname{sen}\theta), (x_1' \cos\theta + y_1' \operatorname{sen}\theta, y_1' \cos\theta - x_1' \operatorname{sen}\theta))$, ahora $d((x_1 \cos\theta + y_1 \operatorname{sen}\theta, y_1 \cos\theta - x_1 \operatorname{sen}\theta), (x_1' \cos\theta + y_1' \operatorname{sen}\theta, y_1' \cos\theta - x_1' \operatorname{sen}\theta)) = ((x_1 \cos\theta + y_1 \operatorname{sen}\theta - x_1' \cos\theta - y_1' \operatorname{sen}\theta)^2 + (y_1 \cos\theta - x_1 \operatorname{sen}\theta - y_1' \cos\theta + x_1' \operatorname{sen}\theta)^2)^{1/2} = ((x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2)^{1/2} = d(G_\theta(x_1, y_1), G_\theta(x_1', y_1'))$. ∎

Definición 7.3. A la transformación F que a cada punto (x, y) le asigna el punto $(x, -y)$ se le llama **reflexión en el eje de las abscisas** (el eje X). Veamos que las reflexiones en el eje de las abscisas preservan longitudes.

Teorema 7.5. *Sean $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ puntos del plano $\mathbb{R}^2$.*

$$d(P_0, P_1) = d(F(P_0), F(P_1)).$$

Demostración. Tenemos que $d(F(P_0), F(P_1)) = d((x_0, -y_0), (x_1, -y_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + ((-y_0) - (-y_1))^2} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = d(P_0, P_1)$, lo cual demuestra el teorema. ∎

Sea $\alpha \subset \mathbb{R}^2$ una recta que no es horizontal, corta al eje de las abscisas en un punto $(x_0, 0)$ y tiene una inclinación θ. A la transformación $R_\alpha := T_{(x_0,0)} \circ G_\theta \circ F \circ G_{-\theta} \circ T_{(-x_0,0)}$ se llama **reflexión** en la recta α.

Si α es una recta horizontal y corta al eje de las ordenadas en el punto $(0, y_0)$, diremos que la tranformación $T_{(0,y_0)} \circ F \circ T_{(0,-y_0)}$ es una **reflexión** en la recta α.

Definición 7.4. Una **transformación rígida** en el plano es una transformación que se puede expresar como una o varias composiciones de traslaciones, rotaciones y reflexiones.

Una consecuencia directa de los teoremas 7.2, 7.4, 7.5 y de las definiciones de reflexión y transformación rígida es el teorema siguiente.

Teorema 7.6. *Las transformaciones rígidas preservan distancias.*

Teorema 7.7. *Sea* $\triangle ABC \subset \mathbb{R}^2$ *un triángulo. Existe una transformación rígida* H *y un triángulo* $\triangle OPQ$ *tal que* $O = (0,0)$*,* P *está en el eje de las abscisas y a la derecha del eje de las ordenadas,* Q *está arriba del eje de las abscisas y además* $H(O) = A$*,* $H(P) = B$ *y* $H(Q) = C$*.*

Demostración. Sea θ la inclinación de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, $P = (x, 0)$ con $x = AB$ y Q sobre el eje de las abscisas tal que $\angle POQ \cong \angle BAC$ y $OQ = AC$. Observemos que la traslación T_A envía O al punto A y las transformaciones $T_A \circ G_\theta$ y $T_A \circ G_{\theta+\pi}$ transforman el eje de las abscisas en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, de tal manera que $(T_A \circ G_\theta(O) = A$ y $T_A \circ G_{\theta+\pi}(O) = A)$ y $(T_A \circ G_\theta(P) = B$ ó $T_A \circ G_{\theta+\pi}(P) = B)$. De las transformaciones $T_A \circ G_\theta$ y $T_A \circ G_{\theta+\pi}$ llamémosle H' a la que envía el punto P al punto B. Observemos además que $H' \circ F$ también transforma el eje de las abscisas en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, de tal manera que $H' \circ F(O) = A$ y $H' \circ F(P) = B$. Ahora, si $H'(Q) = C$, tomamos $H = H'$, si no, entonces (por LLL, construcción de ángulos, localizción de puntos y el teorema 7.6) al definir $H := H' \circ F$ tenemos que $H(Q) = C$. ∎

Corolario 7.7.1. *Sean* $\triangle ABC$*,* $\triangle DEF \subset \mathbb{R}^2$ *dos triángulos tales que* $ABC \cong DEF$*. Existe una transformación rígida* K *del plano* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $K[\triangle ABC] = \triangle DEF$ *y más específicamente* $K(A) = D$*,* $K(B) = E$ *y* $K(C) = F$*.*

Demostración. Tomemos H y $\triangle OPQ$ como el dado en el teorema 7.7. Por el teorema 7.7 existe una transformación rígida S tal que $S(O) = D$, $S(P) = E$ y $S(Q) = F$. Observando que H^{-1} es también una transformación rígida tenemos que $K = S \circ H^{-1}$ es la transformación rígida deseada. ∎

8. La Ecuación General de Segundo Grado

Definición 8.1. Una expresión de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

donde x e y son variables y A, B, C, D, E y F son constantes, se llama **ecuación general de segundo grado** para las variables x e y.

Sean

$$x' = x\cos\theta + y\,\operatorname{sen}\theta$$

y (2)

$$y' = y\cos\theta - x\,\operatorname{sen}\theta,$$

es decir sea (x', y') la rotación $-\theta$ del punto (x, y). Podemos ver que (2) es equivalente a

$$x = x'\cos\theta - y'\,\operatorname{sen}\theta$$

y

$$y = y'\cos\theta + x'\,\operatorname{sen}\theta.$$

Tenemos la siguiente serie de equivalencias

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$\iff$

$$A(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(y'\cos\theta + x'\operatorname{sen}\theta)$$

$$+C(y'\cos\theta + x'\operatorname{sen}\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)$$

$$+E(y'\cos\theta + x'\operatorname{sen}\theta) + F = 0$$

$\iff$

$$(A(\cos\theta)^2 + B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C(\operatorname{sen}\theta)^2)x'^2$$

$$+(A(\operatorname{sen}\theta)^2 - B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C(\cos\theta)^2)y'^2$$

$$+(2(C-A)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + B((\cos\theta)^2 - (\operatorname{sen}\theta)^2))x'y'$$

$$+(D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta)x' + (E\cos\theta - D\operatorname{sen}\theta)y' + F = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(A(\cos\theta)^2 + B\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + C(\mathrm{sen}\,\theta)^2)x'^2$$

$$+(A(\mathrm{sen}\,\theta)^2 - B\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + C(\cos\theta)^2)y'^2$$

$$+(B\cos 2\theta - (A-C)\,\mathrm{sen}\,2\theta)x'y'$$

$$+(D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta)x' + (E\cos\theta - D\,\mathrm{sen}\,\theta)y' + F = 0,$$

por lo tanto, al definir

$A' := A(\cos\theta)^2 + B\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + C(\mathrm{sen}\,\theta)^2,$

$B' := B\cos 2\theta - (A-C)\,\mathrm{sen}\,2\theta,$

$C' := A(\mathrm{sen}\,\theta)^2 - B\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + C(\cos\theta)^2,$

$D' := D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta,$

$E' := E\cos\theta - D\,\mathrm{sen}\,\theta$ y

$F' := F$

el punto (x,y) satisface la ecuación (1) si y sólo si el punto (x',y') satisface la ecuación

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \tag{3}$$

Observemos que si en la ecuación (3) se cumple que $B' = 0$, entonces con la herramienta que tenemos hasta el momento y conociendo los valores de las demás constantes, podemos deducir qué tipo de figura es la gráfica de la ecuación. Por ejemplo, en el caso en que alguna de las constantes A' ó C' sea 0, es decir cuando $B'^2 - 4A'C' = 0$, tenemos que (3) es la ecuación de una parábola, una recta, dos rectas paralelas o bien el conjunto vacío. Si A' y C' son ambas positivas o ambas negativas, es decir si $B'^2 - 4A'C' < 0$, entonces (3) puede ser la ecuación de una elipse, una circunferencia como caso particular de la elipse, un conjunto con un solo punto o el conjunto vacío. Si $A'B' > 0$, es decir si $B'^2 - 4A'C' > 0$, entonces (3) representa la ecuación de una hipérbola o bien la ecuación de dos rectas que se cortan en un solo punto.

Para trazar la gráfica de (1) podemos realizar la transformación dada por (2) y encontrar un valor de θ que haga que $B' = 0$. Una vez encontrado tal valor de θ, se traza la gráfica de (3), y la gráfica de (1) será la de (3) pero con una rotación θ.

Encontremos un valor de θ que haga que $B' = 0$, es decir un valor de θ tal que $B\cos 2\theta - (A - C)\operatorname{sen} 2\theta = 0$. Si $B = 0$, es suficiente con tomar $\theta = 0$, es decir no hacer rotación. Si $B \neq 0$ pero $A = C$, entonces θ debe ser tal que $B\cos 2\theta = 0$, es decir debe ser tal que $\cos 2\theta = 0$, con lo que es suficiente con tomar $\theta = 45°$. Si $B \neq 0$ y $A \neq C$, entonces es necesario y suficiente que $\frac{B}{A-C} = \tan 2\theta$, con lo que es suficiente con tomar $\theta = \frac{1}{2}\arctan(\frac{B}{A-C})$.

Tenemos que independientemente del valor de θ

$$
\begin{aligned}
&B'^2 - 4A'C'\\
&= (B\cos 2\theta - (A - C)\operatorname{sen} 2\theta)^2\\
&- 4(A(\cos\theta)^2 + B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C(\operatorname{sen}\theta)^2)\\
&(A(\operatorname{sen}\theta)^2 - B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C(\cos\theta)^2)\\
&= B^2((\cos 2\theta)^2 + 4(\cos\theta\operatorname{sen}\theta)^2)\\
&+ AB(-2\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta + 4(\cos\theta)^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 4(\operatorname{sen}\theta)^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\\
&+ BC(2\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta - 4(\cos\theta)^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4(\operatorname{sen}\theta)^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\\
&+ A^2((\operatorname{sen} 2\theta)^2 - 4(\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^2) + C^2((\operatorname{sen} 2\theta)^2 - 4(\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^2)\\
&+ AC(-2(\operatorname{sen} 2\theta)^2 - 4((\cos\theta)^4 + (\operatorname{sen}\theta)^4))\\
&= B^2((\cos 2\theta)^2 + (\operatorname{sen} 2\theta)^2)\\
&- AB(2\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta - 4((\cos\theta)^2 - (\operatorname{sen}\theta)^2)\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\\
&+ BC(2\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta - 4((\cos\theta)^2 - (\operatorname{sen}\theta)^2)\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\\
&+ A^2((\operatorname{sen} 2\theta)^2 - (\operatorname{sen} 2\theta)^2) + C^2((\operatorname{sen} 2\theta)^2 - (\operatorname{sen} 2\theta)^2)\\
&- 4AC(2(\cos\theta\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^4 + (\operatorname{sen}\theta)^4)\\
&= B^2 - AB(2\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta - 2\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta)\\
&+ BC(2\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta - 2\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta)\\
&- 4AC((\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2)^2 = B^2 - 4AC.
\end{aligned}
$$

Definición 8.2. En la ecuación general de segundo grado (1) a la cantidad $B^2 - 4AC$ se le llama **indicador**.

Definición 8.3. Cuando el indicador de (1) es negativo decimos que la ecuación es del **género elipse**. Cuando el indicador es cero decimos que la ecuación es del **género parábola**. Cuando el indicador es positivo decimos que la ecuación es del **género hipérbola**.

Cuando una ecuación general de segundo grado es del género elipse, la gráfica es una elipse, un conjunto con un solo punto o bien el conjunto vacío. Cuando la ecuación es del género parábola, la gráfica es la de una parábola, una recta, dos rectas paralelas, el conjunto vacío o bien $\mathbb{R}^2$. Cuando la ecuación es del género hipérbola, la gráfica es la de una hipérbola o bien dos rectas que se cortan en un solo punto.

Resumamos los resultados de esta sección en el siguiente teorema.

Teorema 8.1. *Sea K la gráfica de una ecuación general de segundo grado de la forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en la que $B \neq 0$ y sea $K' = G_\theta^{-1}[K]$ la imagen inversa de K bajo una rotación θ.

(a) *El conjunto K' es la gráfica de una ecuación de la forma*

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

donde $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$.

(b) *Si $A = C$ y $\theta = 45°$, entonces $B' = 0$.*

(c) *Si $A \neq C$ y $\theta = \frac{1}{2}\arctan(\frac{B}{A-C})$, entonces $B' = 0$.*

9. El Plano Complejo

Para determinar el conjunto de los números complejos aceptaremos el siguiente axioma.

Axioma de números complejos. *Existe un conjunto* $\mathbb{C}$ (llamado **conjunto de números complejos**) *en el cual están definidas dos operaciones* $\tilde{+}$ *y* $\tilde{\cdot}$ (**suma** y **producto** o **multiplicación** respectivamente) *que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. *Si* $z, w \in \mathbb{R}$, *entonces* $z \tilde{+} w = z + w$ *y* $z \tilde{\cdot} w = z \cdot w$. (En adelante para $z, w \in \mathbb{C}$ escribiremos $z + w$ en lugar de $z \tilde{+} w$ y $z \cdot w$ en lugar de $z \tilde{\cdot} w$ ó zw en lugar de $z \tilde{\cdot} w$.)

3. *Existe un* $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathrm{i}\,\mathrm{i} = -1$. (Al número i se le llama **unidad imaginaria**. Observemos que $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.)

4. *Si* $z \in \mathbb{C}$, *existen dos números reales* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $z = a + b\,\mathrm{i}$. (El orden de prioridad en la realización de las operaciones será el mismo que el de la suma y multiplicación en $\mathbb{R}$.)

5. *Si* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *y* $a + b\,\mathrm{i} = c + d\,\mathrm{i}$, *entonces* $a = c$ *y* $b = d$.

6. $0 = 0 + 0\,\mathrm{i}$ *e* $i = 0 + 1\,\mathrm{i} = 0 + \mathrm{i}$.

7. *Las operaciones de suma y multiplicación en* $\mathbb{C}$ *satisfacen las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, es decir para* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *se tiene*

(a) $z_1 z_2 = z_2 z_1$; (b) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

(c) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$; (d) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;

(e) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Definición 9.1. Si $z = a + b\,\mathrm{i}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, el número a recibe el nombre de **parte real** de z y b el de **parte imaginaria** de z, lo cual se denota así $a = \mathrm{Re}(z)$ y $b = \mathrm{Im}(z)$. Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ decimos que z es un número **imaginario puro**. Observemos que $\mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$. A todo elemento de $\mathbb{C}$ se le llama **número complejo**.

Observemos que debido a las propiedades 4 y 5, la función

$$f : \underset{(a,b)\mapsto a+b\,\mathrm{i}}{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}} \quad \text{es una correspondencia biunívoca entre } \mathbb{R}^2 \text{ y } \mathbb{C}.$$

Definición 9.2. Si $a, b \in \mathbb{R}$, a la pareja ordenada (a, b) se le llama **representación cartesiana** del número complejo $a + \mathrm{i}\,b$. Debido a la correspondencia que existe entre el plano $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, al conjunto de los números complejos también se le conoce como el **plano complejo**, así mismo a los números complejos a veces se les llama **puntos** y si $l \subset \mathbb{R}^2$ es una recta, segmento, rayo, ángulo, circunferencia, círculo, triángulo, región triangular, etc., al conjunto correspondiente $f[l] = \{z \in \mathbb{C} : z = f(x, y) \text{ para alguna pareja } (x, y) \in l\}$ se le llama respectivamente recta, segmento, rayo, ángulo, circunferencia, círculo, triángulo, región triangular, etc., además cualquier relación que se guarde entre dos o más elementos o subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ se guardará por convención entre los correspondientes elementos o subconjuntos de $\mathbb{C}$.

Definición 9.3. Si $z = a + b\,\mathrm{i}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, definimos el **inverso aditivo** de z (denotado $-z$) como

$$-z := -a + (-b)\,\mathrm{i}\,.$$

Así mismo, si w es un número complejo, definimos $w-z$ como $w+(-z)$.

Definición 9.4. Definiremos el **eje real** o **eje** X del plano complejo $\mathbb{C}$ como el conjunto de los números reales y el **eje imaginario** o **eje** Y del plano complejo $\mathbb{C}$ como el conjunto de los números imaginarios puros. Al conjunto de los números reales no negativos le llamaremos la **parte positiva del eje** X y lo denotaremos por X^+. De esta manera, al plano complejo también se le llamará plano XY.

Definición 9.5. Si $z = a + b\,\mathrm{i}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, al número comlejo $\bar{z} := a - b\,\mathrm{i}$ se le llama el **conjugado** de z. Obervemos que $\bar{z}$ es la reflexión de z en el eje X.

Observemos que la distancia entre dos números complejos $z = a + b\,\mathrm{i}$ y $w = c + d\,\mathrm{i}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, está dada por

$$|z - w| := \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Dejamos al lector la demostración del siguiente teorema.

Teorema 9.1. *Si* $z, w \in \mathbb{C}$, *entonces* $z = \bar{\bar{z}}$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $z\bar{z} \geq 0$, $\sqrt{z\bar{z}} = |z - 0|$, $z + 0 = z$, $z - z = 0$, $z1 = z$ *y cuando* $z \neq 0$, *tenemos* $z(\frac{1}{z\bar{z}}\bar{z}) = 1$.

Definición 9.6. Debido al teorema anterior, cuando $z \neq 0$, al número $\frac{1}{z\bar{z}}\bar{z}$ se le llama **inverso multiplicativo** de z y se le denota por z^{-1} y para $w \in \mathbb{C}$ definimos la **división** de w entre z como

$$\frac{w}{z} := wz^{-1}.$$

Definición 9.7. Definimos el **módulo** o **norma** de un número complejo z como $|z| := |z - 0|$, es decir $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Al igual que para los números reales, si $z \in \mathbb{C}$, representaremos $z^0 = 1$, $z^1 = z$, $z^2 = zz, \cdots, z^{n+1} = z^n z$ para todo número natural n.

Observemos que la suma de dos números complejos z y w representa la traslación T_w del punto z. Veamos qué significado geométrico tiene la multiplicación de dos números complejos.

Sea $z \neq 0$ un número complejo y α la medida del ángulo dirigido cuyo lado inicial es la parte positiva del eje X y el lado terminal es el rayo con extremo 0 y pasa por z (tal ángulo dirigido lo podemos representar por $(\mathrm{X}^+, \overrightarrow{0\,z})$). Podemos observar que

$$z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha),$$

más aun, $\theta = \alpha + 2n\pi$ para algún entero n si y sólo si

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta). \tag{1}$$

Observemos que si $z = 0$ cualquier número real θ satisface (1).

Definición 9.8. Si $z \neq 0$, cualquier número real θ que satisface la ecuación (1) se dice que es un **argumento** (o una **amplitud**) de z. Dicho de otra forma, un argumento de z es un valor que le corresponde al ángulo dirigido $(\mathrm{X}^+, \overrightarrow{0\,z})$.

Recalquemos que para $z \neq 0$, el número real θ es un argumento de z si y sólo si $\theta + 2n\pi$ también lo es, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Así pues, cualquier número complejo $z \neq 0$ está determinado por su módulo y cualquiera de sus argumentos.

Definición 9.9. Sea z un número complejo diferente de 0, $r = |z|$ su módulo y θ un argumento de z. Se dice que la pareja ordenada (r, θ) es una **representación en coordenadas polares** del número z.

Observemos que cualquier número complejo $z \neq 0$ tiene una infinidad de representaciones en coordenadas polares, sin embargo sólo hay una representación en coordenadas polares (r, θ) tal que $-\pi < \theta \leq \pi$.

DEFINICIÓN 9.10 Sea z un número complejo y (r, θ) una representación en coordenadas polares de z tal que $-\pi < \theta \leq \pi$. A tal valor de θ se le llama el **argumento principal** de z y lo denotamos por $\arg(z)$.

Cuando la representación cartesiana de un número $z \neq 0$ es (x, y), podemos obtener una representación (r, θ) de z en coordenadas polares al hacer $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & \text{si } x > 0; \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & \text{si } x < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \quad \text{e} \quad y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \quad \text{e} \quad y < 0. \end{cases}$$

Recíprocamente, si tenemos una representación (r, θ) en coordenadas polares del número z, su representación cartesiana (x, y) se puede obtener mediante las fórmulas

$$x = r \cos \theta \qquad \text{e} \qquad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Sean z y w dos números complejos diferentes de 0 con coordenadas polares (r, θ) y (ρ, α) respectivamente,

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos \theta + \mathrm{i} \operatorname{sen} \theta)\rho(\cos \alpha + \mathrm{i} \operatorname{sen} \alpha) \\ &= r\rho((\cos \theta \cos \alpha - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha) + \mathrm{i}(\cos \theta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \theta \cos \alpha)) \\ &= r\rho(\cos(\theta + \alpha) + \mathrm{i} \operatorname{sen}(\theta + \alpha)). \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra el siguiente teorema, el cual ofrece una interpretación geométrica de la multiplicación de números complejos.

Teorema 9.2. *Si z y w son dos números complejos con argumentos θ y α respectivamente, entonces una representación en coordenadas polares de zw es $(|z||w|, \theta + \alpha)$.*

Es decir, si tenemos como representaciones en coordenadas polares de z y w a (r, θ) y (ρ, α) respectivamente, entonces tenemos que $(r\rho, \theta + \alpha)$ es una representación en coordenadas polares de zw, por lo cual al multiplicar dos números complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos, lo cual significa que el efecto de la transformación $z \mapsto zw$ es la multiplicación de z por ρ seguida de una rotación G_α (transformación que al aplicarla en un punto le da un giro α con respecto al origen). En particular cuando $|w| = 1$, es decir cuando w está en la circunferencia con centro en 0 y radio 1 (en la llamada **circunferencia unitaria**), tenemos que la transformación $z \mapsto zw$ es una rotación G_α, donde α es cualquier argumento de w. Una consecuencia muy importante del teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 9.2.1. Teorema de de Moivre. *Si (r, θ) es una representación en coordenadas polares de un número complejo z, entonces $(r^n, n\theta)$ es una representación en coordenadas polares de z^n para todo número natural n. Es decir,*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta)). \tag{2}$$

Demostración. Procederemos por inducción matemática. Si $n = 1$ el resultado es obvio. Supongamos que el resultado es válido para $n = k$, entonces z^k tiene representación en coordenadas polares $(r^k, k\theta)$ y por el teorema 8.2, z^{k+1} tiene representación en coordenadas polares $(r^k r, k\theta + \theta) = (r^{k+1}, (k+1)\theta)$, por lo que el resultado también es válido para $n = k + 1$. ∎

La ecuación (2) se conoce como **fórmula de de Moivre**.

Definición 9.11. Si z es un número complejo y $n \in \mathbb{N}$, decimos que un número complejo w es una **raíz n-ésima** de z si

$$z^n = w.$$

El siguiente teorema nos da un método para calcular todas las raíces n-ésima de un número complejo.

Teorema 9.3. *Si $z \neq 0$ es un número complejo con argumento α y $n \in \mathbb{N}$, entonces existen exactamente n números complejos diferentes $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$ que son raíces n-ésimas de z, donde*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

para todo $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

Demostración. Aplicando la fórmula de de Moivre vemos que

$$w_k^n = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)^n \left(\cos\left(n\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

$$= |z|\left(\cos(\alpha + 2k\pi) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha + 2k\pi)\right) = |z|\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right) = z,$$

por lo tanto cada w_k es una raíz n-ésima de z. Veamos ahora que si $k \neq j$, entonces $w_k \neq w_j$. Si tuviéramos que $w_k = w_j$ entonces tendríamos que

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\alpha + 2j\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2j\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

por lo que existiría un número entero l tal que $\frac{\alpha+2j\pi}{n} + 2l\pi = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$, lo cual implica que $k - j = nl$, pero si $l = 0$, entonces $k = j$ y por lo tanto $w_k = w_j$ y si $l \neq 0$, entonces $|k - j| \geq n$ lo que contradice el hecho de que $k, j \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. Así hemos visto que $w_0, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$ son n números complejos diferentes.

Ahora, cualquier número complejo w que sea raíz n-ésima de z debe tener módulo $\sqrt[n]{|z|}$ y su argumento θ debe ser tal que $n\theta$ sea algún argumento de z, por lo tanto $n\theta = \alpha + 2l\pi$ para algún entero l, es decir $\theta = \frac{\alpha+2l\pi}{n}$. Por el algoritmo de la división, podemos encontrar un entero $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ y un entero m tales que $mn + k = l$ y así $\theta = \frac{\alpha+2k\pi}{n} + 2m\pi$, el cual es un argumento de w_k, es decir $w = w_k$ para algún $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. ∎

Definición 9.12. Cuando z es un número complejo diferente de cero y $n \in \mathbb{N}$, a la raíz n-ésima de z cuyo argumento principal es $\frac{\arg(z)}{n}$ se le llama **raíz n-ésima principal** de z y se le denota como $\sqrt[n]{z}$ o como $z^{1/n}$.

Observemos que de acuerdo a la notación anterior $\sqrt[3]{-1} \neq -1$ y $\sqrt[3]{-8} \neq -2$, más precisamente $\sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sqrt[3]{-8} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Sin embargo, -1 sí es una raz cúbica de -1 y -2 sí es una raz cúbica de -8, pero éstas no son las races cúbicas principales de -1 y -8 respectivamente.

IV. GEOMETRÍA VECTORIAL EN $\mathbb{R}^3$

1. Introducción

En este capítulo pretendemos dar una definición de un espacio geométrico donde queden definidos los conceptos de espacio, punto, recta, plano, distancia, área y volumen, de tal manera que satisfagan los postulados enunciados en el capítulo I, que tomamos como los postulados intuitivamente evidentes de la geometría elemental. Con dichos postulados, en nuestro caso 25 en total, se pueden deducir todos los resultados elementales de la Geometría Euclidiana. De los postulados, que para facilitar la lectura enunciaremos a continuación, los primeros 15 corresponden a las relaciones que existen entre los conceptos de punto, recta, plano, espacio y distancia, los postulados del 16 al 19 describen el concepto de área y los postulados del 20 al 25 el de volumen.

Postulado 1. *El espacio es el conjunto de todos los puntos. Además las rectas y los planos son subconjuntos del espacio; es decir, las rectas y los planos son conjuntos cuyos elementos son puntos.*

Postulado 2. Postulado de la distancia. *Existe una única función $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to [0; \infty)$ tal que si P, Q y S son tres puntos cualesquiera del espacio, entonces*

(i) $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$,

(ii) $d(P, Q) = d(Q, P)$,

(iii) $d(P, S) \leq d(P, Q) + d(Q, S)$,

(iv) $d(P, Q)$ *es la distancia entre P y Q.*

Postulado 3. Postulado de la recta. *Dados dos puntos diferentes existe solamente una recta a la cual pertenecen.*

Postulado 4. Postulado de la regla. *Dada una recta $\overleftrightarrow{AB}$, existe una única biyección de $\overleftrightarrow{AB}$ en $\mathbb{R}$ de tal manera que:*

(i) *Si $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$, entonces $PQ = |x - y|$, donde x e y son los números que la biyección le asigna a P y Q respectivamente.*

(ii) *La biyección le hace corresponder al punto A el cero y al punto B un número positivo.*

Postulado 5.

(i) *A todo plano pertenecen al menos tres puntos diferentes que no están alineados.*

(ii) *Al espacio pertenecen al menos cuatro puntos diferentes que no están en un mismo plano.*

Postulado 6. Postulado del plano. *Tres puntos cualesquiera están en algún plano y tres puntos cualesquiera no alineados están solamente en un plano.*

Postulado 7. Postulado de la intersección de planos. *Si dos planos diferentes se intersecan, entonces su intersección es una recta.*

Postulado 8. Postulado de la separación del plano. *Sean l una recta y α un plano en el cual está incluida l. El conjunto de puntos del plano α que no están en la recta l son la unión de dos conjuntos Λ_1 y Λ_2 tales que:*

(i) *Los dos conjuntos Λ_1 y Λ_2 son convexos.*

(ii) *Si $P \in \Lambda_1$ y $Q \in \Lambda_2$, entonces $\overline{PQ}$ interseca a la recta.*

Postulado 9. Postulado de la separación del espacio. *Dado un plano γ, el conjunto de puntos del espacio que no están en γ es la unión de dos conjuntos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ tales que:*

(i) *Los dos conjuntos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son convexos.*

(ii) *Si $P \in \mathcal{G}_1$ y $Q \in \mathcal{G}_2$, entonces $\overline{PQ}$ corta al plano γ.*

Postulado 10. *Siempre existe la longitud de cualquier circunferencia dada.*

Postulado 11. Postulado de adición de arcos. *Sea c una circunferencia cuya longitud es x.*

(i) *Si $\widehat{AB}$ es una semicircunferencia incluida en c, entonces*

$$\ell\widehat{AB} = \frac{x}{2}.$$

(ii) *Si $\widehat{AB}$ y $\widehat{BD}$ son dos arcos diferentes incluidos en c cuya intersección es $\{B\}$ y cuya unión es un arco $\widehat{AD}$ incluido en c, entonces*

$$\ell\widehat{AD} = \ell\widehat{AB} + \ell\widehat{BD}.$$

Postulado 12. *Todas las circunferencias de radio* 1 *tienen la misma longitud.*

Postulado 13. Postulado de construcción de ángulos. *Sea* $\overrightarrow{AB}$ *un rayo incluido en la arista de un semiplano* Λ. *Para cada número* r *entre* 0 *y* π *existe únicamente un rayo* $\overrightarrow{AP}$, *con* $P \in \Lambda$, *tal que* $\measuredangle PAB = r$.

Postulado 14. Postulado LAL. *Toda correspondencia LAL es una congruencia.*

Postulado 15. Postulado de las paralelas. *Dada una recta* l *y un punto* $P \notin l$. *Existe una única recta* l' *tal que* $P \in l'$ *y* $l' \parallel l$.

Postulado 16. Postulado de la congruencia. *Si dos conjuntos con área son congruentes, entonces tienen la misma área.*

Postulado 17. Postulado de adición de áreas. *Si* Ω *es la unión de dos conjuntos en un plano* Ω_1 *y* Ω_2 *con áreas* $a(\Omega_1)$ *y* $a(\Omega_2)$ *respectivamente, y* $\Omega_1 \cap \Omega_2$ *es la unión finita de subconjuntos de segmentos. Entonces*

$$\mathrm{a}(\Omega) = \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2).$$

Postulado 18. *Sean* Ω_1 *y* Ω_2 *dos conjuntos con área.*

(i) *Si* $\Omega_1 \subset \Omega_2$. *Entonces*

$$\mathrm{a}(\Omega_2 \backslash \Omega_1) = \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1).$$

(ii) *Si* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *y* Ω_2 *tiene área cero, entonces también* Ω_1 *tiene área cero.*

(iii) *Cualquier segmento tiene área cero.*

(iv) *Cualquier región poligonal es un conjunto con área.*

Postulado 19. *El área de una región rectangular es el producto de una base y su altura correspondiente.*

Postulado 20. Postulado de la congruencia para volúmenes. *Si dos conjuntos con volumen son congruentes, entonces tienen el mismo volumen.*

Postulado 21. Postulado de adición de volúmenes. *Si* Ω *es la unión de dos conjuntos en el espacio* Ω_1 *y* Ω_2 *con volúmenes* $\mathrm{vol}(\Omega_1)$ *y* $\mathrm{vol}(\Omega_2)$ *respectivamente, y* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. *Entonces*

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \mathrm{vol}(\Omega_1) + \mathrm{vol}(\Omega_2).$$

Postulado 22. *Sean* Ω_1 *y* Ω_2 *son dos conjuntos con volumen.*

(i) *Si* $\Omega_1 \subset \Omega_2$. *Entonces*

$$\mathrm{vol}(\Omega_2 \backslash \Omega_1) = \mathrm{vol}(\Omega_2) - \mathrm{vol}(\Omega_1).$$

(ii) *Si* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *y* $\mathrm{vol}(\Omega_2) = 0$, *entonces* $\mathrm{vol}(\Omega_1) = 0$.

(iii) *Si* Ω_1 *está incluido en algún plano, entonces* $\mathrm{vol}(\Omega_1) = 0$.

(iv) $\Omega_1 \cup \Omega_2$ *es un conjunto con volumen.*

Postulado 23. *Si la base de un cilindro recto es un conjunto con área, entonces el volumen del cilindro es el producto del área de la base y su altura.*

Postulado 24. Principio de Cavalieri. *Dados dos subconjuntos del espacio y un plano. Supongamos que los dos conjuntos tiene asignado un volumen. Si todo plano paralelo al plano dado que interseca a uno de los dos conjuntos, interseca también al otro y las secciones intersecadas de ambos conjuntos tienen áreas iguales. Entonces ambos conjuntos tienen el mismo volumen.*

Postulado 25. *Los cuerpos esféricos, los conos cuya base es un conjunto con área y los cilindros cuya base es un conjunto con área son conjuntos con volumen.*

A un conjunto $\mathcal{E}$ dotado de una función $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to [0; \infty)$ que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) del postulado 2 se le conoce como **espacio métrico**.

Para lograr demostrar que las definiciones que se darán cumplen con los postulados, haremos uso de algunos conceptos matemáticos como el de continuidad y se definirán las operaciones de suma y resta en $\mathbb{R}^3$, producto escalar y el producto por escalar.

2. Álgebra en $\mathbb{R}^3$

Definición 2.1. Comencemos con definir nuestro **espacio** como el conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Un **punto** será un elemento de $\mathbb{R}^3$ al que también llamaremos **vector**.

Definición 2.2 La definición de **distancia** entre dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, que está motivada por el teorema de Pitágoras, está dada por la fórmula

$$d(P, Q) := \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

Para definir los conceptos de recta y plano necesitamos primero definir la suma y la resta de dos puntos, así como el producto por escalar.

Definición 2.3. La **suma** de dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ en $\mathbb{R}^3$ es el punto

$$P + Q := (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3).$$

Asimismo, definimos la **resta** de P y Q como el punto

$$P - Q := (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3).$$

Ahora, si $t \in \mathbb{R}$, definimos el **producto** o **producto por escalar** de t y P como el punto

$$tP := (tp_1, tp_2, tp_3).$$

Definición 2.4. Al punto $(0, 0, 0)$ lo representaremos por $\mathbf{0}$ y le llamaremos el **origen** del espacio. A la distancia entre el origen $\mathbf{0}$ y un punto cualquiera P se le llama la **norma** de P y se le denota por $|P|$. Observemos que la distancia entre dos puntos P y Q está dada por $|P - Q|$ y que si t es un número real, entonces $|tP| = |t||P|$.

Definición 2.5. Diremos que un conjunto l es una **recta**, cuando existan puntos P y Q con $Q \neq \mathbf{0}$ tales que

$$l = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = P + tQ \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 2.6. Diremos que un conjunto Π es un **plano**, cuando existan números a, b, c no todos iguales a cero y un número d tales que

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = d\}.$$

Definición 2.7. Terminemos por el momento definiendo el **producto escalar** o **producto punto** de dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ en $\mathbb{R}^3$ como el número

$$P \cdot Q := p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3.$$

El origen de la definición de producto punto y de suma de vectores se debe al matemático y físico norteamericano Josiah Willard Gibbs (1836-1903) principal precursor del Análisis Vectorial. Tales conceptos fueron generalizados mas tarde por el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) quien trabajó sobre los fundamentos de la geometría, creando un sistema axiomático y demostrando su consistencia.

Observemos que es válida la propiedad conmutativa del producto punto y la propiedad distributiva del producto punto con respecto a la suma de puntos. Con las definiciones anteriores se satisface obviamente el postulado 1.

El siguiente resultado se conoce como la desigualdad de Schwartz.

Desigualdad de Schwartz. *Si* $P, Q \in \mathbb{R}^3$, *entonces*

$$|P \cdot Q| \le \sqrt{P \cdot P}\sqrt{Q \cdot Q}.$$

Demostración. Sean $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ elementos de $\mathbb{R}^3$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(P \cdot Q)^2 &= (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)^2 = (p_1q_1)^2 + (p_2q_2)^2 + (p_3q_3)^2 \\
&+2(p_1q_1p_2q_2 + p_1q_1p_3q_3 + p_2q_2p_3q_3) \\
&= p_1^2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + p_2^2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + p_3^2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \\
&+2(p_1q_1p_2q_2 + p_1q_1p_3q_3 + p_2q_2p_3q_3) \\
&-(p_1^2q_2^2 + p_2^2q_1^2 + p_1^2q_3^2 + p_3^2q_1^2 + p_3^2q_2^2 + p_2^2q_3^2) \\
&= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (p_1q_2 - p_2q_1)^2 \\
&-(p_1q_3 - p_3q_1)^2 - (p_3q_2 - p_2q_3)^2 \\
&\le (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = (P \cdot P)(Q \cdot Q)
\end{aligned}$$

y al sacar raíz cuadrada en cada una de estas expresiones obtenemos la desigualdad de Schwartz. ∎

El siguiente resultado se conoce como la desigualdad del triángulo. Éste será útil para verificar la validez del postulado de la distancia.

Desigualdad del Triángulo. *Si P y Q son dos puntos, entonces*

$$|P+Q| \leq |P| + |Q|.$$

Demostración. Sean $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ dos puntos. De la desigualdad de Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned} |P+Q|^2 &= (p_1+q_1)^2 + (p_2+q_2)^2 + (p_3+q_3)^2 \\ &= (p_1^2+p_2^2+p_3^2) + (q_1^2+q_2^2+q_3^2) + 2(p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3) \\ &= P \cdot P + Q \cdot Q + 2P \cdot Q \\ &\leq P \cdot P + Q \cdot Q + 2\sqrt{P \cdot P}\sqrt{Q \cdot Q} = (|P| + |Q|)^2, \end{aligned}$$

con lo cual, al elevar a la potencia $\frac{1}{2}$, se concluye la desigualdad del triángulo.
centerdot

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo tenemos que si P, Q y S son tres puntos en el espacio, entonces

$$|P-S| = |(P-Q) + (Q-S)| \leq |P-Q| + |Q-S|,$$

de donde podemos ver que también se cumple el postulado de la distancia. (Es fácil comprobar que $|P-Q| = 0 \iff P = Q$ y que $|P-Q| = |Q-P|$.)

Veamos que también se satisface el postulado de la recta, es decir el que afirma que dados dos puntos diferentes, existe solamente una recta a la cual pertenecen.

Sean A y B dos puntos diferentes. Claramente ambos puntos A y B pertenecen a la recta $l = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = A + t(B-A)$ para algún $t \in \mathbb{R}\}$. Supongamos que también pertenecen a una recta $l' = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = P + tQ$ para algún $t \in \mathbb{R}\}$, con $Q \neq \mathbf{0}$. Existen dos números reales diferentes t_0 y t_1 tales que

$$A = P + t_0Q \quad \text{y} \quad B = P + t_1Q.$$

Si $S \in l$, entonces existe un número real t tal que $S = A + t(B-A) = (P+t_0Q)+t(P+t_1Q-(P+t_0Q)) = P+(t_0+tt_1-tt_0)Q \in l'$, por lo tanto $l \subset l'$. Ahora, si $S \in l'$, entonces $S = P+sQ$ para algún $s \in \mathbb{R}$, de modo que $S = P+sQ = A-t_0Q+sQ = A+(s-t_0)Q = A+\frac{s-t_0}{t_1-t_0}(B-A) \in l$, por lo tanto $l' \subset l$, con lo que concluimos que $l = l'$. De esta forma vemos que se satisface el postulado de la recta.

A continuación veremos que también se satisface el postulado de la regla.

De nuevo sean A y B dos puntos diferentes. Tenemos que $\overleftrightarrow{AB} = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = A + t(B - A) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\} =$ $\{S \in \mathbb{R}^3 : S = A + \frac{t}{|B-A|}(B - A) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overleftrightarrow{AB}$ tal que $f(t) = A+\frac{t}{|B-A|}(B-A)$ es la biyección que satisface el postulado de la regla. En efecto, sean $P = A+\frac{t_0}{|B-A|}(B-A)$ y $Q = A+\frac{t_1}{|B-A|}(B-A)$ dos puntos en la recta $\overleftrightarrow{AB}$. tenemos que

$$|P - Q| = \left|\frac{(t_0 - t_1)}{|B - A|}(B - A)\right| = |t_0 - t_1|$$

y además $f(0) = A$ y $f(|B - A|) = B$.

Ahora, si existiera otra biyección g con las propiedades (i) y (ii) del postulado de la regla, tal que $f(c) \neq g(c)$ para algún $C \in \overleftrightarrow{AB}$, entonces $g(|B - A|) = B$, pero $|C - A| = |g(C)| = |f(C)|$, por lo tanto $g(C) = -f(C) \neq 0$. Ahora, por una parte tendríamos que

$$|B - C| = ||B - A| - f(C)|$$

y por otra

$$|B - C| = ||B - A| - g(C)| = ||B - A| + f(C)|,$$

pero como $f(C) \neq 0$, es imposible que $||B - A| - f(C)|$ sea igual a $||B - A| + f(C)|$ de modo que también es válido el postulado de la regla.

Observemos que un rayo $\overrightarrow{PQ}$ puede representarse en la forma

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = P + t(Q - P) \text{ para algún } t \geq 0\} \\ &= \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = tQ + (1 - t)P \text{ para algún } t \geq 0\}, \end{aligned}$$

mientras que el segmento $\overline{PQ}$ es igual a

$$\overline{PQ} = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = tQ + (1 - t)P \text{ para algún } t \in [0; 1]\}.$$

Veamos ahora que se satisface el postulado 5.

Un plano está descrito por una ecuación de la forma

$$ax + by + cz = d,$$

donde alguno de los números a, b, c es diferente de cero. supongamos sin pérdida de generalidad que $c \neq 0$. En este caso los puntos $(0, 0, \frac{d}{c})$,

$(0, 1, \frac{d-b}{c})$ y $(1, 0, \frac{d-a}{c})$ están en el plano y no están alineados. Por lo tanto se cumple el postulado 5 (i).

El postulado 5 (ii) se cumple al tomar los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ y observar que no existe ningún plano e el cual estén esos 4 puntos. En efecto, si existiera un plano con ecuación $ax + by + cz = d$ en el cual estuvieran esos 4 puntos, entonces como el punto $(0, 0, 0)$ satisface la ecuación, debemos tener que $d = 0$. Si además $(1, 0, 0)$ está en el plano, entonces $a = 0$. Si además $(0, 1, 0)$ está en el plano, entonces $b = 0$. Finalmente si $(0, 0, 1)$ está en el plano, entonces $c = 0$, lo cual contradice la definición de plano, por lo tanto también se cumple el postulado 5 (ii).

Establezcamos ahora algunos lemas que nos servirán para verificar la validez de otros postulados.

Lema 2.1. *Toda recta que pasa por el origen está incluida en algún plano.*

Demostración. Si l es una recta que pasa por el origen, entonces $l = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = tP_1$ para algún $t \in \mathbb{R}\}$, donde $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ es un punto diferente del origen. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 \neq 0$. Si $y_1 = z_1 = 0$, entonces todos los puntos de l satisfacen la ecuación $y + z = 0$. Si $y_1 \neq 0$, entonces los puntos de l satisfacen la ecuación $-\frac{z_1}{x_1}x + y = 0$ y si $z_1 \neq 0$, entonces los puntos de l satisfacen la ecuación $-\frac{y_1}{x_1}x + z = 0$. ∎

Lema 2.2. *Una recta $l = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = P_0 + t(P_1 - P_0)$ para algún $t \in \mathbb{R}\}$, donde $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ es un punto diferente del origen y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, está contenida en un plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ si y sólo si $(a, b, c) \cdot P_0 = d$ y la recta que pasa por el origen y por el punto $P_1 - P_0$ está contenida en el plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$.*

Demostración. Supongamos primero que $l = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = P_0 + t(P_1 - P_0)$ para algún $t \in \mathbb{R}\}$, donde $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ es un punto diferente del origen y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, está contenida en un plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = d\}$; como $P_0 \in l$, entonces $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$, es decir $(a, b, c) \cdot P_0 = d$, ahora todo punto de la recta que pasa por el origen y por el punto $P_1 - P_0$ es de la forma $(t(x_1 - x_0), t(y_1 - y_0), t(z_1 - z_0))$ por lo cual $at(x_1 - x_0) + bt(y_1 - y_0) + ct(z_1 - z_0) = t(ax_1 + by_1 + cz_1) - t(ax_0 + by_0 + cz_0) = td - td = 0$. Supongamos ahora que $(a, b, c) \cdot P_0 = d$ y que la recta que pasa por el origen y por el punto $P_1 - P_0$ está contenida en el plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$

$ax + by + cz = 0\}$. Si $S \in l$, entonces $S = P_0 + t(P_1 - P_0)$ para algún $t \in \mathbb{R}$, es decir $S = (x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0), z_0 + t(z_1 - z_0))$ y $a(x_0 + t(x_1 - x_0)) + b(y_0 + t(y_1 - y_0)) + c(z_0 + t(z_1 - z_0)) = (ax_0 + by_0 + cz_0) + t((ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)) = d + t(d - d) = d$, por lo que $l \subset \Pi$. ∎

Lema 2.3. *Si O, P_1 y P_2 son tres puntos diferentes y no alineados, entonces existe un único plano que pasa por los puntos O, P_1 y P_2.*

Demostración. Pongamos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ y observemos que es suficiente demostrar que existen tres números reales a, b y c no todos iguales a cero, tales que

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$$

y

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = 0.$$

Si suponemos, sin pérdida de generalidad, que $x_1 \neq 0$, el anterior sistema de ecuaciones es equivalente al sistema

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$$

$$b\left(\frac{x_2}{x_1}y_1 - y_2\right) + c\left(\frac{x_2}{x_1}z_1 - z_2\right) = 0,$$

pero como los puntos no están alineados, entonces $\frac{x_2}{x_1}y_1 - y_2 \neq 0$ ó $\frac{x_2}{x_1}z_1 - z_2 \neq 0$. De nuevo sin perder generalidad supongamos que $\frac{x_2}{x_1}z_1 - z_2 \neq 0$. Si $b = 0$ necesariamente concluimos que $b = c = 0 = a$ y no resulta la ecuación de un plano. Al tomar $b \neq 0$, necesariamente debemos tener $c = \frac{-b(\frac{x_2}{x_1}y_1 - y_2)}{(\frac{x_2}{x_1}z_1 - z_2)}$ y $a = \frac{-(by_1 + cz_1)}{x_1}$, y podemos observar que los puntos O, P_1 y P_2 satisfacen la ecuación

$$ax + by + cz = 0,$$

además para los diferentes valores no nulos de b resultan ecuaciones equivalentes. ∎

Lema 2.4. *Toda recta está incluida en algún plano.*

Demostración. Sea $\overleftrightarrow{QP}$ una recta. Tenemos que la recta $\{S \in \mathbb{R}^3 : S = t(P - Q)$ para algún $t \in \mathbb{R}\}$ pasa por el origen, luego, por el lema 2.1 está incluida en algún plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + by + cz = 0\}$ y si tomamos $d = (a, b, c) \cdot Q$, entonces por el lema 2.2 tenemos que $\overleftrightarrow{QP} \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + by + cz = d\}$. ∎

Lema 2.5. *Tres puntos no alineados pertenecen a un único plano.*

Demostración. Sean Q, P y R tres puntos no alineados y observemos que $O = Q - Q$, $P_1 = P - Q$ y $P_2 = R - Q$ tampoco están alineados. Por el lema 2.3, los puntos O, P_1 y P_2 están en un único plano, el cual debido a que pasa por el origen es de la forma $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$ y por el lema 2.2 tenemos que el único plano al cual pertenecen los puntos Q, P y R es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; ax + by + cz = d\}$, donde $d = (a, b, c) \cdot Q$. ∎

Con los lemas 2.4 y 2.5 podemos concluir que se satisface el postulado del plano (postulado 6).

Para verificar el postulado 9, sean Π_1 y Π_2 dos planos diferentes que se cortan cuyas ecuaciones son respectivamente

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad \text{y} \qquad a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \tag{1}$$

Observemos que no existe ningún número $s \in \mathbb{R}^2$ tal que $(a_1, b_1, c_1) = s(a_2, b_2, c_2)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que en la segunda ecuación de (1) se tiene $a_2 \neq 0$ y sea $t_1 = \frac{a_1}{a_2}$. El sistema de ecuaciones (1) es equivalente con el sistema de ecuaciones

$$(b_1 - t_1b_2)y + (c_1 - t_1c_2)z = d_1 - t_1d_2 \qquad \text{y} \qquad a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \tag{2}$$

Ahora, de nuevo sin pérdida de generalidad supongamos que $b_1 - t_1b_2 \neq 0$. Al despejar y en la primera ecuación de (2) y luego x en la segunda obtenemos que x e y son de la forma

$$y = \alpha z + \beta \qquad \text{y} \qquad x = \gamma z + \delta, \tag{3}$$

para algunos valores constantes de α, β y γ de tal manera que (3) es equivalente a (2), por lo tanto $(x, y, z) \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \iff x = \gamma z + \delta$ e $y = \alpha z + \beta$, de donde concluimos que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \gamma z + \delta \text{ y } y = \alpha z + \beta\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \text{ existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, y, z) = (\delta, \beta, 0) + t(\gamma, \alpha, 1)\}$ lo cual es una recta. Lo anterior verifica la validez del postulado de la intersección de planos (postulado 7).

Verifiquemos ahora la validez de los postulados 8 y 9 de separación del plano y del espacio. Primero demostremos el postulado de la separación del espacio.

Sea γ un plano y $ax + by + cz = d$ la ecuación que lo describe, $\mathcal{G}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; ax + by + cz > d\}$ y $\mathcal{G}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; ax + by + cz < d\}$. Afirmamos que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son convexos. En efecto si $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{G}_1$ y $t \in [0, 1]$, entonces $a(tx_0 + (1-t)x_1) + b(ty_0 + (1-t)y_1) + c(tz_0 + (1-t)z_1) = t(ax_0 + by_0 + cz_0) + (1-t)(ax_1 + by_1 + cz_1) > td + (1-t)d = d$, por lo tanto $t(x_0, y_0, z_0) + (1-t)(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{G}_1$, es decir $\mathcal{G}_1$ es un conjunto convexo. Análogamente se puede demostrar que $\mathcal{G}_2$ es un conjunto convexo. Así tenemos que se cumple el postulado 9 (i).

Ahora, si $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{G}_1$ y $(x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{G}_2$, entonces al tomar $d_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$, $d_2 = ax_2 + by_2 + cz_2$ y $t = \frac{d - d_2}{d_1 - d_2}$ obtenemos que $0 < t < 1$ y $t(x_1, y_1, z_1) + (1 - t)(x_2, y_2, z_2) \in \gamma$, por lo que se cumple el postulado 9 (ii) y la demostración de que se satisface el postulado 9 está completa.

Para verificar que se cumple el postulado de la separación del plano, sean l una recta y α un plano en el cual está incluida l. Tomemos dos puntos diferentes $P, Q \in l$ y un punto $R \notin \alpha$, además sea γ el plano al cual pertenecen P, Q y R, y sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ como en el postulado de la separación del espacio. Finalmente tomando $\Lambda_1 = \alpha \cap \mathcal{G}_1$ y $\Lambda_2 = \alpha \cap \mathcal{G}_2$ se satisface el postulado 8.

Tenemos que con las definiciones dadas de espacio, plano, recta, punto y distancia se satisfacen los primeros nueve postulados de la geometría elemental y todas sus consecuencias. Uno de nuestros objetivos es el verificar que se satisfacen todos los otros postulados para lo cual deberemos definir adecuadamente los conceptos de área y de volumen, lo cual haremos más adelante.

3. Trayectorias y sus Longitudes

En esta sección estudiaremos brevemente el concepto de longitud que servirá para verificar la validez de los postulados del 10 al 15. En lo que sigue cuando hablemos del conjunto $\mathbb{R}^2$ tendremos siempre en mente la identificación de los puntos de este conjunto con los del plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 0\}$ dada por la biyección que a cada pareja (x, y) le hace corresponder la terna $(x, y, 0)$, así hablaremos del plano $\mathbb{R}^2$, a los elementos de $\mathbb{R}^2$ los llamaremos también puntos, a las imágenes inversas de rectas, segmentos, rayos, triángulos, circunferencias, círculos, etc. les llamaremos rectas, segmentos, rayos, triángulos, circunferencias, círculos, etc. respectivamente. También definimos el producto punto de dos elementos de $\mathbb{R}^2$ como $(x, y) \cdot (a, b) = xa + yb$ y la distancia entre los puntos (x, y) y (a, b) como $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, observando la preservación de la distancia por medio de tal biyección, así como todas las propiedades que se hereden de manera obvia. De manera similar al conjunto $\mathbb{R}$ lo llamaremos la **recta real** y lo identificaremos con la recta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y = 0, \; z = 0\}$ cuando sea conveniente.

Definición 3.1. Una función $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es **continua** en $x_0 \in [a; b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|y - x_0| < \delta$ y $y \in [a; b]$, entonces $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Diremos que φ es **continua** si es continua en todo elemento de $[a; b]$. En este caso, decimos que el recorrido de φ es una **trayectoria** o, si queremos ser más específicos, que es la trayectoria de φ, además diremos que φ es una **parametrización** de su trayectoria.

Definición 3.2. Dada una trayectoria parametrizada por una función $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Si φ es inyectiva, diremos que la trayectoria de φ es una **trayectoria simple con extremos** $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$. Cuando $\varphi(a) = \varphi(b)$ y además $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$ para x_0 y x_1 diferentes en $[a; b)$, diremos que la trayectoria de φ es una **trayectoria cerrada simple**. Una **trayectoria simple** es una trayectoria simple con extremos o una trayectoria cerrada simple. A una trayectoria que esté incluida en un plano se le llamará **trayectoria plana**.

Observemos que una trayectoria puede tener varias parametrizaciones diferentes.

Definición 3.3. Si $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función, decimos que una función $\varphi_i : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ es una **función componente** de φ (la i-ésima función componente) si para todo $x \in [a;b]$ tenemos que $\varphi_i(x)$ es la i-ésima componente de $\varphi(x)$.

Teorema 3.1. *Una función $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es continua si y sólo si sus funciones componentes son continuas.*

Demostración. Supongamos primero que las funciones componentes φ_1, φ_2 y φ_3 de φ son continuas. Sea $x_0 \in [a;b]$ y $\varepsilon > 0$, existen tres números positivos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ tales que

$$|y - x_0| < \delta_1 \quad \text{e} \quad y \in [a;b] \quad \Longrightarrow \quad |\varphi_1(x_0) - \varphi_1(y)| < \varepsilon/3,$$

$$|y - x_0| < \delta_2 \quad \text{e} \quad y \in [a;b] \quad \Longrightarrow \quad |\varphi_2(x_0) - \varphi_2(y)| < \varepsilon/3,$$

y

$$|y - x_0| < \delta_3 \quad \text{e} \quad y \in [a;b] \quad \Longrightarrow \quad |\varphi_3(x_0) - \varphi_3(y)| < \varepsilon/3;$$

por lo que si hacemos δ igual al mínimo de $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces

$$|y - x_0| < \delta \quad \text{e} \quad y \in [a;b] \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &|\varphi(x_0) - \varphi(y)| \\ &\le |\varphi_1(x_0) - \varphi_1(y)| + |\varphi_2(x_0) - \varphi_2(y)| + |\varphi_3(x_0) - \varphi_3(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto φ es continua.

Supongamos ahora que φ es continua. Sea $x_0 \in [a;b]$ y $\varepsilon > 0$. Existe un $\delta > 0$ tal que si $|y - x_0| < \delta$ e $y \in [a;b]$, entonces $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Pero como $|\varphi_i(y) - \varphi_i(x_0)| \le |\varphi(y) - \varphi(x_0)|$ para $i \in \{1,2,3\}$ se tiene que también las funciones componentes son continuas. ∎

Definición 3.4. Dado un intervalo $[a;b]$, decimos que Δ es una **partición del intervalo** $[a;b]$ si Δ es una sucesión finita $(x_k)_{k=0}^n$, donde $x_0 = a$, $x_k < x_{k+1}$ para $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ y $x_n = b$. Al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a;b]$ lo denotaremos por P_a^b.

Definición 3.5. Si γ es una trayectoria simple y $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de γ, definimos la **longitud** de γ como

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| : \ (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in P_a^b \right\}.$$

Cuando $\ell(\gamma) \in \mathbb{R}$ diremos que γ tiene **longitud finita**, de otro modo diremos que tiene **longitud infinita**.

Se deja al lector el verificar que la longitud de una trayectoria simple no depende de la parametrización así como el que esta definición no contradice la de longitud de segmento.

Definición 3.6. Cualquier segmento cuyos extremos son dos puntos de una trayectoria γ se dice que es una **cuerda** de γ.

De la definición de longitud se sigue inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *La longitud de cualquier trayectoria siempre es mayor o igual que la de cualquiera de sus cuerdas.*

Teorema 3.3. *Sean $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una trayectoria simple γ; x en el intervalo abierto $(a;b)$; $\varphi_1 : [a;x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\varphi_2 : [x;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ restricciones de φ con trayectorias respectivas γ_1 y γ_2. Tenemos que*

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$

Demostración. Demostremos primero que $\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$. Para cada $\Delta_1 = (x_0, \cdots, x_n) \in P_a^x$ y $\Delta_2 = (y_0, \cdots, y_m) \in P_x^b$ tenemos que $(x_0, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \in P_a^b$ por lo que

$$\ell(\gamma) \geq \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{m} |\varphi(y_k) - \varphi(y_{k-1})|.$$

Dejando fijo Δ_1 y tomando el supremo sobre las particiones Δ_2 tenemos

$$\ell(\gamma) \geq \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| + \ell(\gamma_2).$$

Ahora, en esta última desigualdad, tomamos el supremo sobre todas la particiones Δ_1, obteniendo

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$

Demostremos ahora que $\ell(\gamma) \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$. Sea $\Delta = (t_0, \cdots, t_s) \in P_a^b$. Si x es una componente de Δ, entonces existe un entero positivo $i < s$ tal que $x = t_i$, obteniéndose $(t_0, \cdots, t_i) \in P_a^x$ y $(t_i, \cdots, t_s) \in P_x^b$, de donde

$$\sum_{k=1}^{s} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{i} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| + \sum_{k=i+1}^{s} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|$$

$\leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2),$

es decir

$$\sum_{k=1}^{s} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$

Veamos que la última desigualdad también es válida si x no es una componente de Δ. Si x no es una componente de Δ, existe un entero positivo $i \leq s$ tal que $t_{i-1} < x < t_i$, obteniéndose $(t_0, \cdots, t_{i-1}, x) \in P_a^x$ y $(x, t_i, \cdots, t_s) \in P_x^b$, de donde

$$\sum_{k=1}^{s} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq \left(\sum_{k=1}^{i-1} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| + |\varphi(x) - \varphi(t_{i-1})|\right)$$

$$+ \left(|\varphi(i) - \varphi(x)| + \sum_{k=i+1}^{s} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)\right),$$

es decir

$$\sum_{k=1}^{s} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$$

para cualquier partición $\Delta = (t_0, \cdots, t_s) \in P_a^b$, de donde tomando el supremo sobre todos los Δ se obtiene que

$$\ell(\gamma) \leq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2). \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.4. *La circunferencia incluida en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio r tiene longitud finita.*

Demostración. Para que tenga sentido el enunciado veamos primero que en efecto tal circunferencia es una trayectoria, para esto daremos una parametrización de la circunferencia. Una parametrización de la semicircunferencia cuyos extremos son $(r, 0)$ y $(-r, 0)$ y los demás puntos están sobre el eje de las abscisas es la función $\psi_1 : [-r; r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\psi_1(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$, mientras que la semicircunferencia con los mismos extremos, pero con los demás puntos bajo el eje de las abscisas se puede parametrizar con $\psi_2 : [-r; r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\psi_2(t) = (t, -\sqrt{r^2 - t^2})$, aunque también mediante la función $\psi_2^* : [r; 3r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\psi_2^*(t) = (-t + 2r, -\sqrt{r - (t - 2r)^2})$. Utilizando las parametrizaciones anteriores podemos parametrizar a la circunferencia completa mediante la función $\psi : [-r; 3r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t) & \text{si} \quad t \in [-r;r], \\ \\ \psi_2^*(t) & \text{si} \quad t \in [r;3r]. \end{cases}$$

Veamos que el arco de circunferencia con extremos $(r,0)$ y $(0,r)$ y los demás puntos sobre el eje de las abscisas y a la derecha del eje de las ordenadas tiene longitud menor o igual que $2r$. En efecto, si $\Delta = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ es una partición del intervalo $[0;r]$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |\psi_1(k) - \psi_1(k-1)| \leq \sum_{k=1}^{n} (|t_k - t_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}|),$$

donde $y_k = \sqrt{r^2 - t_k^2}$ para $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ y además $r = y_0 > y_1 > y_2 > \cdots > y_n = 0$, por lo que $\sum_{k=1}^{n}(|t_k - t_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}|) = 2r$ y así el arco de circunferencia con extremos $(r,0)$ y $(0,r)$ y los demás puntos sobre el eje de las abscisas y a la derecha del eje de las ordenadas tiene longitud menor o igual que $2r$. Análogamente podemos ver que el arco de circunferencia con extremos $(-r,0)$ y $(0,r)$ y los demás puntos sobre el eje de las abscisas y a la izquierda del eje de las ordenadas tiene longitud menor o igual que $2r$, por lo cual, debido al teorema 3.3, la semicircunferencia con extremos $(-r,0)$ y $(r,0)$ con los demás puntos sobre el eje de las abscisas tiene longitud menor o igual que $4r$. De nuevo por analogía podemos ver que la semicircunferencia con extremos $(-r,0)$ y $(r,0)$ con los demás puntos bajo el eje de las abscisas tiene longitud menor o igual que $4r$ y usando otra vez el teorema 3.3 se deduce que la circunferencia con centro en el origen y radio r tiene longitud menor o igual que $8r$, es decir tiene longitud finita. ∎

Teorema 3.5. *Sea γ una trayectoria simple con extremos, con longitud finita s y parametrizada por una función $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. La función $f : [a;b] \longrightarrow [0;s]$ tal que $f(a) = 0$ y a cada $x \in (a;b]$ le asigna la longitud de $\gamma_x := \varphi[[a;x]]$ es una función continua y estrictamente creciente.*

Demostración. La función es estrictamente creciente pues si $a < x_1 < x_2 \leq b$, entonces

$$\begin{aligned} f(x_1) = \ell(\gamma_{x_1}) &< \ell(\gamma_{x_1}) + |f(x_2) - f(x_1)| \\ &\leq \ell(\gamma_{x_1}) + \ell(\varphi[[x_1, x_2]]) = \ell(\gamma_{x_2}) = f(x_2). \end{aligned}$$

(Para el caso en que $a = x_1 < x_2 \leq b$ tenemos que $f(x_1) = 0 < \ell(\gamma_{x_2}) = f(x_2)$.)

Demostremos ahora que f es continua en a, es decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|t-a| < \delta$ y $0 < t \leq b \Longrightarrow |f(t)-f(a)| < \varepsilon$. Como f es estrictamente creciente podemos observar que el hecho de que no sea continua en a implica que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(t) \geq \varepsilon$ para todo $t \in (a;b]$. Para cualquier $y_0 \in (a;b)$ existe una partición $\Delta_1 = (x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots, x_{1,n_1}) \in P_a^{y_0}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n_1} |\varphi(x_{1,k}) - \varphi(x_{1,k-1})| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Al tomar un número y_1 en el intervalo abierto $(a;x_{1,1})$ tal que $|\varphi(x_{1,1}) - \varphi(a)| < \frac{\varepsilon}{4}$ tenemos que

$$|\varphi(x_{1,1}) - \varphi(y_1)| + \sum_{k=2}^{n_1} |\varphi(x_{1,k}) - \varphi(x_{1,k-1})| > \frac{\varepsilon}{4}$$

por lo que $\ell(\varphi[[y_1;y_0]] > \frac{\varepsilon}{4}$. De manera análoga, existe un $y_2 \in (a;y_1)$ tal que $\ell(\varphi[[y_2;y_1]] > \frac{\varepsilon}{4}$ y, de manera recursiva, para cualquier entero positivo m, una vez determinado el $y_m \in (a;y_{m-1})$ tal que $\ell(\varphi[[y_m;y_{m-1}]] > \frac{\varepsilon}{4}$, podemos tomar un $y_{m+1} \in (a;y_m)$ tal que $\ell(\varphi[[y_{m+1};y_m]] > \frac{\varepsilon}{4}$. Ahora, por la propiedad arquimediana, existe un número natural N tal que $\frac{N\varepsilon}{4} > s$, de modo que aplicando $N+1$ veces el teorema 3.3 tenemos

$$\ell(\gamma) = \ell(\varphi[[y_0;b]]) + \sum_{m=1}^{N} \ell(\varphi[[y_m;y_{m-1}]]) + \ell(\varphi[[a;y_M]]) > \frac{N\varepsilon}{4} > s,$$

lo cual contradice el hecho de que $\ell(\gamma) = s$, por lo que f es continua en a.

Para demostrar que f es continua en b tomemos la parametrización de γ dada por $\psi : [-b;-a] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\psi(t) = \varphi(-t)$ y definamos $g(x) := \ell(\psi[[-b;x]]) = \ell(\varphi[[-x;b]]) = s - f(-x)$, por lo que g es continua en $-b$, pero g es continua en t si y sólo si f es continua en $-t$, por lo tanto f es continua en b.

Veamos ahora la continuidad de f en un número $x \in (a;b)$ con las observaciones dadas a continuación. La demostración de que f es continua por la izquierda en x se hace de la misma forma que la de que f es continua en b pero tomando $\ell(\gamma_x)$ en lugar de s. La demostración de que f es continua por la derecha en x se hace de manera análoga a la de demostrar que es continua en a pero tomando $\ell(\gamma) - \ell(\gamma_x)$ en lugar de s. ∎

Teorema 3.6. *Sea γ una trayectoria simple con extremos, con longitud finita s y parametrizada por una función $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sea además*

$f : [a;b] \longrightarrow [0;s]$ tal que $f(a) = 0$ y a cada $x \in (a;b]$ le asigna la longitud de $\gamma_x := \varphi[[a;x]]$. Si $0 < r < s$, existe un único número t entre a y b tal que $f(t) = r$.

Demostración. Sea $0 < r < s$. Del teorema 3.5 se sigue que f es continua y estrictamente creciente. Como f es continua, entonces por el teorema del valor intermedio se sigue que existe un t entre a y b tal que $f(t) = r$, pero como f es estrictamente creciente, entonces es inyectiva por lo que el valor de t es único. ∎

4. Ortogonalidad

Definición 4.1. Decimos que dos puntos P y Q son **ortogonales con respecto al origen** o simplemente que son **ortogonales** si $P \cdot Q = 0$.

Definición 4.2. Si tenemos una recta $\overleftrightarrow{PQ}$, podemos observar que el conjunto $\Pi = \{A \in \mathbb{R}^3 : \ (A - Q) \cdot (P - Q) = 0\}$ es un plano al cual llamaremos **plano ortogonal** a $\overleftrightarrow{PQ}$ en Q.

Observemos que Q es el punto medio del segmento $\overline{P(2Q - P)}$. En efecto, $|(2Q - P) - Q| = |Q - P|$ y $|(2Q - P) - P| = 2|Q - P|$. Veamos ahora que si $A \in \Pi$, entonces la distancia de A a P es la misma que la de A a $2Q - P$. Para esto tomemos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, con A en el plano ortogonal a $\overleftrightarrow{PQ}$ en Q, teniendo

$$
\begin{aligned}
&|A - (2Q - P)| \\
&= \sqrt{(a_1 - 2q_1 + p_1)^2 + (a_2 - 2q_2 + p_2)^2 + (a_3 - 2q_3 + p_3)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} ((a_i - q_i) + (p_i - q_i))^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (a_i - q_i)^2 + \sum_{i=1}^{3} (p_i - q_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{3} (a_i - q_i)(p_i - q_i)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (a_i - q_i)^2 + \textstyle\sum_{i=1}^{3} (p_i - q_i)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (a_i - q_i)^2 + \sum_{i=1}^{3} (p_i - q_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{3} (a_i - q_i)(p_i - q_i)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} ((a_i - q_i) - (p_i - q_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (a_i - p_i)^2} = |A - P|,
\end{aligned}
$$

donde se está usando el hecho de que $\sum\limits_{i=1}^{3} (a_i - q_i)(p_i - q_i) = 0$. Usando ese mismo hecho, podemos concluir que

$$|A - P|^2 = |A - Q|^2 + |P - Q|^2$$

(algo parecido al teorema de Pitágoras pero utilizando ortogonalidad en vez de perpendicularidad, lo cual veremos posteriormente que es lo mismo), en efecto

$$|A-P|^2 = |(A-Q)+(Q-P)|^2 = \sum_{i=1}^{3}((a_i-q_i)+(q_i-p_i))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{3}((a_i-q_i)^2+(q_i-p_i)^2+2(a_i-q_i)(q_i-p_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{3}((a_i-q_i)^2+\sum_{i=1}^{3}(q_i-p_i)^2+2\sum_{i=1}^{3}(a_i-q_i)(q_i-p_i)) = |A-Q|^2+|P-Q|^2.$$

Enunciemos este último resultado en forma de teorema.

Teorema 4.1. *Si A, P y Q son tres puntos tales que $(A-Q)\cdot(P-Q) = 0$, entonces*

$$|A-P|^2 = |A-Q|^2 + |P-Q|^2.$$

Definición 4.3. Diremos que una recta es **ortogonal** a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ en el punto Q si pasa por Q y está contenida en el plano ortogonal a $\overleftrightarrow{PQ}$ en Q.

Veamos que dada una recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y un punto R, siempre existe un único plano ortogonal a $\overleftrightarrow{PQ}$ al cual pertenece R. En efecto, tal plano será $\{S \in \mathbb{R}^3 : \ (S-R)\cdot(P-Q) = 0\}$ y el punto de intersección con la recta será el punto $Q+t(P-Q)$, donde $t = \frac{(R-Q)\cdot(P-Q)}{|P-Q|^2}$, lo cual puede verificar el lector. Lo anterior lo enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Dada una recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y un punto R, siempre existe un único plano ortogonal a $\overleftrightarrow{PQ}$ al cual pertenece R. Además, el punto donde se intersecan la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y tal plano ortogonal es*
$Q + \frac{(R-Q)\cdot(P-Q)}{|P-Q|^2}(P-Q)$.

Si Π es un plano, $Q \in \Pi$, $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son vectores ortogonales con norma 1 y además $Q+\vec{\mathbf{u}}, Q+\vec{\mathbf{v}} \in \Pi$; entonces cualquier punto del plano Π se puede representar como una suma $Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}+\beta\vec{\mathbf{v}}$, para algunos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En efecto, sea $R \in \Pi$ y $P = Q+\vec{\mathbf{u}}$. Por el teorema 4.2, el punto donde se interseca $\overleftrightarrow{PQ}$ con su recta ortogonal contenida en Π y que pasa por R es $Q+((R-Q)\cdot\vec{\mathbf{u}})\vec{\mathbf{u}}$. Ahora, tomando $\alpha = (R-Q)\cdot\vec{\mathbf{u}}$ y δ igual a la distancia entre R y $Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}$, vemos que $R-(Q+\alpha\vec{\mathbf{u}})$ es ortogonal a $\vec{\mathbf{u}}$, de donde podemos concluir que $R-(Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}) = \delta\vec{\mathbf{v}}$ ó $R-(Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}) = -\delta\vec{\mathbf{v}}$, de modo que tomando $\beta = \delta$ ó $\beta = -\delta$, según sea el caso, tenemos $R-(Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}) = \beta\vec{\mathbf{v}}$, es decir $R = Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}+\beta\vec{\mathbf{v}}$. Recíprocamente, para cualesquiera números reales α y β el punto $Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}+\beta\vec{\mathbf{v}} \in \Pi$. En efecto, para todo $t_1 \in \mathbb{R}$ tenemos que $Q+t_1\vec{\mathbf{u}} = Q+t_1(Q+\vec{\mathbf{u}}-Q) \in \overleftrightarrow{Q(Q+\vec{\mathbf{u}})} \subset$

Π y análogamente, para todo $t_2 \in \mathbb{R}$ tenemos que $Q + t_2\vec{\mathbf{v}} \in \Pi$. Ahora, $(Q + 2\alpha\vec{\mathbf{u}}) + t(Q + \gamma\vec{\mathbf{v}} - (Q + 2\alpha\vec{\mathbf{u}})) \in \overleftrightarrow{(Q + 2\alpha\vec{\mathbf{u}})(Q + \gamma\vec{\mathbf{v}})} \subset \Pi$, en particular, tomando $t = 1/2$ y $\gamma = 2\beta$ tenemos que $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}} \in \Pi$. Observemos además que si $(\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)$, entonces $Q+\alpha_1\vec{\mathbf{u}}+\beta_1\vec{\mathbf{v}} \neq Q + \alpha_2\vec{\mathbf{u}} + \beta_2\vec{\mathbf{v}}$. En efecto, si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces $\vec{\mathbf{u}} \cdot (Q + \alpha_1\vec{\mathbf{u}} + \beta_1\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot Q + \alpha_1 \neq \vec{\mathbf{u}} \cdot Q + \alpha_2 = \vec{\mathbf{u}} \cdot (Q + \alpha_2\vec{\mathbf{u}} + \beta_2\vec{\mathbf{v}})$ y un resultado similar se tiene cuando $\beta_1 \neq \beta_2$. Enunciemos los resultados que acabamos de demostrar en el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Si Π es un plano, $Q \in \Pi$, $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son vectores ortogonales con norma 1 y además $Q + \vec{\mathbf{u}}, Q + \vec{\mathbf{v}} \in \Pi$. Entonces cualquier punto del plano Π se puede representar de manera única como una suma de la forma $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$, para algunos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, cualquier suma de la forma $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es un punto en Π.*

Una generalización en cierto sentido del teorema 4.3 es el siguiente.

Teorema 4.4. *Si $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son vectores ortogonales entre si y de norma 1, entonces cualquier punto $R \in \mathbb{R}^3$ se puede representar de manera única como una suma de la forma $R = \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}} + \gamma\vec{\mathbf{w}}$, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Más aún, $\alpha = R \cdot \vec{\mathbf{u}}$, $\beta = R \cdot \vec{\mathbf{v}}$ y $\gamma = R \cdot \vec{\mathbf{w}}$.*

Demostración. Tomemos $O = (0, 0, 0)$ y sea $R \in \mathbb{R}^3$. Si P es el punto donde se interseca la recta $\overleftrightarrow{O\vec{\mathbf{u}}}$ con el plano ortogonal que pasa por R, entonces tal plano ortogonal es $\{S \in \mathbb{R}^3 : (S - P) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0\} = \{S \in \mathbb{R}^3 : S = P + s_1\vec{\mathbf{v}} + s_2\vec{\mathbf{w}} \text{ para } s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}$. Al tomar α tal que $\alpha\vec{\mathbf{u}} = P$ y los números β y γ tales que $R = P + \beta\vec{\mathbf{v}} + \gamma\vec{\mathbf{w}}$ tenemos que $R = \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}} + \gamma\vec{\mathbf{w}}$. Finalmente tenemos que $(\alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}} + \gamma\vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \alpha$, $(\alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}} + \gamma\vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \beta$ y $(\alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}} + \gamma\vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \gamma$ con lo que el teorema queda demostrado. ∎

Supongamos ahora que tenemos una recta l y un punto $P \notin l$. La recta l se puede representar en la forma $l = \{S \in \mathbb{R}^3 : S = Q + t\vec{\mathbf{u}}$ para algún $t \in \mathbb{R}^3\}$, donde $Q \in l$ y $\vec{\mathbf{u}}$ es un vector de norma 1. Sea $\vec{\mathbf{v}}$ un vector de norma 1 ortogonal a $\vec{\mathbf{u}}$ y tal que $Q + \vec{\mathbf{v}}$ esté en el plano al que pertenecen los puntos Q, $Q + \vec{\mathbf{u}}$ y P. Por el teorema 4.3 existen números reales α y β tales que $P = Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$, con $\alpha \neq 0$. Tomemos $l' = \{S \in \mathbb{R}^3 : S = P + t\vec{\mathbf{u}}$ para algún $t \in \mathbb{R}^3\}$ y veamos que $l' \parallel l$. En efecto, cualquier punto de l' es de la forma $P + t\vec{\mathbf{u}} = Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + (\beta + t)\vec{\mathbf{v}}$ el cual no está en l puesto que $\alpha \neq 0$. Veamos ahora que no existe ninguna otra recta paralela a l que pase por P. En efecto, supongamos que existiera otra recta paralela l'' a l que pase por P y sea $T \in l''$ un punto diferente de P de manera que tenemos

$l'' = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = P + t(T - P)$ para algún $t \in \mathbb{R}^3\}$. Como $T \notin l'$, entonces existen números reales α'' y β'', con $\beta'' \neq 0$ tales que $T = P+\alpha''\vec{\mathbf{u}}+\beta''\vec{\mathbf{v}}$, ahora el punto $V = P+(-\frac{\beta}{\beta''})(T-P)$ está en l'' y además $V = Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}+\beta\vec{\mathbf{v}}+(-\frac{\beta}{\beta''})(\alpha''\vec{\mathbf{u}}+\beta''\vec{\mathbf{v}}) = Q+(\alpha-\frac{\beta\alpha''}{\beta''})\vec{\mathbf{u}} \in l$ contradiciendo el hecho de que l y l'' son paralelas. Hemos así demostrado la validez del postulado de las paralelas (postulado 15).

Definición 4.4. Cuando tengamos dos o más vectores con norma 1 y que sean ortogonales entre sí, diremos que tales vectores son **ortonormales** y también decimos que el conjunto cuyos elementos son tales vectores es **ortonormal**.

5. Isometrías entre Planos

DEFINICIÓN 5.1. Dados dos planos Π_1 y Π_2. Una biyección $\eta : \Pi_1 \longrightarrow \Pi_2$ (de Π_1 sobre Π_2) se dice que es una **isometría** entre los planos si η **preserva distancias**, es decir si para cualesquiera dos puntos $P, Q \in \Pi_1$ se tiene que $d(P,Q) = d(\eta(P), \eta(Q))$.

Teorema 5.1. *Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son dos vectores ortogonales de norma 1 y $Q \in \mathbb{R}^3$, entonces la función η que a cada punto $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ le asigna el punto $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ es una isometría entre el plano $\mathbb{R}^2$ y el plano $\{S \in \mathbb{R}^3 : \; S = Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}} \;$ para algunos $\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.*

Demostración. Sean (α_1, β_1) y (α_2, β_2) elementos de $\mathbb{R}^2$. La distancia entre estos puntos es $\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}$ y la distancia entre los puntos correspondientes en el recorrido de η es $|Q - Q + (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{\mathbf{u}} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{|(\alpha_1 - \alpha_2)\vec{\mathbf{u}} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{\mathbf{v}}|^2} = \sqrt{|(\alpha_1 - \alpha_2)\vec{\mathbf{u}}|^2 + |(\beta_1 - \beta_2)\vec{\mathbf{v}}|^2} = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}$. ∎

Teorema 5.2. *La imagen bajo una isometría de una trayectoria plana es una trayectoria plana.*

Demostración. Sea γ_2 la imagen bajo una isometría η de una trayectoria plana γ_1 y $\varphi_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de γ_1. Demostremos que $\varphi_2 := \eta \circ \varphi_1$ es una parametrización de γ_2. Como φ_1 es continua, entonces para todo $x_0 \in [a; b]$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $x \in [a; b]$ y $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0)| < \varepsilon$, pero por ser η una isometría, la última desigualdad implica que $|\eta(\varphi_1(x)) - \eta(\varphi_1(x_0))| < \varepsilon$, es decir que $|\varphi_2(x) - \varphi_2(x_0)| < \varepsilon$ con lo que se ve que φ_2 es una parametrización de γ_2. ∎

Teorema 5.3. *La imagen bajo una isometría de una trayectoria plana dada tiene la misma longitud que la trayectoria dada.*

Demostración. Sea η una isometría que transforma una trayectoria plana γ_1 en una trayectoria γ_2, es decir $\eta[\gamma_1] = \gamma_2$, donde $\varphi_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de γ_1 y $\varphi_2 := \eta \circ \varphi_1$ es una parametrización de γ_2. El resultado se sigue del hecho de que para cualquier partición $\Delta = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ del dominio común de φ_1 y φ_2 se tiene que $\sum_{k=1}^{n} |\varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})|$. ∎

Supongamos que incluida en un plano Π está una circunferencia con centro en un punto Q y radio $r > 0$. Por el teorema 4.3 el plano Π se puede representar como $\Pi = \{S \in \mathbb{R}^3 : \; S = Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Observemos que por definición de isometría, la isometría entre $\mathbb{R}^2$ y Π

que le asigna al punto (α, β) el punto $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ transforma la circunferencia incluida en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio r en la circunferencia incluida en Π con centro en Q y radio r. Enunciemos como teorema la observación anterior.

Teorema 5.4. *Sea Q un punto del espacio $\mathbb{R}^3$, los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ ortonormales y $\Pi = \{S \in \mathbb{R}^3 : \ S = Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. La isometría que a cada elemento (α, β) del plano $\mathbb{R}^2$ le asigna el elemento $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ transforma la circunferencia incluida en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio r en la circunferencia incluida en Π con centro en Q y radio r.*

Del teorema 5.4 y del teorema 3.4 se concluye el postulado 10. Del teorema 5.4 y del teorema 5.3 se sigue el postulado 12. El postulado de adición de arcos (postulado 11) se sigue del teorema 3.3.

Supongamos ahora que $\overrightarrow{AB}$ es un rayo incluido en la arista de un semiplano Λ y r es un número entre 0 y π. Como π es la longitud de la semicircunferencia de radio 1 y centro A cuyos extremos están en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y los demás puntos en Λ, por el teorema 3.6 existe un único punto P en la semicircunferencia tal que el arco menor $\widehat{AP}$ tiene longitud r, es decir $\measuredangle PAB = r$. Por la unicidad dada en el teorema 3.6, cualquier rayo $\overrightarrow{AP'}$ con $P' \in \Lambda$ tal que $\measuredangle P'AB = r$ corta a la circunferencia en P, de manera que también se verifica el postulado de construcción de ángulos (postulado 13).

Verifiquemos la validez del postulado LAL (postulado 14). Supongamos que se tienen dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ donde la correspondencia $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$ es del tipo LAL. En $\mathbb{R}^2$ sea $O = (0, 0)$, $P = (AB, 0)$ y Q sobre el eje de las abscisas tal que $\angle POQ \cong \angle ABC$ y $OQ = BC$, es decir de modo que $POQ \longleftrightarrow ABC$ sea una correspondencia LAL. Si tomamos $\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{|A-B|}(A-B)$ y $\vec{\mathbf{v}}$ ortogonal a $\vec{\mathbf{u}}$ y de norma 1, tal que $B + \vec{\mathbf{v}}$ está del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que C; entonces la isometría $(\alpha, \beta) \mapsto B + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ transforma el triángulo $\triangle POQ$ en el triángulo $\triangle ABC$ (como las isometrías preservan las longitudes de arcos y las distancias, debido al postulado de construcción de arcos y al teorema de localización de puntos, la isometría asigna al punto Q el punto C, al punto P el punto A y obviamente al punto O el punto B). Tenemos también que $|P - Q| = |A - C|$, con lo que llegamos a que la correspondencia es también del tipo LLL. Ahora, el arco menor de radio 1 con centro en Q, un extremo en el rayo $\overrightarrow{QO}$ y el otro en el rayo $\overrightarrow{QP}$ se transforma mediante la isometría en el arco menor de radio 1 con centro en C, un extremo en el rayo $\overrightarrow{CB}$ y el otro en $\overrightarrow{CA}$, por lo que ambos arcos tienen la misma longitud, es decir $\measuredangle BCA = \measuredangle OQP$ y análogamente se demuestra que $\measuredangle BAC = \measuredangle OPQ$, con lo que hemos llegado a que la correspondencia $POQ \longleftrightarrow ABC$ es una congruencia. De manera similar se demuestra que $POQ \longleftrightarrow A'B'C'$ es una congruencia, por lo tanto $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$ es una congruencia y terminamos la demostración de la validez del postulado LAL.

Hasta ahora hemos verificado la validez de los primeros 15 postulados de la geometría elemental (el postulado 15 se verificó en la sección 4). En adelante podremos utilizar todos los resultados y definiciones derivados de estos 15 postulados.

Veamos ahora la relación que existe entre el concepto de ortogonalidad y el de perpendicularidad.

Teorema 5.5. *Dos rectas son ortogonales en un punto Q si y sólo si son perpendiculares en Q.*

Demostración. Sean l_1 y l_2 dos rectas ortogonales en un punto Q. Tomemos dos vectores ortonormales $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ tales que $Q + \vec{\mathbf{u}} \in l_1$ y $Q + \vec{\mathbf{v}} \in l_2$. Tenemos, por los teoremas 5.3 y 5.4, que la isometría de $\mathbb{R}^2$ en $\{S \in \mathbb{R}^3 : S = Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ tal que a cada elemento de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ le asigna el punto $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ transforma el arco menor de la circunferencia con centro en el origen y radio 1 cuyos extremos son $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en el arco menor de circunferencia con centro en Q y radio 1 cuyos extremos son $Q + \vec{\mathbf{u}}$ y $Q + \vec{\mathbf{v}}$, y además ambos arcos tienen la misma longitud. De manera análoga se puede demostrar que los arcos menores $\widehat{(Q - \vec{\mathbf{u}})(Q + \vec{\mathbf{v}})}$, $\widehat{(Q - \vec{\mathbf{u}})(Q - \vec{\mathbf{v}})}$ y $\widehat{(Q + \vec{\mathbf{u}})(Q - \vec{\mathbf{v}})}$ con centro en Q tienen la misma longitud que la del arco menor de la circunferencia incluida en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio 1 cuyos extremos son $(1, 0)$ y $(0, 1)$; luego por los postulados 11 y 12 la longitud de cada uno de éstos es de $\frac{\pi}{2}$ (longitud igual a $\frac{1}{4}$ de la longitud de cualquier circunferencia con radio 1), concluimos por lo tanto que $\measuredangle(Q + \vec{\mathbf{u}})Q(Q + \vec{\mathbf{v}}) = \frac{\pi}{2}$, es decir $l_1 \perp l_2$.

Ahora, supongamos que $l_1 \perp l_2$ en Q. Sólo hay una recta ortogonal a l_1 en el plano que contiene a l_1 y l_2, pero de lo anterior esa recta debe ser perpendicular y la única recta perpendicular a l_1 contenida en el plano es l_2, por lo tanto l_1 es ortogonal a l_2. ∎

Debido al teorema 5.5, de aquí en adelante, los términos ortogonal y perpendicular serán tomados como sinónimos.

Teorema 5.6. *Si $P, R \in \mathbb{R}^3$, $O = (0, 0, 0)$ y $\theta = \measuredangle POR$, entonces*

$$P \cdot R = |P||R| \cos\theta$$

(cuando tenga sentido la expresión $\measuredangle POR$).

Demostración. Tomemos en la recta $\overleftrightarrow{OP}$ un sistema de coordenadas de tal manera que a O le corresponda el cero y a P le corresponda $|P|$. En esas condiciones tenemos que si un punto $Q \in \overleftrightarrow{OP}$ tiene coordenada q, entonces $Q = \frac{q}{|P|}P$. Por el teorema 4.2, el plano ortogonal a $\overleftrightarrow{OP}$ que pasa por R corta a $\overleftrightarrow{OP}$ en el punto $\frac{(R\cdot P)}{|P|^2}P$, pero debido al teorema 5.5 este punto tiene coordenada $|R|\cos\theta$, es decir

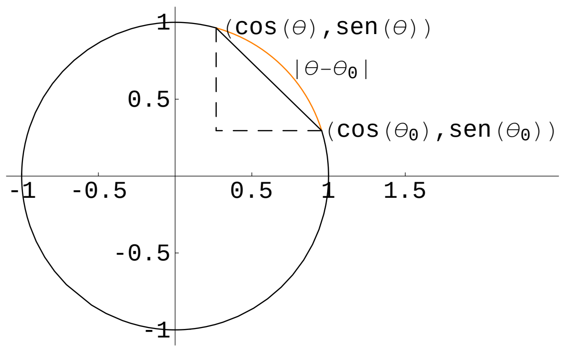
$$\frac{(R\cdot P)}{|P|^2}P = \frac{|R|\cos\theta}{|P|}P,$$

por lo tanto

$$P\cdot R = |P||R|\cos\theta. \qquad \blacksquare$$

Teorema 5.7. *Las funciones trigonométricas* cos *y* sen *son continuas.*

Demostración. Sea γ la circunferencia (incluida en $\mathbb{R}^2$) con centro en $(0,0)$ y radio 1. Tomemos un $\varepsilon > 0$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$.



Si $\theta \in \mathbb{R}$ y $|\theta - \theta_0| < \pi$, entonces $|\theta - \theta_0|$ es la longitud de un arco de γ cuyos extremos son los puntos $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$, de modo que la cuerda tiene longitud menor o igual que $|\theta - \theta_0|$, pero la cuerda mide $\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0)^2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |\cos\theta - \cos\theta_0| &= \sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)^2} \\ &\leq \sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0)^2} \leq |\theta - \theta_0|, \end{aligned}$$

y además

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0| &= \sqrt{(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0)^2} \\
&\leq \sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0)^2} \leq |\theta - \theta_0|,
\end{aligned}
$$

por lo que si $|\theta - \theta_0| < \text{mín}\{\varepsilon, \pi\}$, entonces

$$
|\cos\theta - \cos\theta_0| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0| < \varepsilon \qquad \blacksquare
$$

6. Definición de Área

Definición 6.1. Decimos que un subconjunto de un plano es **acotado** si existe un círculo en el cual está contenido.

Definiremos primero el concepto de área para algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, luego para subconjuntos de planos incluidos en $\mathbb{R}^3$ vía una isometría.

Definición 6.2. A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{(x, y) : a_1 \leq x \leq a_2 \text{ y } b_1 \leq y \leq b_2\}$, donde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ son constantes, lo llamaremos **caja plana**. (También se le llamará caja plana a cualquier conjunto que esté incluido en algún plano, y que sea de la forma $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2 \text{ y } c_1 \leq z \leq c_2\}$; donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son constantes.)

Definición 6.3. Si $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$, definimos el **área** de la caja plana $\{(x, y) : a_1 \leq x \leq a_2 \text{ y } b_1 \leq y \leq b_2\}$ como $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$. Es decir, el área de una región rectangular con base horizontal y altura vertical es el producto de la longitud de la base y la de la altura. El **área** del conjunto vacío es cero.

Teorema 6.1. *Sea R una caja plana con vértices (x, y), (x', y), (x', y') y (x, y'), donde $x < x'$ e $y < y'$. Si $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x'$, $y = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = y'$ y $R_{i,j}$ es la caja plana con vértices (x_{i-1}, y_{j-i}), (x_i, y_{j-i}), (x_i, y_j) y (x_{i-1}, y_j), con $i \in J_n := \{1, 2, \cdots, n\}$ y $j \in J_m := \{1, 2, \cdots, m\}$, entonces la suma de las áreas de cada una de las cajas planas $R_{i,j}$ (con $i \in J_n$ y $j \in J_m$) es igual al área de R.*

Demostración.

$$\sum_{i \in J_n, j \in J_m} \mathrm{a}(R_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{a}(R_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\sum_{j=1}^{m}(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(y' - y)$$
$$= (x - x')(y - y') = \mathrm{a}(R). \qquad \blacksquare$$

Lema 6.1. *La intersección de dos cajas planas es una caja plana.*

Demostración. Sean $\{(x, y) : a_1 \leq x \leq a_2 \text{ y } b_1 \leq y \leq b_2\}$ y $\{(x, y) : a'_1 \leq x \leq a'_2 \text{ y } b'_1 \leq y \leq b'_2\}$ dos cajas planas. El lema se sigue del hecho de que la intersección de esas dos cajas planas es la caja plana $\{(x,y):\ a_1^* \leq x \leq a_2^* \text{ y } b_1^* \leq y \leq b_2^*\}$ con $a_1^* = \text{máx}\{a_1, a_1'\}$, $a_2^* = \text{mín}\{a_2, a_2'\}$, $b_1^* = \text{máx}\{b_1, b_1'\}$ y $b_2^* = \text{mín}\{b_2, b_2'\}$. ■

Definición 6.4. Sea $C = \{(x,y):\ a_1 \leq x \leq a_2 \text{ y } b_1 \leq y \leq b_2\}$ una caja plana con $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$. Si $P_1 = (x_0, \cdots, x_n)$ es una partición del intervalo $[a_1; a_2]$ y $P_2 = (y_0, \cdots, y_m)$ es una partición del intervalo $[b_1; b_2]$, decimos que la pareja ordenada (P_1, P_2) es una **partición** de la caja plana C.

Definición 6.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado, R una caja plana tal que $\Omega \subset R$, y $P = (P_1, P_2) = ((x_0, \cdots, x_n), (y_0, \cdots, y_m))$ una partición de la caja plana R; tomemos para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y $j \in \{1, \cdots, m\}$ la caja plana $R_{i,j} = \{(x,y):\ x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$; sean además

$$u_{i,j} = \begin{cases} \text{a}(R_{i,j}) & \text{si} \quad R_{i,j} \cap \Omega \neq \varnothing, \\ \\ 0 & \text{si} \quad R_{i,j} \cap \Omega = \varnothing \end{cases}$$

y

$$v_{i,j} = \begin{cases} \text{a}(R_{i,j}) & \text{si} \quad R_{i,j} \subset \Omega, \\ \\ 0 & \text{si} \quad R_{i,j} \cap \Omega \neq R_{i,j}. \end{cases}$$

Decimos que el conjunto $\mathcal{C} = \{R_{i,j}:\ R_{i,j} \cap \Omega \neq \varnothing\}$ es una **cubierta básica** de Ω (la correspondiente a la partición P). Decimos también que

$$u = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} u_{i,j}$$

es una **suma superior de áreas básicas** de Ω (correspondiente a la cubierta básica $\mathcal{C}$ o a la partición P) y que

$$v = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_{i,j}$$

es una **suma inferior de áreas básicas** de Ω (correspondiente a la cubierta básica $\mathcal{C}$ o a la partición P).

Observación. Con la notación dada en la definición anterior, $v_{i,j} \leq u_{i,j}$ y $v \leq u$.

Definición 6.6. Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ una caja plana, y sean $P = (P_1, P_2) = ((x_0, \cdots, x_n), (y_0, \cdots, y_m))$ y $P' = (P_1', P_2') = ((x_0', \cdots, x_{n'}'), (y_0', \cdots, y_{m'}'))$ dos particiones de la caja plana R tales que $\{x_0, \cdots, x_n\} \subset \{x_0', \cdots, x_{n'}'\}$ y $\{y_0, \cdots, y_m\} \subset \{y_0', \cdots, y_{m'}'\}$. Decimos que la partición P' es un **refinamiento** de la partición P.

Lema 6.2. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que está incluido en alguna caja plana R; P y P' dos particiones de R tales que P' es un refinamiento de P; $\mathcal{C}$ la cubierta básica de R correspondiente a la partición P, y $\mathcal{C}'$ la cubierta básica de R correspondiente a la partición P'; u y v las sumas superior e inferior respectivamente de áreas básicas correspondientes a $\mathcal{C}$, y u' y v' las sumas superior e inferior respectivamente de áreas básicas correspondientes a $\mathcal{C}'$. Tenemos que $v \leq v' \leq u' \leq u$.*

Demostración. De la observación anterior tenemos que $v' \leq u'$. Ahora, todo elemento $S_{i',j'}$ de $\mathcal{C}'$ está incluido en algún elemento $R_{i,j}$ de $\mathcal{C}$ y además $S_{i',j'}$ pertenece a la cubierta básica $\mathcal{C}_{i,j}$ de $R_{i,j}$ correspondiente a la partición P, pero por el teorema 6.1, la suma de las áreas de los elementos de la cubierta básica de $R_{i,j}$ correspondiente a P' es el área de $R_{i,j}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} u' &= \sum_{S_{i',j'} \in \mathcal{C}'} \mathrm{a}(S_{i',j'}) = \sum_{R_{i,j} \in \mathcal{C}} \sum_{S_{i',j'} \in \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}_{i,j}} \mathrm{a}(S_{i',j'}) \\ &\leq \sum_{R_{i,j} \in \mathcal{C}} \sum_{S_{i',j'} \in \mathcal{C}_{i,j}} \mathrm{a}(S_{i',j'}) = \sum_{R_{i,j} \in \mathcal{C}} \mathrm{a}(R_{i,j}) = u. \end{aligned}$$

Demostremos ahora que $v \leq v'$. Observemos que si $R_{i,j} \in \mathcal{C}$ es tal que $R_{i,j} \subset \Omega$, entonces todo elemento $S_{i',j'}$ de la cubierta básica $\mathcal{C}_{i,j}$ de $R_{i,j}$ es un elemento de $\mathcal{C}'$ que está incluido en Ω. Por lo tanto

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\Omega \supset R_{i,j} \in \mathcal{C}} \mathrm{a}(R_{i,j}) \\ &= \sum_{\Omega \supset R_{i,j} \in \mathcal{C}} \sum_{S_{i',j'} \in \mathcal{C}_{i,j}} \mathrm{a}(S_{i',j'}) \leq \sum_{S_{i',j'} \in \mathcal{C}'} \mathrm{a}(S_{i',j'}) = v'. \end{aligned}$$ ∎

Teorema 6.2. *Si v es una suma inferior de áreas básicas de Ω y u es una suma superior de áreas básicas de Ω (no necesariamente correspondientes a la misma cubierta básica), entonces*

$$v \leq u.$$

Demostración. Tenemos que v es la suma inferior de áreas básica correspondiente a una cubierta básica $\mathcal{C}$ de Ω y que u es la suma superior de áreas básica correspondiente a una cubierta básica $\mathcal{C}'$ de Ω. Tenemos también que existen dos cajas planas R y R' con sus respectivas particiones $P = ((x_0, \cdots, x_n), (y_0, \cdots, y_m))$ y $P' = ((x'_0, \cdots, x'_{n'}), (y'_0, \cdots, y'_{m'}))$, tales que $\mathcal{C}$ es la cubierta básica de Ω correspondiente a la partición P y $\mathcal{C}'$ es la cubierta básica de Ω correspondiente a la partición

P'. Para construir una caja plana que contenga tanto a R como a R', sea $x''_0 = \text{mín}\{x_0 - 1, x'_0 - 1\}$, $y''_0 = \text{mín}\{y_0 - 1, y'_0 - 1\}$, $x''_{n+n'+2} = \text{máx}\{x_n + 1, x'_{n'} + 1\}$ e $y''_{m+m'+1} = \text{máx}\{y_m + 1, y'_{m'} + 1\}$, y tomemos la caja plana R'' cuyos vértices son (x''_0, y''_0), $(x''_0, y''_{m+m'+1})$, $(x''_{n+n'+1}, y''_0)$ y $(x''_{n+n'+1}, y_{m+m'+1})$. Observemos que $P^* = ((x''_0, x_0, \cdots, x_n, x''_{n+n'+2}),$ $(y''_0, y_0, \cdots, y_m, y''_{m+m'+2}))$ es una partición de R'' a la cual corresponde la cubierta básica $\mathcal{C}$, y $P'^* = ((x''_0, x'_0, \cdots, x'_{n'}, x''_{n+n'+2}), (y''_0, y'_0, \cdots, y'_{m'},$ $y''_{m+m'+2}))$ es una partición de R'' a la cual corresponde la cubierta básica $\mathcal{C}'$.

Sea $P''^* = ((x''_0, x''_1, \cdots, x''_{n+n'+2}), (y''_0, y''_1, \cdots, y''_{m+m'+2}))$ un refinamiento común de P^* y P'^*. Observemos que v es la suma inferior de áreas básicas correspondiente a la partición P^* y que u es la suma superior de áreas básicas correspondiente a la partición P'^*. Ahora, sean u'' y v'' las sumas superior e inferior de áreas básicas respectivamente, correspondientes a la partición P''^*. Por el lema 6.2 tenemos que $v \leq v'' \leq u'' \leq u$. ∎

Definición 6.7. Sea Ω un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$. Definimos el **área exterior** de Ω, $\mathrm{a}^*(\Omega)$, como

$$\mathrm{a}^*(\Omega) := \text{ínf}\{u : \ u \text{ es una suma superior de áreas básicas de } \Omega\}.$$

Asimismo, definimos el **área interior** de Ω, $\mathrm{a}_*(\Omega)$, como

$$\mathrm{a}_*(\Omega) := \sup\{v : \ v \text{ es una suma inferior de áreas básicas de } \Omega\}.$$

De las definiciones de área interior y área exterior, y del teorema 6.2, se sigue inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 6.2.1. *Si Ω es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, entonces*

$$\mathrm{a}_*(\Omega) \leq \mathrm{a}^*(\Omega).$$

Teorema 6.3.

(a) *Si $R \subset \mathbb{R}^2$ es una caja plana, entonces* $\mathrm{a}_*(R) = \mathrm{a}^*(R)$.

(b) *Si $I \subset \mathbb{R}^2$ es un segmento, entonces* $\mathrm{a}_*(I) = \mathrm{a}^*(I) = 0$.

(c) *Si $\Omega = \{P\}$ con $P \in \mathbb{R}^2$ ó si $\Omega = \varnothing$, entonces* $\mathrm{a}_*(\Omega) = \mathrm{a}^*(\Omega) = 0$.

Demostración. El inciso (a) se sigue de los teoremas 6.1 y 6.2. Si observamos que no existe ninguna región rectangular incluida en un segmento I, tenemos que $a_*(I) = 0$. Ahora, si el segmento es vertical, entonces es de la forma $I = \{(x_0, t) : \ t \in [y; y']\}$ con $y < y'$. Como para todo número natural n tenemos que $I \subset R_n := \{(s,t) : \ s \in [x_0; x_0 +$

$\frac{1}{n}], t \in [y; y']\}$, entonces $\mathrm{a}^*(I) \leq \mathrm{a}^*(R_n) = \frac{1}{n}(y' - y)$. Haciendo tender n a ∞ vemos que $\mathrm{a}^*(I) = 0$. Análogamente se tiene que $\mathrm{a}^*(I) = 0$ cuando I es horizontal.

Cuando I está inclinado con pendiente positiva, sean (x, y) y (x', y') sus extremos con $x < x'$ y $y < y'$. En este caso definimos $R_k^n := \{(s, t) : s \in [x + \frac{k-1}{n}(x' - x); x + \frac{k}{n}(x' - x)],\ t \in [y + \frac{k-1}{n}(y' - y); y + \frac{k}{n}(y' - y)]\}$, con $k \in J_n$ y vemos que $I \subset \bigcup_{k=1}^n R_k^n$ y $\mathrm{a}^*(I) \leq \sum_{k=1}^n \mathrm{a}(R_k^n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}(x - x')(y' - y) = \frac{1}{n}(x - x')(y' - y)$ y haciendo tender n a ∞ vemos que $\mathrm{a}^*(I) = 0$. Análogamente se tiene que $\mathrm{a}^*(I) = 0$ cuando I tiene pendiente negativa.

Si $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces tanto $\mathrm{a}^*(\{P\})$ como $\mathrm{a}^*(\varnothing)$ son menores o iguales que $\mathrm{a}(\{(s, t) :\ s \in [x; x + \frac{1}{n}], t \in [y; y + \frac{1}{n}]\}) = \frac{1}{n^2}$, y al hacer tender n a infinito, tenemos que $\mathrm{a}^*(\{P\}) = \mathrm{a}^*(\varnothing) = 0$. ∎

Definición 6.8. Cuando Ω es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ cuya área exterior es igual al área interior, decimos que el **área** de Ω, denotada $\mathrm{a}(\Omega)$, es el valor común de $\mathrm{a}^*(\Omega)$ y $\mathrm{a}_*(\Omega)$; además decimos que Ω es un **conjunto con área**. A los conjuntos con área también se les llama **Jordan-medible** en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.4. *Si Ω_1 y Ω_2 son dos conjuntos disjuntos con área, entonces $\Omega_1 \cup \Omega_2$ es un conjunto con área y*

$$\mathrm{a}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2).$$

Demostración. Demostremos primero que $\mathrm{a}_*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2)$. Sea R una caja plana que contiene a $\Omega_1 \cup \Omega_2$ y para cada $\varepsilon > 0$, sea $v_{1,\varepsilon}$ una suma inferior de áreas básicas de Ω_1 correspondiente a una partición P_1 de R, y $v_{2,\varepsilon}$ una suma inferior de áreas básicas de Ω_2 correspondientes a la partición P_2 de R, tales que $\mathrm{a}(\Omega_1) < v_{1,\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\mathrm{a}(\Omega_2) < v_{2,\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}$. Por el lema 6.2, si v es una suma inferior de áreas básicas de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ correspondiente a un refinamiento común de P_1 y P_2, entonces $v \geq v_{1,\varepsilon} + v_{2,\varepsilon}$, por lo que $\mathrm{a}_*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq v \geq v_{1,\varepsilon} + v_{2,\varepsilon} > \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2) - \varepsilon$. Haciendo tender ε a cero, tenemos que $\mathrm{a}_*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2)$.

Demostremos ahora que $\mathrm{a}^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2)$. Con una idea parecida a la del párrafo anterior, tomemos una caja plana R que contenga a $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Sean u_1 una suma superior de áreas básicas de Ω_1 correspondiente a una partición P_1 de R y u_2 una suma superior de áreas básicas de Ω_2 correspondiente a una partición P_2 de R, tales que $u_1 < \mathrm{a}^*(\Omega_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $u_2 < \mathrm{a}^*(\Omega_2) + \frac{\varepsilon}{2}$. Sea ahora u una suma superior de áreas básicas de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ correspondiente a un refinamiento común de P_1 y P_2 y observemos que del lema 6.2 podemos deducir que $u \le u_1 + u_2$.De lo anterior concluimos que $\mathrm{a}^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \le u \le u_1 + u_2 < \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2) + \varepsilon$, obteniendo, al hacer tender ε a cero, que $\mathrm{a}^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \le \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2)$.

De los párrafos anteriores y del corolario 6.2.1 tenemos que $\Omega_1 \cup \Omega_2$ es un conjunto con área y $\mathrm{a}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2)$. ■

Observación. Debido al lema 6.2, siempre que tengamos una colección finita $\{\Omega_1, \cdots, \Omega_n\}$ de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^2$, existirá una caja plana $R \supset \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ y una partición P de la caja plana R tal que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tengamos que la suma superior de áreas básicas u_k de Ω_k, correspondiente a P, y la suma inferior de áreas básicas v_k de Ω_k, correspondiente a P, satisfacen la desigualdad $\mathrm{a}_*(\Omega_k) < v_k + \varepsilon$ y $u_k - \varepsilon < \mathrm{a}^*(\Omega_k)$.

Teorema 6.5. *Si Ω_1 y Ω_2 son conjuntos con área, entonces también lo son $\Omega_1 \cap \Omega_2$ y $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Más aún,*

$$\mathrm{a}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Demostración. Sea R una caja plana tal que $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset R$ y para todo $\varepsilon > 0$ sea P_ε una partición de R tales que las sumas superiores de áreas básicas u_1 y u_2 de Ω_1 y Ω_2 respectivamente, correspondientes a la partición P_ε son tales que $u_1 < \mathrm{a}(\Omega_1) + \varepsilon$ y $u_2 < \mathrm{a}(\Omega_2) + \varepsilon$, y las sumas inferiores de áreas básicas v_1 y v_2 de Ω_1 y Ω_2 respectivamente, correspondientes a la partición P_ε son tales que $v_1 > \mathrm{a}(\Omega_1) - \varepsilon$ y $v_2 > \mathrm{a}(\Omega_2) - \varepsilon$. Sean además u y v las sumas superior e inferior respectivamente de áreas básicas de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ correspondientes a la partición P_ε. Tenemos que

$$u_1 < v_1 + 2\varepsilon$$

y

$$u_2 < v_2 + 2\varepsilon,$$

por lo que la suma de las áreas de los elementos de la cubierta de $\Omega_1 \cup \Omega_2$, correspondiente a la partición P_ε, que no están incluidas en $\Omega_1 \cup \Omega_2$, es menor que 4ε, es decir $u - v < 4\varepsilon$. Por lo tanto,

$$v \le \mathrm{a}_*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \le \mathrm{a}^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \le u < v + 4\varepsilon,$$

es decir

$$\mathrm{a}^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) - \mathrm{a}_*(\Omega_1 \cup \Omega_2) < 4\varepsilon, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0,$$

y así $\mathrm{a}_*(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathrm{a}^*(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, teniéndose que $\Omega_1 \cup \Omega_2$ es un conjunto con área.

De manera similar, si u' y v' son las sumas superior e inferior respectivamente de áreas básicas de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ correspondientes a la partición P_ε, entonces la suma de las áreas de los elementos de la cubierta de $\Omega_1 \cap \Omega_2$, correspondiente a P_ε, que no están incluidas en $\Omega_1 \cap \Omega_2$, es menor que 4ε, es decir $u' - v' < 4\varepsilon$. Por lo tanto,

$$v' \leq \mathrm{a}_*(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leq \mathrm{a}^*(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leq u' < v' + 4\varepsilon,$$

es decir

$$\mathrm{a}^*(\Omega_1 \cap \Omega_2) - \mathrm{a}_*(\Omega_1 \cap \Omega_2) < 4\varepsilon, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0,$$

y así $\mathrm{a}_*(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \mathrm{a}^*(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, teniéndose que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es un conjunto con área.

Por otro lado, al observar que

$$u = u_1 + u_2 - u'$$

y que

$$v = v_1 + v_2 - v',$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1 \cap \Omega_2) - 2\varepsilon \\
&\qquad = (\mathrm{a}(\Omega_1) - \varepsilon) + (\mathrm{a}(\Omega_2) - \varepsilon) - \mathrm{a}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \\
&\qquad < v_1 + v_2 - v' = v \\
&\qquad \leq \mathrm{a}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq u = u_1 + u_2 - u' \\
&\qquad < (\mathrm{a}(\Omega_1) + \varepsilon) + (\mathrm{a}(\Omega_2) + \varepsilon) - \mathrm{a}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \\
&\qquad = \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1 \cap \Omega_2) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$|\,\mathrm{a}(\Omega_1 \cup \Omega_2) - (\mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1 \cap \Omega_2))| < 2\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, concluyendo que

$$\mathrm{a}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathrm{a}(\Omega_1) + \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \qquad \blacksquare$$

Definición 6.9. Si A es un conjunto de puntos y P es un punto, definiremos a la suma de P con A como $P + A := \{Q : \; Q = P + R$

para algún $R \in A\}$. Además diremos que $P + A$ es una **traslación** del conjunto A.

Teorema 6.6. *Si Ω es un conjunto con área, entonces cualquier traslación de Ω tiene área igual a la de Ω.*

Demostración. Sea $P \in \mathbb{R}^2$. El teorema se sigue de los siguientes hechos: La traslación $P + R$ de cualquier caja plana R es también una caja plana tal que se cumple $a(P + R) = a(R)$. Si $\mathcal{C}$ es una cubierta básica de Ω, entonces $\mathcal{C}' := \{S' : \ S' = P + S$ para algún $S \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta básica de $P + \Omega$. Si u es la una suma superior de áreas básicas de Ω correspondiente a $\mathcal{C}$, entonces también es la suma superior de áreas básicas de $P + \Omega$ correspondiente a $\mathcal{C}'$. Si v es la una suma inferior de áreas básicas de Ω correspondiente a $\mathcal{C}$, entonces también es la suma inferior de áreas básicas de $P + \Omega$ correspondiente a $\mathcal{C}'$. Dejamos los demás detalles de la demostración para el lector. ∎

Teorema 6.7. *Dado un triángulo rectángulo con catetos paralelos a los ejes de coordenadas, la región triangular correspondiente es un conjunto con área y el área es igual a la mitad del producto de las longitudes de los catetos.*

Demostración. Calculemos primero el área de la región triangular T cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (a, b), con a y b positivos. Observemos que si $R_k{}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq \frac{b(k-1)}{n}$ y $\frac{a(k-1)}{n} \leq x \leq \frac{ak}{n}\}$, entonces $\mathcal{C}' := \{R_k{}' : \ k \in \{2, 3, \cdots, n\}\}$ está formada por los elementos de una cubierta básica de T que están incluidos en T, por lo que una suma inferior de áreas básicas de T es

$$\sum_{k=2}^{n} (b(k-1)/n)((ak - a(k-1))/n) = \sum_{k=2}^{n} ab(k-1)/n^2$$

$$= \frac{ab}{n^2} \sum_{k=2}^{n} (k-1) = \frac{ab}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{ab}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{ab(n-1)}{2n},$$

por lo tanto $\mathrm{a}_*(T) \geq \frac{ab(n-1)}{2n}$ y tomando el límite cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos que $\mathrm{a}_*(T) \geq \frac{ab}{2}$. Ahora, si $R_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq \frac{bk}{n}$ y $\frac{a(k-1)}{n} \leq x \leq \frac{ak}{n}\}$, entonces $\mathcal{C} := \{R_k : \ k \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}\}$ es una cubierta básica de T y la suma de las áreas de las cajas planas de tal cubierta básica es

$$\sum_{k=1}^{n} (bk/n)((ak - a(k-1))/n) = \sum_{k=1}^{n} abk/n^2 = \frac{ab}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{ab}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{ab(n+1)}{2n},$$

por lo tanto $\mathrm{a}^*(T) \le \frac{ab(n+1)}{2n}$ y tomando el límite cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos que $\mathrm{a}^*(T) \le \frac{ab}{2}$. Así tenemos que

$$\mathrm{a}^*(T) \le \frac{ab}{2} \le \mathrm{a}_*(T) \le \mathrm{a}^*(T),$$

por lo tanto T es un conjunto con área y su área es igual a $\frac{|a||b|}{2}$.

De manera análoga se demuestra que el área de una región triangular cuyos vértices son los puntos $(0,0)$, $(a,0)$ y (a,b) es igual a $\frac{|a||b|}{2}$ en los siguientes casos: $a > 0$ y $b < 0$; $a < 0$ y $b > 0$; y $a < 0$ y $b < 0$.

Observando que cualquier región triangular determinada por un triángulo rectángulo con catetos paralelos a los ejes de coordenadas es una traslación de una región triangular cuyos vértices son los puntos $(0,0)$, $(a,0)$ y (a,b) con a y b diferentes de cero y que las longitudes de los catetos se preservan, tenemos que tales regiones triangulares son regiones con área y el área es igual al producto de las longitudes de los catetos. ■

Teorema 6.8. *Si Ω_1 y Ω_2 son conjuntos con área y $\Omega_1 \subset \Omega_2$, entonces $\Omega_2 \backslash \Omega_1$ es también un conjunto con área y además*

$$\mathrm{a}(\Omega_2 \backslash \Omega_1) = \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1).$$

Demostración. Sean u_1 y u_2 sumas superiores de áreas básicas de Ω_1 y Ω_2 respectivamente, y v_1 y v_2 sumas inferiores de áreas básicas de Ω_1 y Ω_2 respectivamente (todas correspondientes a una misma partición P) tales que $\mathrm{a}(\Omega_1) < v_1 + \varepsilon$, $\mathrm{a}(\Omega_2) < v_2 + \varepsilon$, $u_1 - \varepsilon < \mathrm{a}(\Omega_1)$ y $u_2 - \varepsilon < \mathrm{a}(\Omega_2)$. Sean ahora u_1 la suma superior de áreas básicas de $\Omega_2 \backslash \Omega_1$ correspondiente a P y v la suma inferior de áreas básicas de $\Omega_2 \backslash \Omega_1$ correspondiente a P. Observemos que $u = u_2 - v_1$ y $v = v_2 - u_1$. Con esta notación tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}_*(\Omega_2 \backslash \Omega_1) \quad & \le \mathrm{a}^*(\Omega_2 \backslash \Omega_1) \le u \\
& = u_2 - v_1 < (\mathrm{a}(\Omega_2) + \varepsilon) - (\mathrm{a}(\Omega_1) - \varepsilon) \\
& = \mathrm{a}(\Omega_2) - \mathrm{a}(\Omega_1) + 2\varepsilon \\
& < (v_2 + \varepsilon) - (v_1 - \varepsilon) + 2\varepsilon \\
& = v + 4\varepsilon \le \mathrm{a}_*(\Omega_2 \backslash \Omega_1) + 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Haciendo tender ε a cero se tiene la conclusión del teorema. ∎

Del teorema 6.8 se sigue inmediatamente el corolario siguiente.

Corolario 6.8.1. *Si* Ω_1 *y* Ω_2 *son conjuntos con área y* $\Omega_1 \subset \Omega_2$, *entonces* $\mathrm{a}(\Omega_1) \leq \mathrm{a}(\Omega_2)$.

Teorema 6.9. *Sea* R *una región rectangular (no necesariamente con lados paralelos a los ejes de coordenadas) con longitud de la base* a *y longitud de la altura correspondiente* b. *El conjunto* R *es un conjunto con área y* $\mathrm{a}(R) = ab$.

Demostración. En el caso en que los lados de R sean paralelos a los ejes de coordenadas por definición el resultado es válido. Supongamos pues que los lados de R no son paralelos a los ejes de coordenadas. Sea $A = (x_0, y_0)$ el vértice que está más abajo, $B = (x_1, y_1)$ el vértice que está más a la derecha, $C = (x_2, y_2)$ el que está más a la arriba, $D = (x_3, y_3)$ el que está más a la izquierda, θ la inclinación de $\overleftrightarrow{AB}$ y observemos que R está contenido en la región rectangular R' con vértices $V_1 = (x_1, y_0)$, $V_2 = (x_1, y_2)$, $V_3 = (x_3, y_2)$ y $V_4 = (x_3, y_0)$, y además R' tiene lados paralelos a los ejes de coordenadas. Sea T_1 la región triangular determinada por $\triangle AV_1B$, T_2 la región triangular determinada por $\triangle BV_2C$, T_3 la región triangular determinada por $\triangle CV_3D$ y T_4 la región triangular determinada por $\triangle DV_4A$, por los teoremas 6.4, 6.5, 6.7, 6.8 y del hecho de que los segmentos tienen área cero, tenemos que R es un conjunto con área y además

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}(R) &= \mathrm{a}(R') - (\mathrm{a}(T_1) + \mathrm{a}(T_2) + \mathrm{a}(T_3) + \mathrm{a}(T_4)) \\
&= (b\cos\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta)(b\,\mathrm{sen}\,\theta + a\cos\theta) \\
&- \left(\tfrac{b^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{2} + \tfrac{a^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{2} + \tfrac{b^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{2} + \tfrac{a^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{2}\right) \\
&= ab((\cos\theta)^2 + (\mathrm{sen}\,\theta)^2) = ab.
\end{aligned}$$ ∎

Observando el hecho de que cualquier región triangular es la intersección de tres regiones rectangulares y usando el teorema anterior obtenemos el corolario siguiente.

Corolario 6.9.1. *Cualquier región triangular contenida en* $\mathbb{R}^2$ *es un conjunto con área.*

Teorema 6.10. *Sea Ω un conjunto acotado.*

(a) $\mathrm{a}_*(\Omega) = \sup\{\mathrm{a}(A) : A \subset \Omega$ *y A es un conjunto con área*$\}$.

(b) $\mathrm{a}^*(\Omega) = \text{ínf}\{\mathrm{a}(A) : \Omega \subset A$ *y A es un conjunto con área*$\}$.

Demostración. Las demostraciones de los incisos (a) y (b) son análogas por lo que solamente demostraremos el inciso (b). Si $\Omega \subset A$, donde A es un conjunto con área, entonces cualquier cubierta básica de A tiene un subconjunto que es una cubierta básica de Ω. Recíprocamente, toda cubierta básica de Ω está incluida en una cubierta básica de A. Por lo tanto, $\mathrm{a}^*(\Omega) = \text{ínf}\{u :\ u$ es una suma superior de áreas básicas de $\Omega\}$ $\leq \text{ínf}\{u :\ u$ es una suma superior de áreas básicas de $A\} = \mathrm{a}(A)$, teniendo así que $\mathrm{a}^*(\Omega) \leq \mathrm{a}(A)$. Ahora, del teorema 6.5 podemos concluir que la unión de los elementos de cualquier cubierta básica $\mathcal{C}$ de Ω es un conjunto igual a la suma superior de áreas básicas de Ω correspondiente a $\mathcal{C}$, de donde se sigue que $\{u :\ u$ es una suma superior de áreas básicas de $\Omega\} \subset \{\mathrm{a}(A) :\ \Omega \subset A$ y A es un conjunto con área$\}$, por lo tanto $\mathrm{a}^*(\Omega) = \text{ínf}\{u :\ u$ es una suma superior de áreas básicas de $\Omega\} \geq \text{ínf}\{\mathrm{a}(\Omega) :\ \Omega \subset A$ y A es un conjunto con área$\} \geq \mathrm{a}^*(\Omega)$, teniéndose así que

$$\mathrm{a}^*(\Omega) = \text{ínf}\{\mathrm{a}(A) :\ \Omega \subset A \ \text{ y } A \text{ es un conjunto con área}\}. \qquad \blacksquare$$

Con los resultados hasta ahora vistos en esta sección, podemos ver que si nos restringimos a subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^2$, se satisfacen los postulados 16, 17, 18 y 19, es decir se satisfacen los postulados que describen el concepto de área. En efecto, el postulado 16 es consecuencia del hecho de que las regiones rectangulares preservan el área bajo isometrías (teorema 6.9) y del teorema 6.10; el postulado 17 es consecuencia de los teoremas 6.3 y 6.5; el postulado 18 se deduce de los teoremas 6.3, 6.5, 6.8, del corolario 6.9.1 y de la definición de área; finalmente, el postulado 19 equivale al teorema 6.9. Para ver que estos teorema se satisfacen cuando estamos hablando del espacio $\mathbb{R}^3$ basta con decir que un conjunto Ω contenido en un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ es un **conjunto con área** si es la imagen bajo una isometría $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Pi$ de un conjunto con área $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ y definir $\mathrm{a}(\Omega) := \mathrm{a}(\Omega')$. De aquí en adelante utilizaremos todos los resultados de la geometría elemental que se deducen de éstos 19 postulados.

Demostremos ahora que las formas como se definen las áreas de círculos y sectores circulares son consistentes con las dadas en esta sección.

Teorema 6.11.

(a) *El área de un círculo de radio r es πr^2.*

(b) *El área de un sector determinado por un arco cuyo ángulo central mide θ y de radio r es $\frac{1}{2}r^2\theta$.*

Demostración. El inciso (a) es consecuencia del inciso (b) y de los teoremas 6.3 (b) y 6.5, por lo que solamente demostraremos el inciso (b).

Sea γ el arco de una circunferencia (incluida en $\mathbb{R}^2$) cuyo ángulo central mide θ y con radio r. Denotemos por S a la sección circular correspondiente al arco y supongamos por el momento que el centro del arco es $O = (0,0)$, uno de los extremos es $(r,0)$ y el otro extremo $P = (x,y)$ está sobre el eje de las abscisas. Una parametrización de γ es la función $\varphi : [0;\theta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$. Tomemos una partición $(t_0, t_1, \cdots, t_n)$ del intervalo $[0;\theta]$ y observemos que cada triángulo de la forma $\triangle O\varphi(t_{k-1})\varphi(t_k)$ tienen área menor o igual que $r|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|/2$, pero $r|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|/2$ es el área de la región determinada por el cuadrilátero con vértices O, $\varphi(t_{k-1})$, P_k y $\varphi(t_k)$, donde $P_k \in \gamma$ es tal que $\overline{OP_k} \perp \overline{\varphi(t_k)\varphi(t_{k-1})}$. Ahora, la unión de cada una de las regiones determinadas por estos cuadriláteros (que está incluida en la sección circular) tiene área igual a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|}{2} r = \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|,$$

por lo tanto

$$\mathrm{a}_*(S) \geq \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|$$

y tomando el supremo sobre las particiones tenemos que

$$\mathrm{a}_*(S) \geq \frac{r}{2}\theta r = \frac{1}{2}\theta r^2. \tag{1}$$

Al trazar la recta tangente al arco de circunferencia en el punto $\varphi(t_k)$, el rayo $\overrightarrow{OP_k}$ corta a la tangente en un punto N_k exterior a la circunferencia, de manera que la unión de las regiones rectangulares con vértices O, $\varphi(t_{k-1})$, N_k y $\varphi(t_k)$ contiene a S y el área de tal unión es $\sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|\frac{ON_k}{2}$, por lo tanto

$$\mathrm{a}^*(S) \leq \sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|\frac{ON_k}{2}. \tag{2}$$

Ahora, con la partición $(t_0, t_1, \ldots, t_n) := (0, \frac{\theta}{n}, \ldots, \frac{(k-1)\theta}{n}, \frac{k\theta}{n}, \ldots, \theta)$, tenemos que para n suficientemente grande ($n > 10$, por ejemplo)

$$\begin{aligned}|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| ON_k &= \left| 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2n}\right)\right| (r + P_kN_k) \leq \left|2r\frac{\theta}{2n}\right| (r + P_kN_k) \\ &= \frac{\theta r^2}{n} + \frac{\theta r}{n} P_kN_k < \frac{\theta r^2}{n} + \frac{\theta r^2}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2n}\right) \tan\left(\frac{\theta}{2n}\right) \\ &< \frac{\theta r^2}{n} + \frac{\theta r^2}{n} \frac{(\theta/2n)^2}{\cos(\theta/2n)} = \frac{\theta r^2}{n} + \frac{2r^2(\theta/2n)^3}{\cos(\theta/2n)}. \qquad (3)\end{aligned}$$

De (2) y (3) tenemos

$$\mathrm{a}^*(S) < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\theta r^2}{n} + \frac{2r^2(\theta/2n)^3}{\cos(\theta/2n)}\right) < \frac{1}{2}\theta r^2 + \frac{r^2\theta(\theta/2n)^2}{\cos(\theta/2n)},$$

pero como $\frac{\theta}{2n} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y además la función cos es continua tenemos

$$\mathrm{a}^*(S) \leq \frac{1}{2}\theta r^2,$$

con esta última desigualdad y con la desigualdad (1) concluimos la demostración del teorema. ∎

Teorema 6.12.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Demostración. Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, tenemos que la región triangular cuyos vértices son $O = (0,0)$, $(\cos\theta, 0)$ y $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ está incluida en el sector circular determinado por el arco con centro en O y extremos en $(\cos\theta, 0)$ y $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, y este sector circular a su vez está incluido en la región triangular cuyos vértices son O, $(1,0)$ y $(1, \tan\theta)$, y sus áreas respectivas son $\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{2}$, $\frac{\theta}{2}$ y $\frac{\tan\theta}{2}$, por lo tanto

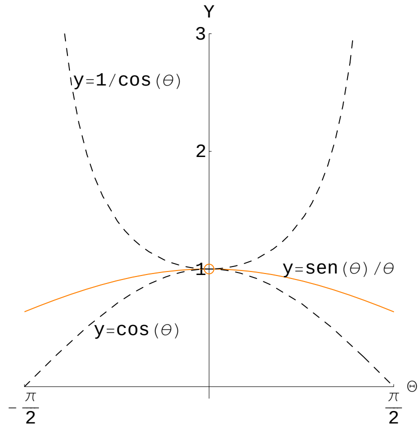
$$\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan\theta}{2},$$

de donde obtenemos

$$\cos\theta \leq \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \cos\theta. \qquad (4)$$



Como $\cos\theta = \cos(-\theta)$ y $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta}$, tenemos que (4) también es válido cuando $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. Tomando en (4) el límite cuando $\theta \longrightarrow 0$ y usando el teorema 5.7 tenemos el resultado deseado. ■

En la cultura griega antigua no se conocía tal como lo conocemos ahora el concepto del límite, sin embargo, en el siglo III antes Cristo, el astrónomo y matemático Eratóstenes logró medir con gran precisión el diámetro de la Tierra usando implícitamente el teorema anterior. En el libro "Geometría Moderna" de Moise y Downs se da una descripción de cómo Eratóstenes midió la Tierra. El teorema anterior sirve entre otras muchas cosas para describir de manera aproximada el movimiento de un péndulo simple.

Ejercicio 6.1. Con la definición de área dada en esta sección, demostrar que el área de una circunferencia es cero.

7. Definición de Volumen

DEFINICIÓN 7.1. Decimos que un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es **acotado** si existe un cuerpo esférico en el cual está incluido.

DEFINICIÓN 7.2. A un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{(x,y,z):\ a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2 \text{ y } c_1 \leq z \leq c_2\}$, donde $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{R}$, lo llamaremos **caja**.

DEFINICIÓN 7.3. Si en una caja $\{(x,y,z):\ a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2 \text{ y } c_1 \leq z \leq c_2\}$ tenemos que $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ y $c_1 \leq c_2$, definiremos el **volumen** de tal caja como $(a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1)$ y diremos que cualquier puntos (a_i,b_j,c_k) con $i,j,k \in \{1,2\}$ es un **vértice** de la caja. El otro posible caso de caja es el conjunto vacío cuyo **volumen** se define como cero.

Lema 7.1. *La intersección de dos cajas es una caja.*

Demostración. Si tenemos dos cajas $\{(x,y,z):\ a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2 \text{ y } c_1 \leq z \leq c_2\}$ y $\{(x,y,z):\ a_1' \leq x \leq a_2', b_1' \leq y \leq b_2' \text{ y } c_1' \leq z \leq c_2'\}$, su intersección es la caja $\{(x,y,z):\ a_1^* \leq x \leq a_2^*, b_1^* \leq y \leq b_2^* \text{ y } c_1^* \leq z \leq c_2^*\}$, donde $a_1^* = \text{máx}\{a_1,a_1'\}$, $a_2^* = \text{mín}\{a_2,a_2'\}$, $b_1^* = \text{máx}\{b_1,b_1'\}$, $b_2^* = \text{mín}\{b_2,b_2'\}$, $c_1^* = \text{máx}\{c_1,c_1'\}$ y $c_2^* = \text{mín}\{c_2,c_2'\}$. ∎

DEFINICIÓN 7.4. Sea $C = \{(x,y,z):\ a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2\}$ y $c_1 \leq z \leq c_2\}$ una caja con $a_1 < a_2$, y $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Si $P_1 = (x_0,\cdots,x_n)$ es una partición del intervalo $[a_1;a_2]$, $P_2 = (y_0,\cdots,y_m)$ es una partición del intervalo $[b_1;b_2]$ y $P_3 = (z_0,\cdots,z_h)$ es una partición del intervalo $[c_1;c_2]$, decimos que la terna ordenada (P_1,P_2,P_3) es una **partición** de la caja C.

DEFINICIÓN 7.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto acotado, R una caja tal que $\Omega \subset R$, y $P = (P_1,P_2,P_3) = ((x_0,\cdots,x_n),(y_0,\cdots,y_m),(z_0,\cdots,z_h))$ una partición de la caja R; tomemos para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$, $j \in \{1,\cdots,m\}$ y $k \in \{1,\cdots,h\}$ la caja $R_{i,j,k} = \{(x,y,z):\ x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j \text{ y } z_{k-1} \leq z \leq z_k\}$; sean además

$$u_{i,j,k} = \begin{cases} \text{vol}(R_{i,j,k}) & \text{si } R_{i,j,k} \cap \Omega \neq \varnothing, \\ \\ 0 & \text{si } R_{i,j,k} \cap \Omega = \varnothing \end{cases}$$

y

$$v_{i,j,k} = \begin{cases} \text{vol}(R_{i,j,k}) & \text{si } R_{i,j,k} \subset \Omega, \\ \\ 0 & \text{si } R_{i,j,k} \cap \Omega \neq R_{i,j,k}. \end{cases}$$

Decimos que el conjunto $\mathcal{C} = \{R_{i,j,k} : \ R_{i,j,k} \cap \Omega \neq \varnothing\}$ es una **cubierta básica** de Ω (la correspondiente a la partición P). Decimos también que

$$u = \sum_{k=1}^{h} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} u_{i,j,k}$$

es una **suma superior de volúmenes básicos** de Ω (correspondiente a la cubierta básica $\mathcal{C}$ o a la partición P) y que

$$v = \sum_{k=1}^{h} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_{i,j,k}$$

es una **suma inferior de volúmenes básicos** de Ω (correspondiente a la cubierta básica $\mathcal{C}$ o a la partición P).

Observación. Con la notación dada en la definición anterior, $v_{i,j,k} \leq u_{i,j,k}$ y $v \leq u$.

Definición 7.6. Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ una caja, y sean $P = (P_1, P_2, P_3) = ((x_0, \cdots, x_n), (y_0, \cdots, y_m), (z_0, \cdots, z_h))$ y $P' = (P'_1, P'_2, P'_3) = ((x'_0, \cdots, x'_{n'}), (y'_0, \cdots, y'_{m'}), (z'_0, \cdots, z'_{h'}))$ dos particiones de la caja R tales que $\{x_0, \cdots, x_n\} \subset \{x'_0, \cdots, x'_{n'}\}$, $\{y_0, \cdots, y_m\} \subset \{y'_0, \cdots, y'_{m'}\}$ y $\{z_0, \cdots, z_h\} \subset \{z'_0, \cdots, z'_{h'}\}$. Decimos que la partición P' es un **refinamiento** de la partición P.

La demostración del siguiente lema se omite debido a que es similar a la del lema 6.2.

Lema 7.2. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que está incluido en alguna caja R; P y P' dos particiones de R tales que P' es un refinamiento de P; $\mathcal{C}$ la cubierta básica de R correspondiente a la partición P, y $\mathcal{C}'$ la cubierta básica de R correspondiente a la partición P'; u y v las sumas superior e inferior respectivamente de volúmenes básicos correspondientes a $\mathcal{C}$, y u' y v' las sumas superior e inferior respectivamente de volúmenes básicos correspondientes a $\mathcal{C}'$. Tenemos que $v \leq v' \leq u' \leq u$.*

A continuación daremos las definiciones de volumen interior, volumen exterior y de conjunto con volumen, las cuales son similares a los conceptos de área dados en la sección 6.

Siempre que esté definido el volumen de un conjunto B lo podremos denotar por $\text{vol}(B)$.

Definición 7.7. Sea $B \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto acotado. Definimos el **volumen interior** de B como $\text{vol}_*(B) := \sup\{v \in \mathbb{R} : \ v$ es una suma inferior de volúmenes básicos de $B\}$.

Definición 7.8. Sea $B \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto acotado. Definimos el **volumen exterior** de B como $\operatorname{vol}^*(B) := \operatorname{ínf}\{u \in \mathbb{R} : u$ es una suma superior de volúmenes básicos de $B\}$.

Definición 7.9. Sea $B \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto acotado. Si $\operatorname{vol}^*(B) = \operatorname{vol}_*(B)$, decimos que B es un **conjunto con volumen** y al valor común de $\operatorname{vol}_*(B)$ y $\operatorname{vol}^*(B)$ le llamaremos **volumen** de B y lo denotaremos simplemente por $\operatorname{vol}(B)$. A los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que son conjuntos con volumen también se les llama conjuntos **Jordan-medibles**.

El siguiente teorema resume muchas propiedades relacionadas del concepto de volumen que son similares a las de área. Las demostraciones de los enunciados de tal teorema son análogas a las de los resultados concernientes a áreas dados en la sección anterior, por lo que omitimos su demostración.

Teorema 7.1.

(a) *Si* $B \subset \mathbb{R}^3$ *es un conjunto acotado, entonces* $\operatorname{vol}_*(B) \leq \operatorname{vol}^*(B)$.

(b) *Si* B *es una caja, entonces* $\operatorname{vol}_*(B) = \operatorname{vol}^*(B)$. *Es decir, las cajas son conjuntos con volumen.*

(c) *Si* A *y* B *son conjuntos acotados tales que* $A \subset B$, *entonces*

$$\operatorname{vol}_*(A) \leq \operatorname{vol}_*(B) \quad \text{y} \quad \operatorname{vol}^*(A) \leq \operatorname{vol}^*(B).$$

(d) *Si* B *es un conjunto con volumen* 0 *y* $A \subset B$, *entonces* A *también tiene volumen* 0.

(e) *Si* A *y* B *son dos conjuntos con volumen, entonces* $A \cup B$ *es un conjunto con volumen.*

(f) *Si* A *y* B *son dos conjuntos con volumen y* $A \subset B$, *entonces* $B \backslash A$ *es un conjunto con volumen y*

$$\operatorname{vol}(B \backslash A) = \operatorname{vol}(B) - \operatorname{vol}(A).$$

(g) *Si* A *y* B *son conjuntos con volumen, entonces* $B \backslash A$ *es un conjunto con volumen.*

(h) *Si* A *y* B *son conjuntos con volumen, entonces* $A \cap B$ *es un conjunto con volumen.*

(i) *Si* A *y* B *son dos conjuntos disjuntos con volumen, entonces*

$$\operatorname{vol}(A \cup B) = \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B).$$

(j) *Si A y B son dos conjuntos con volumen, entonces*

$$\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B) - \mathrm{vol}(A \cap B).$$

Utilizando inducción matemática y el inciso (j) del teorema 7.1, podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 7.1.1. *Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ conjuntos con volumen tales que para cualquier par de números $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, con $i \neq j$, se tenga que $\mathrm{vol}(B_i \cap B_j) = 0$. Tenemos la siguiente igualdad*

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{vol}(B_k).$$

Definición 7.10. Cuando nuestro contexto marque que nuestro espacio es el conjunto $\mathbb{R}^3$ definiremos los planos YZ, XZ y XY de la siguiente forma: YZ $:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0\}$, XZ $:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = 0\}$, XY $:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\}$.

Aclaremos que si bien la definición que acabamos de dar de plano XY no es precisamente la misma que la dada con anterioridad, será la que tomemos al menos en esta sección.

Lema 7.3. *Si una de las bases de un cilindro recto es un conjunto con área paralelo a alguno de los planos* XY, YZ *ó* XZ, *entonces el cilindro es un conjunto con volumen y su volumen será el área de la base multiplicada por su altura.*

Demostración. Haremos la demostración para el caso en que alguna de las bases del cilindro sea paralela al plano XY (los demás casos se hacen de manera análoga).

Sea C un cilindro con una base paralela al plano XY y altura h. La proyección del cilindro C en el plano XY es un conjunto A congruente con la base del cilindro por lo que tiene la misma área $\mathrm{a}(A)$ que la base.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\{A_1, A_2, \cdots, A_m, A_{m+1}, \cdots, A_n\}$ una cubierta básica de A de n cajas planas tales que $A_1, \cdots, A_m \subset A$, $A_{m+1} \cap A \neq A_{m+1}, \cdots, A_n \cap A \neq A_n$ y

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{a}(A_k) + \varepsilon/h > \sum_{k=1}^{n} \mathrm{a}(A_k) \geq \mathrm{a}(A) \geq \sum_{k=1}^{m} \mathrm{a}(A_k). \tag{1}$$

Sea $I = \{(0, 0, z) : \ a \leq z \leq b\}$ la proyección de C en el eje Z (es decir, en la recta $\{(0, 0, z) : \ z \in \mathbb{R}\}$). Observemos que $h = b - a$,

$C = \{(x, y, z) : (x, y, 0) \in A$ y $z \in [a; b]\}$ y admás las cajas de la familia $\{C_1, \cdots, C_m, \cdots, C_n\}$ definidas por $C_k := \{(x, y, z) : (x, y, 0) \in A_k$ y $z \in [a; b]\}$ forman una cubierta básica del cilindro C tal que $C_k \subset C$ para $k \in \{1, \cdots, m\}$, $C_k \cap C \neq C_k$ para $k \in \{m+1, \cdots, n\}$ y $\mathrm{vol}(C_k) = \mathrm{a}(A_k)h$ para $k \in \{1, \cdots, n\}$. Así, de (1) tenemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon + \mathrm{vol}_*(C) &\geq \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(C_k) + \varepsilon = h\left(\sum_{k=1}^{m} a(A_k) + \frac{\varepsilon}{h}\right) \\ &> \sum_{k=1}^{n} h\,\mathrm{a}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{vol}(C_k) \geq \mathrm{vol}^*(C) \qquad (2)\end{aligned}$$

y haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ vemos que $\mathrm{vol}^*(C) = \mathrm{vol}_*(C)$, es decir C es un conjunto con volumen. Ahora, de (1) y (2) tenemos que

$$\varepsilon + \mathrm{vol}(C) \geq h\,\mathrm{a}(A) \geq h\sum_{k=1}^{m} a(A_k) \geq h\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{a}(A_k) - \frac{\varepsilon}{h}\right) \geq \mathrm{vol}(C) - \varepsilon$$

y de nuevo haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ vemos que $\mathrm{vol}(C) = h\,\mathrm{a}(A)$, es decir $\mathrm{vol}(C)$ es el área de la base de C por su altura. ∎

Más adelante verificaremos la fórmula para calcular el volumen de un cilindro sin importar si alguna de sus bases es paralela a alguno de los planos XY, YZ ó XZ.

Teorema 7.2. *Si $A \subset \mathbb{R}^3$, entonces*

$$\mathrm{vol}_*(A) = \sup\{v : \ v \text{ es el volumen de un conjunto incluido en } A\}$$

y

$$\mathrm{vol}^*(A) = \text{ínf}\{u : \ u \text{ es el volumen de un conjunto que incluye a } A\}.$$

Demostración. La demosración es similar a la del teorema 6.10. Los detalles de la demostración se dejan al lector. ∎

Definición 7.12. En el espacio $\mathbb{R}^3$ definamos las siguientes transformaciones

(a) **Rotaciones o giros** θ con respecto a los ejes X, Y y Z respectivamente como

$$\underset{(x,y,z)\mapsto(x,y\cos\theta - z\,\mathrm{sen}\,\theta,\, y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta)}{G_{\mathrm{X},\theta} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3},$$

$$\underset{(x,y,z)\mapsto(x\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta,\, y,\, x\operatorname{sen}\theta + z\cos\theta)}{G_{\mathrm{Y},\theta} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3} \qquad \text{y}$$

$$\underset{(x,y,z)\mapsto(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta,\, z)}{G_{\mathrm{Z},\theta} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3} \qquad .$$

(b) **Reflexiones** con respecto a los planos XY, YZ y XZ respectivamente como

$$\underset{(x,y,z)\mapsto(x,y,-z)}{R_{\mathrm{XY}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3} \ ,$$

$$\underset{(x,y,z)\mapsto(-x,y,z)}{R_{\mathrm{YZ}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3} \ \text{ y}$$

$$\underset{(x,y,z)\mapsto(x,-y,z)}{R_{\mathrm{XZ}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3} \ .$$

(c) **Traslación**, o traslación (h,k,l), si se quiere especificar, como

$$\underset{(x,y,z)\mapsto(x+h,y+k,z+l)}{T_{(h,k,l)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3} \ , \text{ con } (h,k,l) \in \mathbb{R}^3.$$

Dejamos como ejercicio al lector la demostración del siguiente teorema.

Teorema 7.3. *Las rotaciones, con respecto a cualquiera de los ejes* X, Y *ó* Z*; las reflexiones, con respecto a cualquiera de los planos* XY, YZ *ó* XZ*, y las traslaciones son isometrías.*

El siguiente teorema establece que cualquier giro del espacio con respecto a alguno de los ejes de coordenadas preserva volúmenes.

Teorema 7.4. *Si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces las rotaciones $G_{\mathrm{X},\theta}$, $G_{\mathrm{Y},\theta}$ y $G_{\mathrm{Z},\theta}$ preservan volumen. Es decir, si A es un conjunto con volumen y $j \in \{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$, entonces $G_{j,\theta}[A]$, la imagen de A bajo $G_{j,\theta}$, es un conjunto con volumen y además* $\operatorname{vol}(G_{j,\theta}[A]) = \operatorname{vol}(A)$.

Demostración. Haremos la demostración sólo para la transformación $G_{\mathrm{Z},\theta}$ debido a que para las otras transformaciones la demostración se puede hacer de manera análoga. Supongamos que A es un conjunto con volumen. Para cada $\varepsilon > 0$ sea $\{B_1, \cdots, B_n\}$ una cubierta básica de A tal que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{vol}(B_k) - \varepsilon < \operatorname{vol}(A) < \sum_{B_k \subset A}^{n} \operatorname{vol}(B_k) + \varepsilon.$$

Del corolario 7.1.1 podemos concluir que

$$\operatorname{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) - \varepsilon < \operatorname{vol}(A) < \operatorname{vol}\left(\bigcup_{B_k \subset A} B_k\right) + \varepsilon. \tag{3}$$

Sea $C_k := G_{\mathrm{Z},\theta}[B_k]$ y hagamos algunas observaciones. El conjunto C_k es un cilindro con una base paralela al plano XY (o incluida en el plano XY) la cual tiene la misma área que la base de B_k que es paralela al plano XY (postulado 16 ó 19), además las alturas correspondientes de B_k y de C_k son iguales (la tercera componente no se altera bajo la transformación $G_{\mathrm{Z},\theta}$. Debido al lema 7.3, el volumen de C_k es el mismo que el de B_k y también por el lema 7.3 si $j \neq k$ entonces $\operatorname{vol}(C_j \cap C_k) = 0$, por lo tanto, debido a (3)

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(A) + \varepsilon \geq \operatorname{vol}\left(\bigcup_{B_k \subset A} B_k\right) + \varepsilon > \operatorname{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) - \varepsilon = \operatorname{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) - \varepsilon \\
\geq \operatorname{vol}^*(G_{\mathrm{Z},\theta}[A]) - \varepsilon \geq \operatorname{vol}_*(G_{\mathrm{Z},\theta}[A]) - \varepsilon \geq \operatorname{vol}\left(\bigcup_{C_k \subset G_{\mathrm{Z},\theta}[A]} C_k\right) - \varepsilon \\
= \operatorname{vol}\left(\bigcup_{B_k \subset A} B_k\right) - \varepsilon > \operatorname{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) - 2\varepsilon \geq \operatorname{vol}(A) - 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

y haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ tenemos que $\operatorname{vol}^*(G_{\mathrm{Z},\theta}[A]) = \operatorname{vol}_*(G_{\mathrm{Z},\theta}[A]) = \operatorname{vol}(A)$. ∎

El teorema siguiente establece que las reflexiones con respecto a alguno de los planos XY, YZ ó XZ preservan volumen.

Teorema 7.5. *Las reflexiones R_{XY}, R_{YZ} y R_{XZ} preservan volumen.*

Demostración. El teorema se sigue al observar que cualquier transformación R_j, con $j \in \{\mathrm{XY}, \mathrm{YZ}, \mathrm{XZ}\}$ envía los elementos de una cubierta básica de n cajas diferentes en una cubierta básica de n cajas diferentes, preservando el volumen de cada caja de la cubierta básica y por lo tanto también el de la unión de elementos de la cubierta básica. ∎

El siguiente teorema afirma que las traslaciones en el espacio preservan volumen. Omitiremos su demostración debido ya que los argumentos son similares a los del teorema anterior.

Teorema 7.6. *Cualquier traslación $T_{(h,k,l)}$, con $(h,k,l) \in \mathbb{R}^3$, preserva volumen.*

Teorema 7.7. *Sea $\hat{\mathbf{\imath}} = (1,0,0)$, $\hat{\mathbf{\jmath}} = (0,1,0)$, $\hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$ y $\mathbf{0} = (0,0,0)$, además sean $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ vectores ortonormales y $Q \in \mathbb{R}^3$. La transformación $\underset{(\alpha,\beta,\gamma)\mapsto Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}+\beta\vec{\mathbf{v}}+\gamma\vec{\mathbf{w}}}{F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3}$ es la única isometría en el espacio que envía los puntos $\hat{\mathbf{\imath}}$, $\hat{\mathbf{\jmath}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{0}$ a los puntos $Q + \vec{\mathbf{u}}$, $Q + \vec{\mathbf{v}}$, $Q + \vec{\mathbf{w}}$ y Q respectivamente.*

Demostración. Obviamente F envía los puntos $\hat{\mathbf{\imath}}$, $\hat{\mathbf{\jmath}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{0}$ a los puntos $Q + \vec{\mathbf{u}}$, $Q + \vec{\mathbf{v}}$, $Q + \vec{\mathbf{w}}$ y Q respectivamente. Veamos que, en efecto, F es una isometría.

Sean $(\alpha,\beta,\gamma),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Por una parte, $|(\alpha,\beta,\gamma) - (a,b,c)| = \sqrt{(\alpha-a)^2 + (\beta-b)^2 + (\gamma-c)^2}$, por otra parte $|F(\alpha,\beta,\gamma) - F(a,b,c)| = |Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}+\beta\vec{\mathbf{v}}+\gamma\vec{\mathbf{w}}-(Q+a\vec{\mathbf{u}}+b\vec{\mathbf{v}}+c\vec{\mathbf{w}})| = |(\alpha-a)\vec{\mathbf{u}}+(\beta-b)\vec{\mathbf{v}}+(\gamma-c)\vec{\mathbf{w}}|$, ahora por el teorema 4.1, la última expresión es igual a

$$\begin{aligned} &\sqrt{|(\alpha-a)\vec{\mathbf{u}} + (\beta-b)\vec{\mathbf{v}}|^2 + |(\gamma-c)\vec{\mathbf{w}}|^2} \\ =& \sqrt{|(\alpha-a)\vec{\mathbf{u}}|^2 + |(\beta-b)\vec{\mathbf{v}}|^2 + |(\gamma-c)\vec{\mathbf{w}}|^2} \\ =& \sqrt{(\alpha-a)^2 + (\beta-b)^2 + (\gamma-c)^2} \end{aligned}$$

por lo que F es una isometría.

Supongamos ahora que G es una isometría tal que $G(\mathbf{0}) = Q$, $G(\hat{\mathbf{\imath}}) = Q+\vec{\mathbf{u}}$, $G(\hat{\mathbf{\jmath}}) = Q+\vec{\mathbf{v}}$ y $G(\hat{\mathbf{k}}) = Q+\vec{\mathbf{w}}$. Si $\alpha > 0$, entonces el punto $G(\alpha\hat{\mathbf{\imath}})$ está en el rayo $\overrightarrow{O(O + \vec{\mathbf{u}})}$ y a una distancia α de O y el único punto con esta propiedad es $O + \alpha\vec{\mathbf{u}}$. De forma similar, si $\alpha < 0$, el punto $G(\alpha\hat{\mathbf{\imath}})$ está en el rayo opuesto al rayo $\overrightarrow{O(O + \vec{\mathbf{u}})}$ y a una distancia $-\alpha$ de O, por lo tanto, en general $G(\alpha\hat{\mathbf{\imath}}) = O + \alpha\vec{\mathbf{u}}$. Análogamente tenemos que $G(\beta\hat{\mathbf{\jmath}}) = O + \alpha\vec{\mathbf{v}}$ y $G(\gamma\hat{\mathbf{k}}) = O + \gamma\vec{\mathbf{w}}$.

Si $\gamma > 0$, entonces el punto $G(\alpha\hat{\mathbf{\imath}} + \beta\hat{\mathbf{\jmath}} + \gamma\hat{\mathbf{k}})$ está del mismo lado del plano en el que están los puntos Q, $Q + \vec{\mathbf{u}}$, $Q + \vec{\mathbf{v}}$ que el vector $\vec{\mathbf{w}}$ y la recta que pasa por ese punto y es perpendicular al plano lo corta en $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ y está a una distancia β del plano, por lo que tal punto debe ser $Q+\alpha\vec{\mathbf{u}}+\beta\vec{\mathbf{v}}+\gamma\vec{\mathbf{w}}$. Si $\gamma \leq 0$, entonces el punto $G(\alpha\hat{\mathbf{\imath}}+\beta\hat{\mathbf{\jmath}}+\gamma\hat{\mathbf{k}})$ está en el lado opuesto del plano en el que están los puntos Q, $Q + \vec{\mathbf{u}}$, $Q + \vec{\mathbf{v}}$ al que está el vector $\vec{\mathbf{w}}$ (o bien está en el plano si $\gamma = 0$) y la recta que pasa por ese punto y es perpendicular al plano lo corta en $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ y está a una distancia $-\beta$ del plano, por lo que tal punto debe ser $Q + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}} + \gamma\vec{\mathbf{w}}$, con lo cual tenemos que $G = F$. ∎

Teorema 7.8. *Sea* $\mathbf{\hat{\imath}} = (1,0,0)$, $\mathbf{\hat{\jmath}} = (0,1,0)$, $\mathbf{\hat{k}} = (0,0,1)$ *y* $\mathbf{0} = (0,0,0)$*, además sean* $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ *y* $\vec{\mathbf{w}}$ *vectores ortonormales. La isometría* F *en el espacio* $\mathbb{R}^3$*, tal que* $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $F(\mathbf{\hat{\imath}}) = \vec{\mathbf{u}}$, $F(\mathbf{\hat{\jmath}}) = \vec{\mathbf{v}}$ *y* $F(\mathbf{\hat{k}}) = \vec{\mathbf{w}}$ *es tal que existen números reales* θ, ϕ *y* α *tales que* $F = G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha}$*, ó* $F = G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha} \circ R_{\mathrm{X\,Y}}$.

Demostración. Sea θ la medida del ángulo dirigido en el plano XY cuyo lado inicial es el rayo $\overrightarrow{\mathbf{0}\,\mathbf{\hat{\imath}}}$ y cuyo lado terminal es el rayo con extremo $\mathbf{0}$ y que pasa por la proyección P del vector $\vec{\mathbf{u}}$ en el plano XY y sea ϕ la medida del ángulo dirigido en el plano XZ cuyo lado inicial es el rayo $\overrightarrow{\mathbf{0}\,\mathbf{\hat{\imath}}}$ y cuyo lado terminal es el rayo con extremo $\mathbf{0}$ y que pasa por el punto $R \in$ XZ, con primera componente no negativa, que está en la circunferencia con centro en el eje Z y contenida en el plano paralelo al plano XY (o en el plano XY) al cual pertenece el vector $\vec{\mathbf{u}}$ en el plano XZ(o bien $R = \mathbf{\hat{k}}$ cuando $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{\hat{k}}$). Afirmamos que $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi}(\mathbf{\hat{\imath}}) = \vec{\mathbf{u}}$. En efecto, la distancia de R al eje Z es $|P|$; si R y $\vec{\mathbf{u}}$ no están ambas en el plano XY, entonces están en el mismo lado y a la misma distancia del plano XY; la rotación $G_{\mathrm{Y},\phi}$ envía el punto $\mathbf{\hat{\imath}}$ al punto R, ya que $|R| = |\vec{\mathbf{u}}| = 1$; la rotación $G_{\mathrm{Z},\theta}$ envía $|P|\mathbf{\hat{\imath}}$ a P y transforma cualquier plano paralelo al plano XY (o el mismo plano XY) en sí mismo, además cualquier recta paralela al eje Z la transforma en una recta paralela al eje Z, en particular $G_{\mathrm{Z},\theta}[\overleftrightarrow{R\ |P|\mathbf{\hat{\imath}}}] = \overleftrightarrow{\vec{\mathbf{u}}P}$ y así $G_{\mathrm{Z},\theta}(R) = \vec{\mathbf{u}}$; por lo tanto $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi}(\mathbf{\hat{\imath}}) = \vec{\mathbf{u}}$ y además $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Si $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi}(\mathbf{\hat{\jmath}}) = \vec{\mathbf{v}}$ tomamos $\alpha = 0$ y así $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha}(\mathbf{\hat{\jmath}}) = \vec{\mathbf{v}}$. Ahora, si $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi}(\mathbf{\hat{\jmath}}) \neq \vec{\mathbf{v}}$ sea α' el número positivo que es la medida del ángulo con vértice en $\mathbf{0}$ y tal que uno de sus lados pasa por $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi}(\mathbf{\hat{\jmath}})$ y el otro por $\vec{\mathbf{v}}$. Como las isometrías preservan medidas de ángulos tenemos que $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha'}(\mathbf{\hat{\jmath}}) = \vec{\mathbf{v}}$ o bien $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},-\alpha'}(\mathbf{\hat{\jmath}}) = \vec{\mathbf{v}}$ por lo que existe un α tal que la transformación $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha}$ envía el punto $\mathbf{\hat{\jmath}}$ a $\vec{\mathbf{v}}$ y como $G_{\mathrm{X},\alpha}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $G_{\mathrm{X},\alpha}(\mathbf{\hat{\imath}}) = \mathbf{\hat{\imath}}$, entonces también $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha}$ envía $\mathbf{\hat{\imath}}$ a $\vec{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{0}$ a $\mathbf{0}$.

Finalmente, la reflexión $R_{\mathrm{X\,Y}}$ deja invariantes los puntos del plano XY, pero envía $\mathbf{\hat{k}}$ a $-\mathbf{\hat{k}}$ y $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha}(\mathbf{\hat{k}}) \in \{\vec{\mathbf{w}}, -\vec{\mathbf{w}}\}$ (esto último debido a que las isometrías preservan medidas de ángulos) por lo que $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha}(\mathbf{\hat{k}}) = \vec{\mathbf{w}}$ o bien $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha} \circ R_{\mathrm{X\,Y}}(\mathbf{\hat{k}}) = \vec{\mathbf{w}}$. De entre las dos transformaciones $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha}$ y $G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha} \circ R_{\mathrm{X\,Y}}$ tomamos la que envía $\mathbf{\hat{k}}$ a $\vec{\mathbf{w}}$ y los números θ, ϕ y α son los que estábamos buscando. ∎

Teorema 7.9. *Cualquier isometría F en el espacio es de la forma $F = T_{(h,k,l)} \circ G_{\mathrm{Z},\theta} \circ G_{\mathrm{Y},\phi} \circ G_{\mathrm{X},\alpha} \circ I$, donde I es la transformación identidad o bien la reflexión R_{XY}.*

Demostración. El teorema se sigue del hecho de que las isometrías preservan medidas de ángulos y de los teoremas 7.7 y 7.8. ■

Teorema 7.10. *Las isometrías preservan volúmenes.*

Demostración. El teorema se sigue de los teoremas 7.4, 7.5, 7.6 y 7.9. ■

Teorema 7.11. *Cualquier cilindro recto cuya base es un conjunto con área es un conjunto con volumen igual al área de la base multiplicada por la altura.*

Demostración. Observando que cualquier cilindro es congruente con un cilindro con una base en el plano XY, el teorema se deduce de los teoremas 7.3 y 7.10 del teorema 7.16. ■

Corolario 7.11.1. *Si A es un conjunto acotado incluido en un plano, entonces A es un conjunto con volumen* 0.

Demostración. Como A es un conjunto acotado, entonces A está incluido en un círculo C con algún radio $r > 0$. Además A está incluido en todo cilindro recto cuya base es el círculo C. Así tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ podemos tomar un cilindro circular recto D con base C y altura ε. Como $A \subset D$, por los teoremas 7.2 y 7.11 tenemos que $0 \leq \mathrm{vol}_*(A) \leq \mathrm{vol}^*(A) \leq \mathrm{vol}(D) = \pi r^2 \varepsilon$, por lo que haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ tenemos que $\mathrm{vol}_*(A) = \mathrm{vol}^*(A) = 0$. ■

Teorema 7.12. *Si $r > 0$, entonces el cuerpo esférico con centro en $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ y radio r es un conjunto con volumen.*

Demostración. Demostraremos primero que S^+, la parte del cuerpo esférico cuyos elementos tienen tercera coordenada positiva, es un conjunto con volumen. Sea $n \in \mathbb{N}$ y para cada número entero $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tomemos $a_{k,n} = k(\frac{r}{n})$. Para $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ sea $C^*_{k,n}$ el cilindro tal que una de sus bases es el círculo con centro en $(0, 0, a_{k,n})$ y radio $\sqrt{r^2 - a^2_{k,n}}$ y la otra base es el círculo con centro en $(0, 0, a_{k+1,n})$ y radio $\sqrt{r^2 - a^2_{k,n}}$. Observemos que $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} C^*_{k,n} \supset S^+$, $\mathrm{vol}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} C^*_{k,n}\right)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \text{vol}(C^*_{k,n})$ y que $\text{vol}(C^*_{k,n}) = \frac{1}{n}\pi(r^2 - a^2_{k,n})$. Ahora, para $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ sea $C_{k,n*}$ el cilindro tal que una de sus bases es el círculo con centro en $(0, 0, a_{k,n})$ y radio $\sqrt{r^2 - a^2_{k,n}}$ y la otra base es el círculo con centro en $(0, 0, a_{k-1,n})$ y radio $\sqrt{r^2 - a^2_{k,n}}$. Observemos que $\bigcup_{k=1}^{n-1} C_{k,n*} \subset S^+$, $\text{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} C_{k,n*}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \text{vol}(C_{k,n*})$ y que $\text{vol}(C_{k,n*}) = \frac{1}{n}\pi(r^2 - a^2_{k,n})$. De esa manera tenemos que

$$\text{vol}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} C^*_{k,n}\right) - \text{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} C_{k,n*}\right) = \frac{1}{n}\pi(r^2 - a^2_{0,n}) = \frac{1}{n}\pi r^2,$$

por lo tanto

$$\text{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} C_{k,n*}\right) \leq \text{vol}_*(S^+) \leq \text{vol}^*(S^+) \leq \text{vol}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} C^*_{k,n}\right)$$

$$= \text{vol}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} C_{k,n*}\right) + \tfrac{1}{n}\pi r^2,$$

lo cual implica que

$$\text{vol}_*(S^+) \leq \text{vol}^*(S^+) \leq \text{vol}_*(S^+) + \frac{1}{n}\pi r^2.$$

Haciendo $n \longrightarrow \infty$ en la última fórmula concluimos que $\text{vol}^*(S^+) = \text{vol}_*(S^+)$, es decir S^+ es un conjunto con volumen.

Sea ahora S^- el subconjunto del cuerpo esférico cuyos elementos tienen tercera componente negativa. Como S^- es congruente con S^+ tenemos por el teorema 7.16 que S^- es un conjunto con volumen (con el mismo volumen que S^+). Ahora, el círculo S^0 incluido en el plano XY con centro en $\mathbf{0}$ y radio r tiene volumen 0. Como el cuerpo esférico S con centro en $\mathbf{0}$ y radio r es igual a $S^+ \cup S^- \cup S^0$, entonces, por el teorema 7.1 (e), S es un conjunto con volumen. ∎

Corolario 7.12.1. *Cualquier cuerpo esférico es un conjunto con volumen.*

Demostración. Observando que todo cuerpo esférico es la traslación de algún cuerpo esférico con centro en $(0, 0, 0)$, el cual por el teorema anterior es un conjunto con volumen, concluimos que debido al teorema 7.6 todo cuerpo esférico es un conjunto con volumen. ∎

Lema 7.4. *Sean A y C dos conjuntos con volumen tales que para todo plano Π paralelo o igual al plano XY, los conjuntos $A \cap \Pi$ y $C \cap \Pi$ tienen áreas iguales. El volumen de A es igual al de C.*

Demostración. Sea R una caja tal que $A, C \subset R$. Para cada $\varepsilon > 0$ sean: $P_{A,\varepsilon,1}$ una partición de R tal que la cubierta básica $\mathcal{B}_{A,\varepsilon,1}$ de A correspondiente a esa partición es tal que

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_{A,\varepsilon,1}} \mathrm{vol}(B) < \mathrm{vol}(A) + \varepsilon;$$

$P_{A,\varepsilon,2}$ una partición de R tal que la cubierta básica $\mathcal{B}_{A,\varepsilon,2}$ de A correspondiente a esa partición es tal que

$$\mathrm{vol}(A) - \varepsilon < \sum_{A \supset B \in \mathcal{B}_{A,\varepsilon,2}} \mathrm{vol}(B);$$

$P_{C,\varepsilon,1}$ una partición de R tal que la cubierta básica $\mathcal{B}_{C,\varepsilon,1}$ de C correspondiente a esa partición es tal que

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_{C,\varepsilon,1}} \mathrm{vol}(B) < \mathrm{vol}(C) + \varepsilon;$$

$P_{C,\varepsilon,2}$ una partición de R tal que la cubierta básica $\mathcal{B}_{C,\varepsilon,2}$ de C correspondiente a esa partición es tal que

$$\mathrm{vol}(C) - \varepsilon < \sum_{C \supset B \in \mathcal{B}_{C,\varepsilon,2}} \mathrm{vol}(B).$$

Por el lema 7.2, si tomamos un refinamiento común P_ε de las particiones $P_{A,\varepsilon,1}$, $P_{A,\varepsilon,2}$, $P_{C,\varepsilon,1}$ y $P_{C,\varepsilon,2}$, entonces las cubiertas básicas $\mathcal{B}_{A,\varepsilon}$ y $\mathcal{B}_{C,\varepsilon}$ de A y C respectivamente, correspondientes a la partición P_ε son tales que

$$\mathrm{vol}(A) - \varepsilon < \sum_{A \supset B \in \mathcal{B}_{A,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}_{A,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) < \mathrm{vol}(A) + \varepsilon$$

y

$$\mathrm{vol}(C) - \varepsilon < \sum_{C \supset B \in \mathcal{B}_{C,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}_{C,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) < \mathrm{vol}(C) + \varepsilon,$$

teniéndose así que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{B \in \mathcal{B}_{A,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(A) \tag{4}$$

y

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{B \in \mathcal{B}_{C,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(C). \tag{5}$$

Ahora, la partición P_ε es de la forma $P_\varepsilon = ((x_0, \cdots, x_n), (y_0, \cdots, y_m), (z_0, \cdots, z_h))$. Tomemos para cada $k \in \{1, \cdots, h\}$ las colecciones $\mathcal{B}^k_{A,\varepsilon} :=$

$\{[x_i; x_{i-1}]\times[y_j; y_{j-1}]\times[z_k; z_{k-1}] \in \mathcal{B}_{B,\varepsilon}\}$ y $\mathcal{B}^k_{C,\varepsilon} := \{[x_i; x_{i-1}]\times[y_j; y_{j-1}]\times [z_k; z_{k-1}] \in \mathcal{B}_{C,\varepsilon}\}$ (con k fijo), y sea $I^k_\varepsilon := [z_k; z_{k-1}]$. Ahora, para cada $z \in [z_0; z_h]$ definamos al plano Π_z como $\Pi_z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x, y \in \mathbb{R}\}$, y observemos que

$$\sum_{A\supset B\in\mathcal{B}^k_A} \mathrm{vol}(B) \le a(\Pi_{z_k} \cap A)(z_k - z_{k-1}) \le \sum_{B\in\mathcal{B}^k_A} \mathrm{vol}(B) \tag{6}$$

y

$$\sum_{C\supset B\in\mathcal{B}^k_C} \mathrm{vol}(B) \le a(\Pi_{z_k} \cap C)(z_k - z_{k-1}) \le \sum_{B\in\mathcal{B}^k_C} \mathrm{vol}(B). \tag{7}$$

Ahora, por hipótesis tenemos que $a(\Pi_z \cap A) = a(\Pi_z \cap C)$, para todo $z \in \mathbb{R}$. Utilizando este hecho, haciendo $L_\varepsilon := \sum\limits_{k=1}^{h} a(\Pi_{z_k} \cap A)(z_k - z_{k-1})$, y tomando en las desigualdades (6) y (7) la suma desde $k = 1$ hasta $k = h$, obtenemos

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_{A,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) - 2\varepsilon < \sum_{A\supset B\in\mathcal{B}_{A,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) \le L_\varepsilon \le \sum_{B\in\mathcal{B}_{A,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) \tag{8}$$

y

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_{C,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) - 2\varepsilon < \sum_{C\supset B\in\mathcal{B}_{C,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) \le L_\varepsilon \le \sum_{B\in\mathcal{B}_{C,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B). \tag{9}$$

Por lo tanto, de (4), (5), (8) y (9) concluimos que

$$\mathrm{vol}(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{B\in\mathcal{B}_{A,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) = \lim_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{B\in\mathcal{B}_{C,\varepsilon}} \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(C). \quad \blacksquare$$

Teorema 7.13. Principio de Cavalieri. *Sean A y C dos conjuntos con volumen tales que para todo plano Π paralelo a un plano dado Ξ se tiene que los conjuntos $A \cap \Pi$ y $C \cap \Pi$ tienen áreas iguales. El volumen de A es igual al de B.*

Demostración. Este teorema se sigue del lema 7.4 y del teorema 7.10. ∎

Teorema 7.14. *Los paralelepípedos son conjuntos con volumen.*

Demostración. El teorema se sigue del hecho de que cualquier paralelepípedo es la intersección de 3 paralelepípedos rectangulares (los cuales son a su vez cilindros rectos) y de la aplicación de los teoremas 7.1(h) y 7.11. ∎

Teorema 7.15. *Las pirámides con base triangular son conjuntos con volumen.*

Demostración. El teorema se sigue del hecho de que cualquier pirámide con base triangular es la intersección de 4 paralelepípedos rectangulares y de la aplicación de los teoremas 7.1(h) y 7.11. ∎

Corolario 7.15.1. *Las pirámides son conjuntos con volumen.*

Demostración. El teorema se sigue del hecho de que cualquier pirámide es la unión finita de pirámides con base triangular y de los teoremas 7.15 y 7.1(j). ∎

Teorema 7.16. *Cualquier cilindro, cuya base es un conjunto con área, es un conjunto con volumen y su volumen es el área de la base multiplicada por la altura.*

Demostración. Sean B_1 y B_2 las bases de un cilindro D y supongamos que éstas tienen área.

Haremos uso del teorema 20.2 del capítulo I (lo cual es legítimo debido a que en su demostración no se utilizaron los postulados concernientes al concepto de volumen). Sea Π_2 el plano en el que está contenida la base B_2 y l la recta tal que el cilindro D es la unión de segmentos paralelos a l tales que un extremo está en B_1 y el otro en Π_2. Sea $\varepsilon > 0$, Π_1 el plano paralelo a Π_2 tal que $B_1 \subset \Pi_1$ y además sean A_1 y C_1 regiones poligonales contenidas en Π_1 tales que

$$A_1 \subset B_1 \subset C_1$$

y

$$a(C_1) - \varepsilon < a(B_1) < a(A_1) + \varepsilon.$$

Para cada $E \subset \Pi_1$ sea T_E el cilindro que es la unión de segmentos $\overline{PQ}$ paralelos a l con $P \in l$ y $Q \in \Pi_2$. Por el teorema I.20.2 cualquier sección transversal de T_{A_1} es congruente con A_1 y cualquier sección transversal de T_{C_1} es congruente con C_1. Ahora, por el teorema 7.11 y el principio de Cavalieri

$$\operatorname{vol}(T_{A_1}) = a(A_1)h \quad \text{y} \quad \operatorname{vol}(T_{C_1}) = a(C_1)h,$$

donde h es la distancia entre Π_1 y Π_2 (la altura de D), pero como $T_{A_1} \subset D \subset T_{B_1}$, entonces

$$a(B_1)h - \varepsilon h < a(A_1)h \le \operatorname{vol}_*(D) \le \operatorname{vol}^*(D) \le a(C_1)h < a(B_1)h + \varepsilon h,$$

por lo tanto, haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, tenemos que

$$\operatorname{vol}_*(D) = \operatorname{vol}^*(D) = a(B_1)h.$$

∎

Teorema 7.17. *Cualquier cono, cuya base es un conjunto con área, es un conjunto con volumen igual a un tercio del área de la base multiplicada por la altura.*

Antes de demostrar el teorema 7.17 hagamos algunas observaciones y comentarios. Hasta ahora podemos observar que el postulado de la congruencia para volúmenes (postulado 20) es consecuencia del teorema 7.10, el postulado 21 es el teorema 7.1 (i), el postulado 22 (i) equivale al teorema 7.1 (f), el postulado 22 (ii) es el teorema 7.1 (d), el postulado 22 (iii) es consecuencia directa del corolario 7.11.1, el postulado 22 (iv) es parte del teorema 7.1 (j), el postulado 23 es el teorema 7.11, el principio de Cavalieri (postulado 24) es el teorema 7.13. Del postulado 25 solamente hace falta verificar que los conos cuya base es un conjunto con área son conjuntos con volumen, es decir, parte del teorema 7.17, el cual aun no hemos demostrado. Observemos sin embargo, que para la demostración del corolario I.20.6.1 (corolario 20.6.1 del capítulo I) se utiliza el hecho de que las pirámides son conjuntos con volumen, lo cual está establecido en esta sección en el corolario 7.15.1, pero jamás se utilizó el hecho general de que los conos, cuya base es un conjunto con área, es un conjunto con volumen (ni en el corolario I.20.6.1 ni en ninguno de los resultados anteriores a éste) por lo que podemos usar el corolario I.20.6.1 para la demostración del teorema 7.17. Procedamos ahora a demostrar el teorema 7.17.

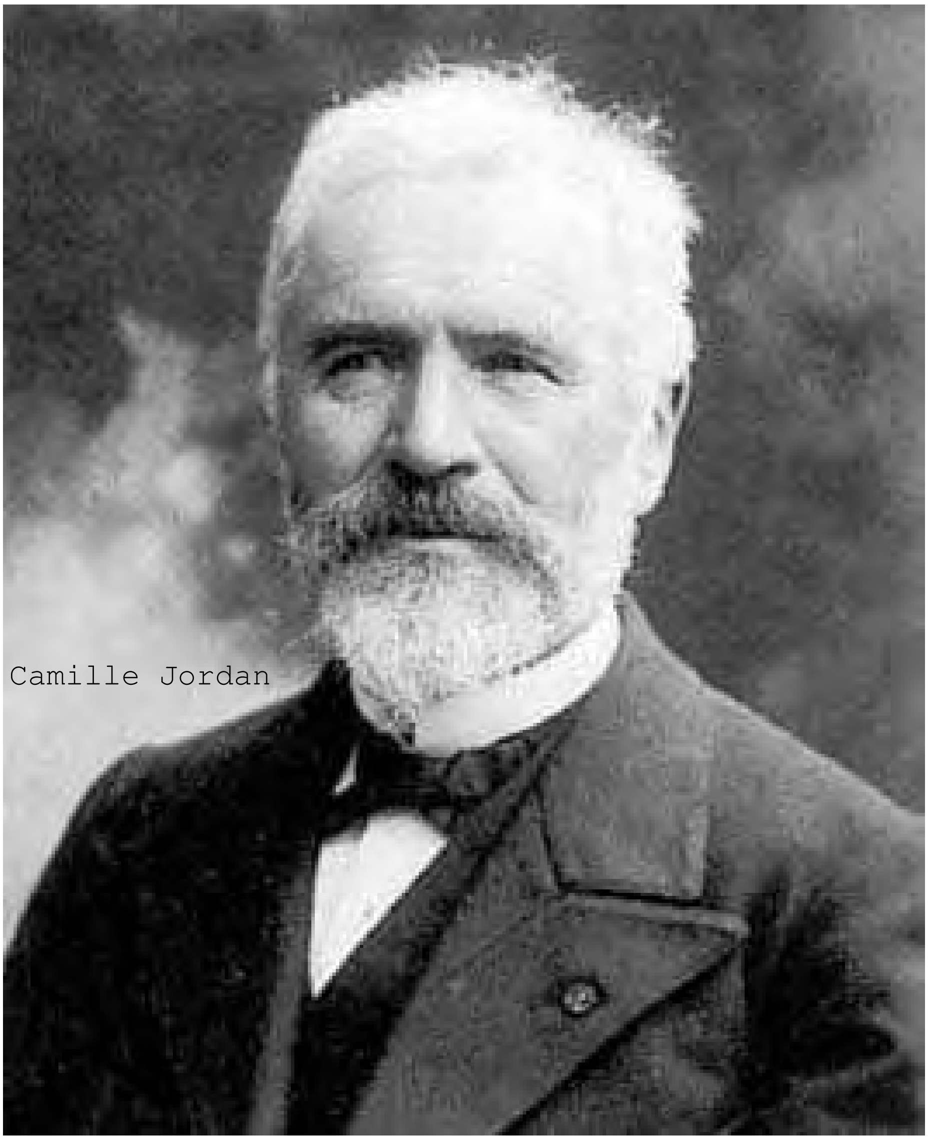
Demostración del teorema 7.17. Sea K un cono cuya base B es un conjunto con área y sea V el vértice del cono K y h su altura. Dado $\varepsilon > 0$ sean A y C regiones poligonales tales que $A \subset B \subset C$ y $a(C) - \varepsilon < a(B) < a(A) + \varepsilon$. Sean ahora J y L las pirámides con vértice V y bases A y C respectivamente. Como $J \subset K \subset L$, por el teorema 7.1(a) y (c) y por el corolario I.20.6.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(a(B) - \varepsilon)h &< \frac{1}{3}a(A)h = \operatorname{vol}(J) \leq \operatorname{vol}_*(K) \\ &\leq \operatorname{vol}^*(K) \leq \operatorname{vol}(L) = \frac{1}{3}a(C)h < \frac{1}{3}(a(B) + \varepsilon)h \end{aligned}$$

y tomando el límite (por la derecha) cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ tenemos que $\operatorname{vol}_*(K) = \operatorname{vol}^*(K) = \frac{1}{3}a(B)h$. ∎

Con la demostración de este último teorema completamos la verificación de la consistencia de los 25 postulados de la geometría elemental. Es decir, con las definiciones de punto, recta, plano, distancia, área y volumen dados en este capítulo se cumplen todos los postulados dados en el capítulo I de la geometría elemental y por lo tanto también todos sus teoremas y corolarios.

Ejercicio 7.1. Demostrar el teorema 7.3.



8. Distancia entre un Punto y un Plano

Supongamos que tenemos un plano Π cuya ecuación está dada por

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde A, B, C y D son constantes y al menos una de las constantes A, B ó C es diferente de cero.

Observemos que los vectores de la forma $t(A, B, C)$ son ortogonales a Π. Sea t_0 el número real tal que $t_0(A, B, C) \in \Pi$, es decir

$$t_0(A^2 + B^2 + C^2) = -D.$$

Como la recta $\{(x, y, z) : \ x = tA, y = tB \text{ y } z = tC \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}$ es perpendicular al plano Π y pasa por $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, entonces $t_0(A, B, C)$ es el punto más cercano del plano Π al origen $\mathbf{0}$. Es decir, el punto de Π más cercano al origen $\mathbf{0}$ es $\frac{-D}{A^2+B^2+C^2}(A, B, C)$ y la distancia del plano Π al origen $\mathbf{0}$ es la norma de $\frac{-D}{A^2+B^2+C^2}(A, B, C)$, es decir es $\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Para hallar la distancia entre el plano Π y un punto cualquiera $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, observemos (por medio de una traslación) que es la misma que la distancia entre el origen $\mathbf{0}$ y el plano con ecuación

$$A(x + x_0) + B(y + y_0) + C(z + z_0) + D = 0$$

o equivalentemente

$$Ax + By + cZ + (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

por lo tanto la distancia entre Π y P_0 es

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 8.1. *La distancia entre el plano* $\{(x, y, z) : \ Ax + By + Cz + D = 0\}$ *y el punto* (x_0, y_0, z_0) *está dada por*

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ejemplo 1. La distancia entre el plano cuya ecuación es $3x+2y+6z = 1$ y el punto $(1, 0, 3)$ es

$$\frac{|3(1) + 2(0) + 6(3) - 1|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{20}{\sqrt{46}} = \frac{20\sqrt{46}}{46} = \frac{10}{23}\sqrt{46} \approx 2.9488.$$

Ejemplo 2. Hallar la distancia entre los planos cuyas ecuaciones son $2x + y - 7z + 3 = 0$ y $2x + y - 7z - 2 = 0$.

Solución. Observemos que los dos planos son paralelos y que la distancia entre ellos es igual a la distancia entre uno de los planos y cualquier punto del otro plano, por ejemplo la distancia entre el plano cuya ecuación es $2x + y - 7z + 3 = 0$ y el punto $(0, 2, 0)$, es decir

$$\frac{|2+3|}{\sqrt{4+1+49}} = \frac{|5|}{\sqrt{54}} = \frac{5}{3\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{18} \approx 0.6804.$$

En general tenemos el siguiente corolario.

Corolario 8.1.1. *La distancia entre dos planos cuyas ecuaciones son* $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ *y* $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ *es*

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Demostración. Tomemos un punto cualquiera (x_0, y_0, z_0) que satisfaga la ecuación $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ es decir tal que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D_2$. La distancia entre el plano con ecuación $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y el plano con ecuación $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ es la distancia entre el plano con ecuación $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y el punto (x_0, y_0, z_0), la cual por el teorema 8.1 está dada por $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, pero este último número es igual a $\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. ∎

9. El Producto Vectorial

En esta sección definiremos en $\mathbb{R}^3$ una operación que tiene propiedades geométricas importantes y es muy útil en las aplicaciones a la mecánica. Como de costumbre, en esta sección los símbolos $\mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{\imath}}$, $\hat{\mathbf{\jmath}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ denotarán a los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ respectivamente.

Definición 9.1. Sean $u = a_1\hat{\mathbf{\imath}} + a_2\hat{\mathbf{\jmath}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ y $v = b_1\hat{\mathbf{\imath}} + b_2\hat{\mathbf{\jmath}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$ dos vectores es $\mathbb{R}^3$ (donde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$). Definimos el **producto vectorial** o **producto cruz** de u con v, el cual se denota $u \times v$ o bien $[u, v]$, como

$$u \times v := (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\mathbf{\imath}} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{\mathbf{\jmath}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\mathbf{k}}.$$

Ejercicio 9.1. Verificar que son válidas las siguientes propiedades para todo $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tales propiedades serán utilizadas en lo sucesivo.

$$\hat{\mathbf{\imath}} \times \hat{\mathbf{\jmath}} = \hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{\jmath}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{\imath}} \text{ y } \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{\imath}} = \hat{\mathbf{\jmath}}; \qquad \hat{\mathbf{\imath}} \times \hat{\mathbf{\imath}} = \hat{\mathbf{\jmath}} \times \hat{\mathbf{\jmath}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0};$$

$$(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v); \quad u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w);$$

$$(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w); \quad u \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times u = \mathbf{0}, \quad \text{y}$$

$$v \times u = -(u \times v);$$

El concepto de producto vectorial fue introducido por primera vez por el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) después de trabajar con los cuaternios (una generalización de los números complejos).

Teorema 9.1. *Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, entonces los vectores u y $u \times v$ son ortogonales.*

Demostración. Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tales que $u = a_1\hat{\mathbf{\imath}} + a_2\hat{\mathbf{\jmath}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ y $v = b_1\hat{\mathbf{\imath}} + b_2\hat{\mathbf{\jmath}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$, por definición tenemos que

$$\begin{aligned} u\cdot(u\times v) &= (a_1\hat{\mathbf{\imath}}+a_2\hat{\mathbf{\jmath}}+a_3\hat{\mathbf{k}})\cdot((a_2b_3-a_3b_2)\hat{\mathbf{\imath}}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{\mathbf{\jmath}}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{\mathbf{k}}) \\ &= (a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3) + (a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto u y $u \times v$ son ortogonales. ∎

Corolario 9.1.1. *Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, entonces los vectores v y $u \times v$ son ortogonales.*

Demostración. Por el teorema 9.1 tenemos que $v\cdot(u\times v) = v\cdot(-(v\times u))$ $= -(v\cdot(v\times u)) = -0 = 0$, por lo tanto v y $u\times v$ son ortogonales. ∎

Teorema 9.2. *Si $u \in \mathbb{R}^3$, entonces $u\times u = \mathbf{0}$.*

Demostración. Sean $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $u = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$. Tenemos por definición $u\times u = (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}) \times (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}})$ $= (a_2a_3 - a_3a_2)\hat{\mathbf{i}} + (a_3a_1 - a_1a_3)\hat{\mathbf{j}} + (a_1a_2 - a_2a_1)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$. ∎

Corolario 9.2.1. *Si $u \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces $u\times tu = \mathbf{0}$.*

Demostración. Tenemos que $u\times tu = t(u\times u) = t\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ∎

Teorema 9.3. *Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ y θ es la medida del ángulo $\angle u\mathbf{0}v$, entonces*

$$|u\times v| = |u||v|\operatorname{sen}\theta.$$

Demostración. Sea $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$, tenemos

$$|u||v|\operatorname{sen}\theta = |u||v|\sqrt{1-(\cos\theta)^2} = |u||v|\sqrt{1-\frac{(u\cdot v)^2}{|u|^2|v|^2}}$$

$$= \sqrt{|u|^2|v|^2 - (u\cdot v)^2}$$

$$= \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}$$

$$= \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_1b_3-a_3b_1)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2} = |u\times v|.$$ ∎

Corolario 9.3.1. *Dado un paralelogramo $\square ABCD$, el área de la región determinada por tal paralelogramo es $|(A-B)\times(C-B)|$.*

Demostración. Sea θ la medida del ángulo $\angle ABC$ y tomemos al lado $\overline{AB}$ como base del paralelogramo $\square ABCD$, la altura correspondiente a tal base es $|C-B|\operatorname{sen}\theta$ por lo que el área de la región determinada por el paralelogramo es $|A-B||C-B|\operatorname{sen}\theta$. Observando que θ es la medida del ángulo $\angle(A-B)\mathbf{0}(C-B)$ y aplicando el teorema 9.3, tenemos que el área de la región determinada por $\square ABCD$ es igual a $|(A-B)\times(C-B)|$. ∎

Teorema 9.4. *Sea V el vértice de un paralelepípedo y sean además $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ y $\overline{VR}$ aristas diferentes del paralelepípedo (las adyacentes al vértice V). El volumen del paralelepípedo es*

$$|(R-V)\cdot((Q-V)\times(P-V))|.$$

Demostración. Tomemos como base del paralelepípedo a la región que contiene las aristas $\overline{VP}$ y $\overline{VQ}$, la cual, por el corolario 9.3.1, tiene área $|(P-V)\times(Q-V)|$. Ahora, por el teorema 9.1 y el corolario 9.1.1, el vector $(P-V)\times(Q-V)$ es ortogonal al plano que contiene a la base. Sea $\vec{\mathbf{u}}$ un vector unitario ortogonal a la base. Por el teorema 5.6, la altura del paralelepípedo es $|(R-V)\cdot\vec{\mathbf{u}}|$, por lo que el volumen del paralelepípedo es

$$\begin{aligned}|(P-V)\times(Q-V)||(R-V)\cdot\vec{\mathbf{u}}| &= |(R-V)\cdot|(P-V)\times(Q-V)|\vec{\mathbf{u}}|\\ &= |(R-V)\cdot|(P-V)\times(Q-V)|(-\vec{\mathbf{u}})|,\end{aligned}$$

pero $(Q-V)\times(P-V) = |(P-V)\times(Q-V)|\vec{\mathbf{u}}$ o bien $(Q-V)\times(P-V) = |(P-V)\times(Q-V)|(-\vec{\mathbf{u}})$, por lo tanto el volumen del paralelepípedo es $|(R-V)\cdot((Q-V)\times(P-V))|$. ∎

Como aplicación a la mecánica del producto cruz tenemos que si $\vec{\mathbf{F}}$ es un vector que representa la fuerza que se aplica en el punto P de una palanca con apoyo en un punto Q, entonces el momento está dado por $M := (P-Q)\times\vec{\mathbf{F}}$. El momento mide la tendencia a que la palanca gire alrededor del punto de apoyo Q, más precisamente alrededor del rayo $\overrightarrow{Q(Q+M)}$ (en sentido contrario a las manecillas del reloj, donde el observador está en el punto $Q+M$ viendo hacia el punto Q). Cuando se aplican varias fuerzas a diferentes palancas con un punto común de apoyo Q, el momento resultante es la suma de los momentos. Esto último describe con notación moderna lo que el sabio griego Arquímedes dijo en su máxima: *"Dadme una palanca, un punto de apoyo y moveré el mundo"*.

10. Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados en $\mathbb{R}^3$

En esta sección estudiaremos los conceptos de conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la distancia definida en este capítulo.

Definición 10.1. Sea $Q \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$, al conjunto $B(Q,r) := \{P \in \mathbb{R}^3 : \ |P - Q| < r\}$ se le llama **bola abierta** o simplemente **bola** con **centro** en Q y **radio** r. Es decir la bola con centro en Q y radio r es el interior del cuerpo esférico con centro en Q y radio r.

Definición 10.2. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ se dice que es **abierto** si es la unión de una familia de bolas abiertas.

Como ejemplos conjuntos abiertos podemos citar a $\varnothing$, $\mathbb{R}^3$ y cualquier bola abierta.

Ejercicio 10.1. Demostrar que $\varnothing$, $\mathbb{R}^3$, cualquier bola y cualquier semiespacio son conjuntos abiertos.

Definición 10.3. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$, un punto $Q \in A$ es un **punto interior** al conjunto A si existe un $r > 0$ tal que $B(Q,r) \subset A$. Al conjunto de todos los puntos interiores al conjunto A se le llama el **interior** de A. Al conjunto de todos los puntos Q tales que para todo $r > 0$ la bola $B(Q,r)$ tiene elementos en A y elementos que no están en A se le llama la **frontera** de A y se le denota a veces por ∂A. El **exterior** del conjunto A es el conjunto de puntos que no están en el interior ni en la frontera de A.

Ejercicio 10.2. Demostrar que el interior y el exterior de cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ son conjuntos abiertos.

Teorema 10.1. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ es abierto si y sólo si $(\partial A) \cap A = \varnothing$.*

Demostración. Si A es abierto, entonces por definición de conjunto abierto y de frontera tenemos que $Q \in A \Longrightarrow Q \notin \partial A$, por lo tanto $(\partial A) \cap A = \varnothing$. Ahora, si $(\partial A) \cap A = \varnothing$, entonces el hecho de que $Q \in A$ implica que existe un $r > 0$ tal que $B(Q,r)$ está contenida en A o en $\mathbb{R}^3 \backslash A$, pero $B(Q,r)$ no puede estar contenida en $\mathbb{R}^3 \backslash A$ ya que $Q \in B(Q,r)$, por lo cual $B(Q,r)$ está contenida en A, es decir A es abierto. ∎

Definición 10.4. Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ es **cerrado** cuando $\partial A \subset A$.

Teorema 10.2. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ es cerrado si y sólo si $\mathbb{R}^3 \backslash A$ es abierto.*

Demostración. De la definición de frontera se sigue que $\partial A = \partial(\mathbb{R}^3\backslash A)$. Si $\mathbb{R}^3\backslash A$ es abierto, entonces, por el teorema 10.1, $\partial A = \partial(\mathbb{R}^3\backslash A) \subset A$, es decir A es cerrado. Si A es cerrado, entonces $\partial(\mathbb{R}^3\backslash A) = \partial A \subset A$ y de nuevo por el teorema 10.1 tenemos que $\mathbb{R}^3\backslash A$ es abierto. ∎

Teorema 10.3. *La unión de una familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos abiertos incluidos en $\mathbb{R}^3$. Si $x \in \bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A$, sea A_x un elemento de la familia $\mathcal{F}$ tal que $x \in A_x$ y tomemos una bola B_x con centro en x que esté contenida en A_x. Observando que $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A = \bigcup\limits_{x\in\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A} B_x$ tenemos que $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A$ es abierto. ∎

Teorema 10.4. *La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ una familia finita de conjuntos abiertos. Para cada $x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ y cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sea $r_{k,x} > 0$ tal que $B(x, r_{k,x}) \subset A_k$. Tomando $r_x = \text{mín}\{r_{1,x}, r_{2,x}, \cdots, r_{n,x}\}$ y observando que $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcup\limits_{x\in\bigcap_{k=1}^n A_k} B(x, r_x)$, tenemos por el teorema 10.3 que $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ es abierto. ∎

Como consecuencia de los teoremas 10.2 y 10.3 tenemos el teorema que sigue.

Teorema 10.5. *La intersección de una familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Ejercicio 10.3. Demostrar con detalle el teorema 10.5.

Teorema 10.6. *La unión de una familia finita de conjuntos cerrados es un conjunto abierto.*

Demostración. Sean $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ una familia finita de conjuntos cerrados. Tenemos que $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n = (\mathbb{R}^3\backslash C_1) \cap (\mathbb{R}^3\backslash C_2) \cap \cdots \cap (\mathbb{R}^3\backslash C_n)$, por lo que debido a los teoremas 10.2 y 10.4 se tiene que $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$ es cerrado. ∎

Ejercicio 10.4. Demostrar que cualquier subconjunto finito de $\mathbb{R}^3$ es un conjunto cerrado.

Definición 10.5. Dado un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, decimos que un subconjunto A de S es **abierto** en S si es la intersección de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ con S. Decimos que un conjunto C es **cerrado** en S si el conjunto $S\backslash C$ es abierto en S. Observemos que cuando no digamos donde un conjunto es abierto o cerrado nos referimos a que es abierto o cerrado en $\mathbb{R}^3$.

Podemos ver por ejemplo que un semiplano es un conjunto abierto en el plano que lo contiene pero no es abierto en $\mathbb{R}^3$.

Definición 10.7. Un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ se dice que es **inconexo** cuando existen dos conjuntos abiertos no vacíos A_1 y A_2 tales que $S = (S \cap A_1) \cup (S \cap A_2)$. Un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es **conexo** cuando no es inconexo.

Ejercicio 10.5. Dar ejemplos de conjuntos conexos y de conjuntos inconexos.

Ejercicio 10.6. Demostrar que si $S \subset \mathbb{R}^3$ es tal que $S = S_1 \cup S_2$, donde $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ y $\partial S_1 \cap \partial S_2 = \varnothing$, entonces S es inconexo.

11. Euclides y Hilbert

Euclides fue un geómetra griego que vivió en Alejandría alrededor de 300 años antes de Cristo, posterior a Platón y anterior a Arquímedes. Escribió una serie de 13 libros de geometría llamados "Los Elementos", que por muchos siglos fueron el medio para aprender geometría y practicar el método deductivo. Aun en nuestros días los textos de geometría están inspirados en Los Elementos de Euclides. Las demostraciones de Euclides se basan en 5 postulados y 5 axiomas o nociones del sentido común. Algunos de los conceptos básicos de la geometría, Euclides los definía usando sinónimos. Los axiomas que estableció Euclides fueron los siguientes:

(1) *Cosas que son iguales a una misma cosa son iguales entre sí.*

(2) *Si a iguales se le suman iguales, entonces las sumas son iguales.*

(3) *Si a iguales se le restan iguales, entonces las restas son iguales.*

(4) *Cosas que se superponen la una a la otra son iguales entre sí.*

(5) *El todo es mayor que la parte.*

A continuación enunciaremos los 5 postulados de Euclides, dando una interpretación más precisa, y haciendo una comparación con nuestro sistema de postulados.

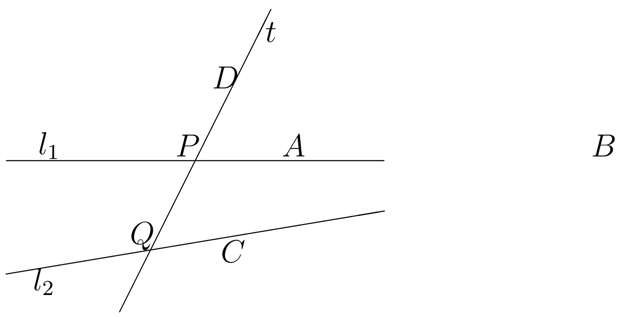
(1) *Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto.* En términos específicos es nuestro postulado de la recta (postulado 3).

(2) *Toda recta se puede prolongar indefinidamente.* Esto significa que todo segmento está incluido en una recta. Lo cual es consecuencia de la definición de segmento (definición 2.2 del capítulo I).

(3) *Con cualquier centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo.* Esto se traduce en que dado un plano Π, un punto $O \in \Pi$ y un número positivo r que es la distancia entre dos puntos, la circunferencia incluida en Π con centro en O y radio r existe y es única. Esto se sigue del postulado 5 y del teorema de localización de puntos (Teorema 2.2 del capítulo I).

(4) *Todos los ángulos rectos son iguales.* Esto quiere decir que todos los ángulos rectos son congruentes. Así, este postulado se sigue de las definiciones de ángulo recto y de congruencia de ángulos (definiciones 8.10 y 8.12 del capítulo I).

(5) *Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos recta prolongadas indefinidamente se encontrarán en la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.* Esto en lenguaje formal significa que dadas dos rectas diferentes l_1 y l_2 que son cortadas por una secante t en los puntos P y Q respectivamente, y dados dos puntos $A \in l_1$ y $B \in l_2$ del mismo lado de t, tales que $\measuredangle APQ + \measuredangle PQC < 180°$, entonces existe un punto B en el cual se cortan las rectas l_1 y l_2, además B está del mismo lado de t que A y C. Esto es consecuencia del corolario 13.6.2 y del teorema 13.7 del capítulo I.



David Hilbert fue un matemático alemán que nació en Königsberg en 1862. Hizo grandes aportaciones al análisis matemático y fundamentos de las matemáticas, entre lo que destaca su obra "Grundlagen der Geometrie" (Fundamentos de Geometría) en donde formalizó las ideas de Euclides llevando a cabo un análisis exhaustivo de ellas, mediante la formulación de sus cinco grupos de axiomas.

Hilbert hace énfasis en que los métodos deductivos deben ser puramente simbólicos, sin recurrir a dibujos ni representaciones gráficas.

Hilbert falleció en Gotinga en 1943, importante centro de contribución en el desarrollo de las matemáticas, donde fue profesor durante la mayor parte de su vida.

En el sistema axiomático que Hilbert hace de la geometría, los términos no definidos son los de 'punto', 'recta', 'plano', 'pertenecer', 'entre' y 'congruente'. A continuación enunciaremos los 5 grupos de axiomas que aparecen en su libro Fundamentos de Geometría, haciendo una comparación con nuestro sistema de postulados.

I. **Axiomas de pertenencia.**

I.1. *Dados dos puntos A y B existe una recta a la cual pertenecen.*

I.2. *Dados dos puntos A y B no existe más de una recta a la cual pertenecen.*

Estos dos primeros axiomas son nuestro postulado 3.

I.3. *Existen al menos dos puntos en una recta. Existen al menos tres puntos que no están en una recta.*

La primera afirmación de este axioma es el teorema 1.1 del capítulo I. La segunda se sigue de los postulados 5 y 6.

I.4. *Dados tres puntos no alineados A, B y C existe un plano al cual pertenecen. Dado un plano, existe un punto que está en el plano.*

I.5. *Dados tres puntos no alineados A, B y C no existe más de un plano al cual pertenecen.*

La primera afirmación del axioma I.4, junto con el axioma I.5 son consecuencia del postulado 6. La segunda afirmación del axioma I.4 se sigue del postulado 5 (i).

I.6. *Si dos puntos A y B en una recta l están en un plano, entonces todo punto de la recta l pertenece al plano.*

El axioma I.6 es el teorema de llaneza (teorema 3.2 del capítulo I).

I.7. *Si dos planos tienen en común un punto A, entonces tienen al menos otro punto B.*

Este axioma es consecuencia de los postulados 4 y 7.

I.8. *Existen al menos cuatro puntos que no están en un plano.*

Este axioma es nuestro postulado 5 (i).

II. **Axiomas de orden.** Estos axiomas fueron estudiados por primera vez en detalle por M. Pasch en 1882.

II.1. *Si un punto B está entre un punto A y un punto C, entonces los tres puntos son diferentes y están en una misma recta, y el punto B también está entre C y A.*

Este axioma se sigue de la definición de punto entre (definición 2.1 del capítulo I).

II.2. *Dados dos puntos A y C, existe siempre al menos un punto B en $\overleftrightarrow{AC}$ tal que B está entre A y C.*

Este axioma se sigue del teorema del punto medio (teorema 2.4).

II.3. *Dados tres puntos en una recta, uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos.*

Este axioma se deduce del teorema 2.1.

II.4. *Dados tres puntos no alineados A, B y C en un plano Π y dada una recta l incluida en Π, a la cual no pertenece ninguno de los puntos A, B, C. Si la recta l corta al segmento $\overline{AB}$, entonces también corta al segmento $\overline{AC}$ o al segmento $\overline{BC}$.*

Este axioma se sigue del postulado de la separación del plano (postulado 8) al observar que si la recta l no cortara ni a $\overline{AC}$ ni a $\overline{BC}$, entonces C estaría del mismo lado que A y que B de l, pero esto es imposible puesto que A y B están en lados opuestos de l. Al axioma II.4 se le conoce como **axioma de Pasch**.

III. **Axiomas de congruencia.**

III.1. *Si A y B son dos puntos diferentes en una recta l, y A' pertenece a l', entonces existe B' en l' tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.*

Este axioma se deduce del teorema 2.2 y de la definición de congruencia de segmentos (definición 2.4).

III.2. *Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{A''B''}$.*

Este axioma es inmediato de la definición de congruencia de segmentos (definición 2.4 del capítulo I).

III.3. *Supongamos que en una recta l están incluidos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, donde el único punto en común de tales segmentos es el punto B. Por otro lado, supongamos que en una recta l' están incluidos los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$, donde el único punto en común de tales segmentos es el punto B'. Supongamos además que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Entonces, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*

Este axioma se puede demostrar observando que B tiene que estar entre A y C y que B' tiene que estar entre A' y B' y de las definiciones de congruencia y punto entre (definiciones 2.4 y 2.1 del capítulo I).

III.4. *Si $\angle ABC$ es un ángulo y si $\overrightarrow{B'C'}$ es un rayo, entonces para cada lado L de la recta $\overleftrightarrow{B'C'}$ existe un único rayo $\overrightarrow{B'A'}$, con $A' \in L$, tal que $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$. Todos los puntos que están en el interior del ángulo $\angle A'B'C'$ están del mismo lado* *de* $\overleftrightarrow{B'C'}$ *que* A'. *Además todo ángulo es congruente con sí mismo.*

La primera parte de este axioma es el postulado de construcción de ángulos (postulado 13), la segunda parte proviene de la definición de interior de un ángulo (definición 5.3 del capítulo I) y la tercera parte proviene de la definición de congruencia de ángulos (definición 8.12 del capítulo I).

III.5. *Si para dos triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle A'B'C'$ *se tienen las congruencias* $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ *y* $\angle BAC \cong B'A'C'$, *entonces también se tiene la congruencia* $\angle ABC \cong A'B'C'$.

Este axioma es una consecuencia directa de nuestro postulado LAL (postulado 14).

IV. **Axioma de paralelismo.**

IV.1. *Sea* l *una recta y* A *un punto que no está en* l. *Existe a lo más una recta en el plano en que están* A *y los puntos en* l *que pasa por* A *y no corta a* l.

Este axioma se sigue del postulado de las paralelas (postulado 15). Al axioma IV.1 se le conoce como **axioma de Playfer**, aunque también se le conoce como **axioma de Euclides**.

V. **Axiomas de continuidad.**

V.1. *Si* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *son dos segmentos cualesquiera, entonces existe un número* n *(entero positivo) tal que* n *copias de* $\overline{CD}$ *construidas contiguamente desde* A *a lo largo del rayo* $\overrightarrow{AB}$ *irán más allá del punto* B.

El significado de este axioma es que para algún entero positivo n existen n puntos diferentes $E_1, E_2, \ldots, E_n$ pertenecientes al rayo $\overrightarrow{AB}$, tales que $\overline{CD} \cong \overline{AE_1} \cong \overline{E_1E_2} \cong \cdots \cong \overline{E_{n-1}E_n}$, el punto E_1 está entre A y E_2, el punto E_2 entre E_1 y E_3, y así sucesivamente E_{n-1} está entre E_{n-2} y E_n, pero además B está entre A y E_n. Así, este axioma es consecuencia del teorema de localización de puntos (teorema 2.2 del capítulo I) y de la propiedad arquimediana de los números reales (teorema 1.4 del apéndice I). Al axioma V.1 se le conoce como **axioma de Arquímedes**.

V.2. *Una extensión de un conjunto de puntos sobre una recta con sus relaciones de orden y congruencia existentes entre los elementos originales además de las propiedades fundamentales de orden de recta y congruencia que se siguen de los axiomas I-III, y del axioma V.1 es imposible.*

El significado de este último axioma es que si tenemos una recta l y un conjunto de puntos $\hat{l} \supset l$ que satisface los axiomas I, II, III y el axioma V.1 para las recta, entonces $\hat{l} = l$. La verificación de V.2 no es tan inmediata como las anteriores. Para verificar la validez de este axioma utilizaremos información del apndice I como son el axioma del supremo y el teorema del ínfimo. Sean A y B dos puntos diferentes de la recta $l \subset \hat{l}$ y supongamos que $\hat{l}$ satisface los axiomas I, II, III y el axioma V.1 para las recta, es decir tiene las propiedades de recta descritas en los axiomas de Hilbert (con la posible excepción del axioma IV.1).

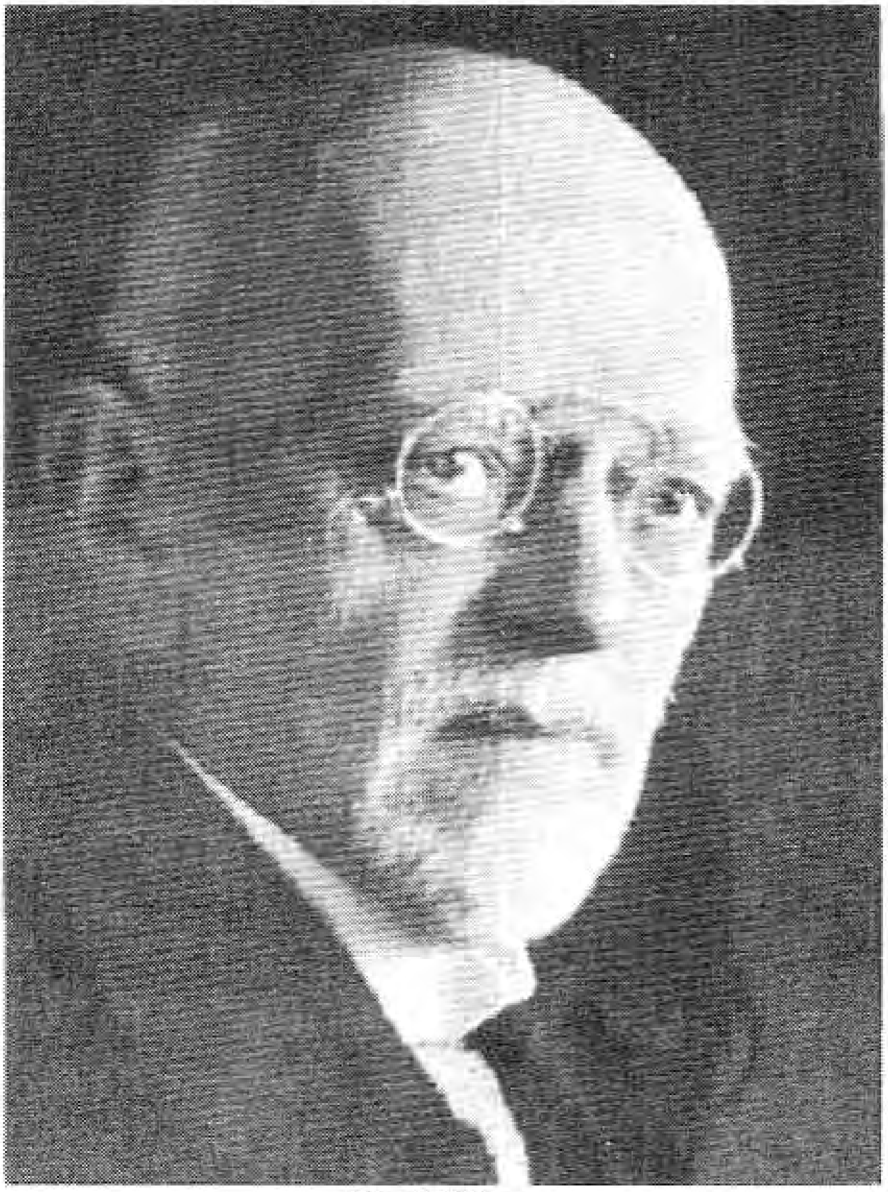
Supongamos que $C \in \hat{l} \backslash l$. Del axioma de Arquímedes se deduce que existe un punto $D \in l$ tal que C está entre A y D. Tomando el sistema de coordenadas de la recta l tal que al punto A le haga corresponder el cero y al punto D un número positivo, tenemos que los conjuntos $s_1 = \{E \in \overline{AD} \cap l : E = A$ ó E está entre A y $C\}$ y $s_2 = \{E \in \overline{AD} \cap l : E = D$ ó E está entre C y $D\}$ son disjuntos, no vacíos y su unión es $\overline{AD} \cap l$. Tomemos ahora los subconjuntos de números reales $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x$ es una coordenada de un elemento de $s_1\}$ y $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : x$ es una coordenada de un elemento de $s_2\}$ los cuales también son disjuntos y no vacíos, además de ser acotados y tener la propiedad de que si $x \in S_1$ y $y \in S_2$, entonces $x < y$, por lo que $\sup S_1 \leq \operatorname{ínf} S_2$. Si tuviéramos que $\sup S_1 < \operatorname{ínf} S_2$, entonces los puntos cuyas coordenadas son $\sup S_1$ y $\operatorname{ínf} S_2$ serían diferentes y entre ellos habría elementos de $\overline{AD} \cap l$ que no estaría ni en s_1, ni en s_2, lo que contradice el hecho de que $s_1 \cup s_2 = \overline{AD} \cap l$. Por lo tanto $\sup S_1 = \operatorname{ínf} S_2$ y llamémosle a ese valor común C', el cual es un elemento de l que está entre A y D. Como $s_1 \cup s_2 = \overline{AD} \cap l$, tenemos que $C' \in s_1$ ó $C' \in s_2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $C' \in s_1$. En este caso tenemos que C está entre C' y D, y por la forma como se obtuvo C', tenemos que ningún elemento de $\hat{l}$ que esté entre C' y C podrá estar en l. Ahora, por el axioma V.1, existe un número natural n y n elementos E_1, E_2, $\ldots$, E_n de $\hat{l}$ tales que $\overline{C'C} \cong \overline{AE_1} \cong \overline{E_1E_2} \cong \cdots \cong \overline{E_{n-1}E_n}$, y además C' está entre A y E_n, tomemos a n de tal manera que sea el menor entero positivo con esta propiedad. Sea k el primer entero positivo tal que existen puntos de l entre A y E_k. Si entre A y E_k sólo hay un elemento $F \in l$, entonces estamos en contradicción con el axioma II.2, por lo tanto entre A y E_k hay más de un elemento de l, y además esos elementos deben estar en el segmento $\overline{E_{k-1}E_k}$.

Nos detendremos para demostrar a partir de los axiomas de Hilbert (diferentes del IV.1 y del V.2) dos propiedades intuitivamente evidentes, pero que no los contemplan los axiomas de Hilbert, y serán de utilidad en la verificación del axioma V.2. La primera propiedad es que si un segmento está incluido en otro diferente, entonces estos segmentos no son congruentes. Veamos primero que si Q está entre P y R, entonces $\overline{PQ}$ no es congruente con $\overline{PR}$. Si $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ entonces, al tomar un punto T que no esté en la recta $\overleftrightarrow{PR}$, tendríamos por el axioma III.5 que $\angle PTQ \cong \angle PTR$, lo cual contradice al axioma III.4. Supongamos ahora que U y Q son dos puntos diferentes entre los puntos P y R, con Q entre P y U, y veamos que los segmentos $\overline{UQ}$ y $\overline{PR}$ no son congruentes. Si los segmentos $\overline{UQ}$ y $\overline{PR}$ fueran congruentes, por el axioma V.1, podríamos tomar un punto V tal que R esté entre U y V, y además $\overline{PQ} \cong \overline{RV}$, pero por el axioma III.3 tendríamos que $\overline{PU} \cong \overline{PV}$, lo cual, por lo ya demostrado es imposible.

La siguiente propiedad que demostraremos es algo parecido al axioma III.3. Demostraremos que si Q es un punto entre P y R, Q' es un punto entre P' y R', pero además $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ y $\overline{PR} \cong \overline{P'R'}$, entonces $\overline{QR} \cong \overline{Q'R'}$. En efecto, si $\overline{QR}$ no fuera congruente con $\overline{Q'R'}$, tendríamos un punto $V' \neq R$ en el rayo $\overrightarrow{Q'R'}$ tal que $\overline{QR} \cong \overline{Q'V'}$, pero por el axioma III.3 se tendría que $\overline{P'V'} \cong \overline{PR} \cong \overline{P'R'}$, y por el axioma III.2 $\overline{P'V'} \cong \overline{P'R'}$, lo cual está en contradicción con lo demostrado en el párrafo anterior. De este modo, si Q es un punto entre P y R, Q' es un punto entre P' y R', pero además $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ y $\overline{PR} \cong \overline{P'R'}$, entonces $\overline{QR} \cong \overline{Q'R'}$.

Volvamos a nuestros conjuntos l y $\hat{l}$, donde supusimos que $\hat{l}$ es una extensión de l y llegamos a que en el segmento de $\hat{l}$ denotado $\overline{E_{k-1}E_k}$ hay al menos dos puntos F_1, F_2 de l diferentes entre sí y diferentes de E_k, y además $\overline{E_{k-1}E_k} \cong \overline{C'C}$, donde $\overline{C'C} \cap l = \{C'\}$. En el rayo $\overrightarrow{C'C}$ debe haber un punto P tal que $\overline{C'P} \cong \overline{F_1F_2}$, y por la estructura que tiene el conjunto l, tenemos que $P \in l$, de modo que C debe estar entre C' y P. Sea ahora G tal que F_2 está en $\overrightarrow{F_1G}$, y tal que $\overline{F_1G} \cong \overline{C'C}$. Tenemos que $G = F_1$, G está entre F_1 y F_2, o bien F_2 está entre G y F_1. Si $G = F_1$ o si G está entre F_1 y F_2, entonces se contradice con el hecho de que un segmento no puede ser congruente con otro en el cual está incluido. Si F_2 está entre G y F_1, entonces en el rayo opuesto al rayo $\overrightarrow{PC'}$ se puede tomar un punto H tal que $\overline{PH} \cong \overline{F_2G}$, de modo que por el axioma III.3 tendríamos que $\overline{C'H} \cong \overline{F_1G} \cong \overline{C'C}$, y por el axioma III.2 $\overline{C'H} \cong \overline{C'C}$, lo cual también es imposible ya que $\overline{C'C} \subset \overline{C'H}$ y $H \notin \overline{C'C}$. De esta manera concluimos que la extensión de la recta es imposible.

El axioma V.2 se conoce como **axioma de completez de la recta**.



David Hilbert

APÉNDICE I. AXIOMA DEL SUPREMO

1. Conjuntos Acotados

DEFINICIÓN 1.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que A es **acotado superiormente** si existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$, se tiene que $a \leq x$. Al número x se le llama **cota superior** de A. Decimos que A es **acotado inferiormente** si existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$, se tiene que $r \leq a$. Al número r se le llama **cota inferior** de A. Si A es acotado superiormente y acotado inferiormente se dice que es **acotado**.

Ejemplos.

1. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un conjunto acotado inferiormente.

2. El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \ 4/3 < x \leq 6\}$ es acotado.

3. El conjunto de números negativos es acotado superiormente pero no es acotado inferiormente.

4. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es acotado superiormente ni acotado inferiormente.

DEFINICIÓN 1.2. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que x es el **máximo** de A si $x \in A$ y es cota superior de A, es decir, si $x \in A$ y para todo $a \in A$ se tiene que $a \leq x$. De la misma manera decimos que r es el **mínimo** de A si $r \in A$ y es cota inferior de A; es decir si $r \in A$ y para todo $a \in A$ se tiene que $r \leq a$.

Observemos que para que un conjunto tenga máximo es necesario que sea acotado superiormente aunque esto no es suficiente.

Ejemplos.

5. El mínimo de $\mathbb{N}$ es el número 1 y $\mathbb{N}$ no tiene máximo.

6. El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{4}{3} < x \leq 6\}$ no tiene mínimo aunque es acotado inferiormente (podría pensarse que el mínimo es $\frac{4}{3}$, pero $\frac{4}{3}$ no pertenece al conjunto). Tal conjunto tiene como máximo a 6.

7. El conjunto de números negativo es acotado superiormente, aunque no tiene máximo (podría pensarse que 0 es el máximo, pero 0 no es negativo).

8. El conjunto $\mathbb{Q}$ no tiene ni máximo ni mínimo por no ser acotado ni superiormente ni inferiormente.

Si x es el máximo de A, entonces escribimos $x = \text{máx}\, A$ y si r es el mínimo de A, entonces escribimos $r = \text{mín}\, A$.

Teorema 1.1. *Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces A tiene a lo más un máximo.*

Demostración. Supongamos que x_1 y x_2 son máximos de A. Entonces $x_1 \leq x_2$ y $x_2 \leq x_1$ y por la propiedad de tricotomía $x_1 = x_2$. ∎

Similarmente se tiene el siguiente teorema cuya demostración es análoga a la anterior.

Teorema 1.2. *Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces A tiene a lo más un mínimo.*

DEFINICIÓN 1.3. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que el número real α es el **supremo** de A si:

(i) Para todo $a \in A$ se tiene que $a \leq \alpha$.

(ii) Si x es una cota superior de A, entonces $\alpha \leq x$.

Al supremo de A (si existe) también se le llama la **mínima cota superior** de A.

Tenemos la siguiente definición dual a la anterior.

DEFINICIÓN 1.4. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que el número real β es el **ínfimo** de A si:

(i) Para todo $a \in A$ se tiene que $\beta \leq a$.

(ii) Si r es una cota inferior de A, entonces $r \leq \beta$.

Al ínfimo de A también se le llama la **máxima cota inferior** de A.

Al supremo e ínfimo de A se les denota respectivamente, si existen, como

$$\sup A \quad \text{e} \quad \text{ínf}\, A.$$

Axioma del supremo. *Si A es un conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente, entonces existe el supremo de A.*

El principio anterior no es válido para los números racionales en el sentido de que hay conjuntos acotados superiormente que no tienen su supremo en $\mathbb{Q}$.

El siguiente teorema es el dual del axioma del supremo.

Teorema 1.3. Teorema del ínfimo. *Si B es un conjunto no vacío de números reales, acotado inferiormente, entonces existe el ínfimo de B.*

Demostración. Supongamos que B es un conjunto acotado inferiormente. Sea $A = \{a \in \mathbb{R} : -a \in B\}$ y r una cota inferior de B. Si $a \in A$, entonces $-a \in B$, pero $r \leq -a$ por lo que $a \leq -r$. Así pues vemos que A es un conjunto acotado superiormente y que el hecho de que r sea una cota inferior de B implica que $-r$ es una cota superior de A por lo que existe un número real α tal que

$$\alpha = \sup A.$$

Ahora si $a \in A$, entonces $a \leq \alpha \leq -r$ de donde $r \leq -\alpha \leq -a$ pero observemos que $a \in A \iff -a \in B$ por lo que para todo $b \in B$

$$r \leq -\alpha \leq b,$$

es decir $-\alpha$ es el ínfimo de B. ∎

Teorema 1.4. Propiedad arquimediana. *Si $x \in \mathbb{R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.*

Demostración. Si no existiera ningún número natural n tal que $n > x$, entonces x sería una cota superior de $\mathbb{N}$ y por el axioma del supremo existiría un α, tal que $\alpha = \sup \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces $m + 1 \in \mathbb{N}$ por lo que

$$m + 1 \leq \alpha$$

de donde

$$m \leq \alpha - 1 < \alpha,$$

por lo tanto $\alpha - 1$ sería una cota superior de $\mathbb{N}$ menor que α, contradiciendo el hecho de que α es el supremo de $\mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente. En particular, x no es una cota superior de $\mathbb{N}$, por lo cual existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. ∎

Corolario 1.4.1. *Si $x, y > 0$, entonces:*

(i) *Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

(ii) *Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y$.*

(iii) *Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$.*

Demostración. (i) Como $x > 0$, entonces $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$, por lo que existe un n, tal que

$$n > \frac{y}{x},$$

pero como $x > 0$ la última desigualdad equivale a

$$nx > y.$$

(ii) Como $y > 0$ y $1 > 0$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $ny > 1$. Ahora, esta última desigualdad equivale a que $y > \frac{1}{n}$ y como n es positivo, entonces $\frac{1}{n} > 0$, por lo tanto

$$0 < \frac{1}{n} < y.$$

(iii) Sea $A_y = \{k \in \mathbb{N} : \; y < k\}$. Por la propiedad arquimediana tenemos que $A_y \neq \varnothing$. Ahora, A_y tiene un mínimo n, el cual es su primer elemento, de donde $n - 1 \leq y < n$. ∎

Teorema 1.5. *Si $a, b > 1$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > a$ para todo $n \geq N$.*

Demostración. Por el teorema del binomio tenemos que para todo número natural n se tiene

$$b^n = (1 + (b-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b-1)^k \geq 1 + n(b-1),$$

ahora, por el corolario a la propiedad arquimediana se tiene que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N(b-1) > a$, por lo tanto si $n \geq N$, entonces

$$b^n \geq 1 + n(b-1) > a.$$ ∎

Como consecuencia inmediata del teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.5.1. *Si $a, b > 1$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $b > a^{\frac{1}{n}}$ para todo $n \geq N$. (Siempre que existan todas las raíces enteras de a.)*

Teorema 1.6. *Si A es un subconjunto de los números reales acotado superiormente, $b > 0$ y $X = \{x : \; x = b \cdot a$, para algún $a \in A\}$, entonces*

$$\sup X = b \sup A.$$

Demostración. Si $a \in A$ y $x = b \cdot a$, entonces como $a \leq \sup A$ y $b > 0$, tenemos que $x = ba \leq b \sup A$, por lo tanto $\sup X \leq b \sup A$. Ahora, como $A = \{a : \ a = b^{-1} \cdot x$ para algún $x \in X\}$, entonces $\sup A \leq b^{-1} \sup X$, por lo tanto $\sup X \leq b \sup A \leq b \cdot b^{-1} \sup X = \sup X$. ∎

2. Raíces Cuadradas

En esta sección se establecerá la existencia de las raíces cuadradas de cualquier número positivo.

Definición 2.1. Decimos que x es una **raíz cuadrada** de un número real a si $x^2 = a$.

Teorema 2.1. *Sea $a > 0$. Existe un número positivo x tal que $x^2 = a$.*

Demostración. Dividiremos la demostración en dos casos, a saber cuando $a > 1$ y cuando $0 < a \leq 1$.

Si $a > 1$, sea $B_a = \{b \in \mathbb{R} : \ b \geq 0 \text{ y } b^2 \leq a\}$. Podemos ver que B_a está acotado superiormente por a (verificarlo) por lo que debido al axioma del supremo, existe un número real $x = \sup B_a$. Observemos que $x \geq 1$ ya que $1 \in B_a$.

Tenemos tres posibilidades para x, a saber $x^2 = a$, $x^2 > a$ y $x^2 < a$. Veamos que las dos últimas son imposibles.

Si $x^2 < a$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{(a-x^2)}{2x+1}$. Con el n dado así, tenemos que $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{(2x+1)}{n}$, pero $\frac{1}{n} < \frac{a-x^2}{2x+1} \iff \frac{2x+1}{n} < a - x^2 \iff x^2 + \frac{(2x+1)}{n} < a$, por lo que

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < a,$$

lo cual significa que $x + \frac{1}{n} \in B_a$, pero esto es imposible pues x es el supremo de B_a.

Si $x^2 > a$, sea n un número natural tal que $\frac{1}{n} < \frac{x^2-a}{2x}$. Ahora, debe existir un $b \in B_a$ tal que $x - \frac{1}{n} < b$, de otra forma $x - \frac{1}{n}$ sería una cota superior de B_a. Pero esto nos lleva a que

$$a < x^2 - \frac{2x}{n} < x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 < b^2,$$

es decir $a < b^2$, contrario al hecho de que $b \in B_a$. Por lo tanto, la única posibilidad es que $x^2 = a$.

Falta demostrar que existe un x tal que $x^2 = a$ cuando $0 < a \leq 1$.

Si $a = 1$ es suficiente con tomar $x = 1$.

Si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a} > 1$, por lo que existe un $r > 0$ tal que $r^2 = \frac{1}{a}$, pero esto es equivalente a que $a = (\frac{1}{r})^2$ y es suficiente con tomar $x = \frac{1}{r}$. ∎

Observemos que si x es una raíz cuadrada de a, entonces $-x$ también es una raíz cuadrada de a. Observemos también que los números negativos no tienen raíces cuadradas en $\mathbb{R}$. A la raíz cuadrada no negativa de a la denotaremos por $\sqrt{a}$.

Veamos ahora un ejemplo de un número real que no es racional, a saber $\sqrt{2}$.

Teorema 2.2. *El número $\sqrt{2}$ es irracional.*

Demostración. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Como $\sqrt{2} > 0$, entonces se puede expresar como $\frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$. Sean $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} = \sqrt{2}$ para algún número natural $m\}$ y $\sqrt{2} = \frac{m_0}{n_0}$. La elección de m_0 y n_0 garantiza que no tengan factores comunes, en particular que 2 no divida a m_0 y a n_0 a la vez. Pero $\frac{m_0^2}{n_0^2} = 2$, por lo que $m_0^2 = 2n_0^2$, es decir m_0^2 es par. El número m_0 debe ser par, puesto que si no lo fuera, entonces $m_0 = 2k + 1$ para algún entero k, por lo que $m_0^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2k(k+1) + 1$, el cual es impar, por lo tanto m_0 es par. Así existiría un $r \in \mathbb{N}$ tal que $m_0 = 2r$, pero $m_0^2 = 4r^2$ y $\frac{4r^2}{n_0^2} = 2$, es decir $2r^2 = n_0^2$, de donde n_0^2 también es par. De manera similar podemos concluir que n_0 es par, de donde 2 divide a m_0 y a n_0 a la vez, contradiciendo a la elección de n_0, demostrando as que $\sqrt{2}$ es irracional. ∎

Ejercicio 2.1. Demostrar que si p es primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional.

Ejercicio 2.2. Demostrar que si n es un número natural tal que $\sqrt{n}$ no es entero, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.

APÉNDICE II. BIBLIOGRAFÍA

Anónimo, *Chou Pei Suan Ching (La Aritmética Clásica del Gnomon y las Órbitas del Firmamento).*

Edwin A. Abbot, *Flatland,* Dover, New York, 1952.

José Babini, *Historia Sucinta de la Matemática,* 3a edición, Espasa-Calpe, Madrid, 1969.

Radmila Bulajich Manfrino y José Antonio Gómez, *Geometría (Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas),* SMM-IMATE, México, 2002.

Radmila Bulajich Manfrino y José Antonio Gómez, *Problemas de Geometría (Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas),* SMM-IMATE, México, 2002.

H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría,* Limusa-Wiley, México, 1969.

René Descartes, *The Geometry of René Descartes,* with a facsimile of the first edition, Dover, New York, 1954.

Howard Eves, *Estudio de las Geometrías,* Tomo 1, México, 1971.

Euclid, *The Thirteen Books of The Elements,* Vol. 1 (books I and II), 2th edition, Dover, Toronto, 1956.

Euclid, *The Thirteen Books of The Elements,* Vol. 2 (books III-IX), 2th edition, Dover, Toronto, 1956.

R. Fuster y I. Giménez, *Variable Compleja y Ecuaciones Diferenciales,* Reverté, Barcelona, 1992.

Stanley I. Grossman, *Álgebra Lineal con Aplicaciones,* McGraw-Hill, México, 4a edición, 1993.

Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond (Undergraduate Texts in Mathematics),* Springer,2000.

Edwin M. Hemmerling, *Geometría Elemental,* Limusa, México, 1971.

David Hilbert, *Foundations of Geometry,* 2th edition, Open Court, USA, 1980.

Eduard Kasner y James Newman, *Matemáticas e Imaginación,* 6a edición, CECSA, México 1979.

Morris Kline, *Mathematics for Liberal Arts,* Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1967.

Charles H. Lehmann, *Geometría Analítica,* Limusa, México, 1980.

The Mathematical Society of Japan (edited by Shôkichi Iyanaga and Yukiyosi Kawada), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics,* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1977.

Edwin E. Moise y Floyd L. Downs, *Geometría Moderna,* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

James R. Newman, *Sigma, El Mundo de las Matemáticas,* Tomo 1, 10a edición, Grijalbo, España, 1968.

James R. Newman, *Sigma, El Mundo de las Matemáticas,* Tomo 4, 10a edición, Grijalbo, España, 1968.

Claudio Ptolomeo, *Almagesto (La Recopilación Matemática).*

K. Ribnikov, *Historia de las Matemáticas,* Mir, Moscú, 1987.

Barnett Rich, *Geometría Plana con Coordenadas,* McGraw-Hill (Serie Schaum), México, 1971.

Michael Spivak, *Cálculo en Variedades,* Reverté, Barcelona, 1988.

Michael Spivak, *Calculus (Cálculo Infinitesimal),* Reverté, Barcelona, 2a edición, 1988.

Howard E. Taylor and Thomas L. Wade, *Geometría Analítica Bidimensional (Subconjuntos del Plano),* Limusa, México, 1965.

APÉNDICE III. LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	**Ejemplo**	**Significado**
$\forall$	$\forall_{q(x)}$	Cuantificador universal. Para todo x que satisface $q(x)$.
$\exists$	$\exists_{q(x)}$	Cuantificador existencial. Existe x que satisface $q(x)$.
$\Longrightarrow$	$p \Longrightarrow q$	p implica q.
$\Longleftrightarrow$	$p \Longleftrightarrow q$	p si y sólo si q.
$\varnothing$		Conjunto vacío.
$\in$	$b \in A$	b pertenece a A.
$\notin$	$b \notin A$	b no pertenece a A.
$=$	$a = b$	a es igual a b.
$\neq$	$a \neq b$	a es diferente de b.
$\subset$	$A \subset B$	A es subconjunto de B.
$\supset$	$A \supset B$	B es subconjunto de A.
$\cup$	$A \cup B$	A unión B.
$\cap$	$A \cap B$	Intersección de A y B.
$\setminus$	$A\setminus B$	Conjunto de elementos que están en A pero no en B.
Δ	$A \Delta B$	Conjunto de elementos que están en A ó en B pero no en ambos.

Símbolo	**Ejemplo**	**Significado**
$\times$	$A \times B$	Cuando A y B son puntos es el producto vectorial. Cuando A y B son conjuntos es el producto cartesiano $\{(a,b):\ a \in A \ \text{ y } \ b \in B\}$.
$\cdot$	$P \cdot Q$	Producto escalar de P y Q.
$\hat{\mathbf{i}}$		$\hat{\mathbf{i}} = (1,0,0)$.
$\hat{\mathbf{j}}$		$\hat{\mathbf{j}} = (0,1,0)$.
$\hat{\mathbf{k}}$		$\hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$.
$\mathbb{C}$		Conjunto de los números complejos.
$\mathbb{N}$		Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{Q}$		Conjunto de los números racionales.
$\mathbb{R}$		Conjunto de los números reales.
$\mathbb{Z}$		Conjunto de los números enteros.
$!$	$k!$	Factorial de k, $k(k-1)\cdots(2)(1)$.
$(\ )$	$\binom{n}{k}$	Combinaciones de n en k.
$\sqrt{\ }$	$\sqrt{a}$ $\sqrt[n]{z}$	Raíz cuadrada no negativa de a. Raíz n-ésima principal de z.
$<$	$a < b$	a es menor que b.
$>$	$a > b$	a es mayor que b.
$\leq$	$a \leq b$	a es menor o igual que b.
$\geq$	$a \geq b$	a es mayor o igual que b.
$(\ ,\ )$	(a,b)	Pareja ordenada con componentes a y b.

Símbolo	**Ejemplo**	**Significado**
[,]	$[u,v]$	Producto vectorial de u y v.
(;)	$(a;b)$	$\{x \in \mathbb{R}: \ a < x < b\}$.
(;]	$(a;b]$	$\{x \in \mathbb{R}: \ a < x \leq b\}$.
[;)	$[a;b)$	$\{x \in \mathbb{R}: \ a \leq x < b\}$.
[;]	$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R}: \ a \leq x \leq b\}$.
$\longrightarrow$	$a \longrightarrow b$	a tiende a b.
	$f: A \longrightarrow B$	Función f con dominio A y recorrido incluido en B.
$\underset{\mapsto}{\longrightarrow}$	$f: \ A \underset{a \mapsto b}{\longrightarrow} B$	Función f con dominio A, recorrido incluido en B y $f(a) = b$.
$\mapsto$	$a \mapsto b$	Función que a a le asigna b.
$f(\ )$	$f(x)$	Función f evaluada en x.
$f[\ ]$	$f[A]$	$\{y: \ y = f(x)$ para algún $x \in A\}$.
$f^{-1}[\ ]$	$f^{-1}[B]$	$\{x: \ y = f(x)$ para algún $y \in B\}$.
ínf	$\text{ínf}\, A$	ínfimo de A.
sup	$\sup A$	supremo de A.
máx	$\text{máx}\, A$	máximo de A.
mín	$\text{mín}\, A$	mínimo de A.
$\sum$	$\sum_{k=1}^{n} a_k$	Suma desde $k = 1$ hasta n de los a_k.
$\prod$	$\prod_{k=1}^{n} a_k$	Producto desde $k = 1$ hasta n de los a_k.
$\propto$	$f \propto g$	f y g son proporcionales.

Símbolo	**Ejemplo**	**Significado**
$\mathcal{E}$		Espacio.
d	$d(A,B)$	Distancia entre A y B.
	AB	Cuando A y B son puntos, significa la distancia entre A y B.
$\vert\ \vert$	$\vert AB\vert,\ \vert A-B\vert$	Distancia entre A y B.
	$\vert x\vert$	Valor absoluto de x.
	$\vert Q\vert$	Norma o módulo de Q.
	$\vert\angle ABC\vert$	Medida del ángulo $\angle ABC$.
$\longleftrightarrow$	$\overleftrightarrow{AB}$	Recta que pasa por los puntos A y B.
$\longrightarrow$	$\overrightarrow{AB}$	Rayo con extremo A y que pasa por B.
$\overline{\quad}$	$\overline{AB}$	Segmento con extremos A y B.
$\angle$	$\angle BAC$	Ángulo con vértice A que es unión de los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
	$\angle A$	Ángulo con vértice A.
$\overleftarrow{\angle}$	$\overleftarrow{\angle} RQP$	Ángulo dirigido con lado inicial $\overrightarrow{QR}$ y lado terminal $\overrightarrow{QP}$.
$\measuredangle$	$\measuredangle ABC$	Medida del ángulo $\angle ABC$.
$\overleftarrow{\measuredangle}$	$\overleftarrow{\measuredangle} ABC$	Medida del ángulo dirigido $\overleftarrow{\angle} ABC$.
$\triangle$	$\triangle ABC$	Triángulo con vértices A, B y C.
$\frown$	$\overset{\frown}{AB}$	Arco con extremos A y B.
	$\overset{\frown}{AXB}$	Arco con extremos A y B y que pasa por X.
ℓ	ℓX	Longitud de X.
$\square$	$\square ABCD$	Cuadrilátero con lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.

Símbolo	**Ejemplo**	**Significado**
$\blacksquare$		Fin de una demostración.
a	a(Ω)	Área de Ω.
$\perp$	$l \perp a$	l y a son perpendiculares.
$\parallel$	$l \parallel a$	l y a son paralelos.
$\cong$	$A \cong B$	A y B son congruentes.
$\sim$	$A \sim B$	A y B son semejantes.
vol	vol(Ω)	Volumen de Ω.
a*	a$^*(\Omega)$	Área exterior de Ω.
a$_*$	a$_*(\Omega)$	Área interior de Ω.
vol*	vol$^*(\Omega)$	Volumen exterior de Ω.
vol$_*$	vol$_*(\Omega)$	Volumen interior de Ω.
∂	∂A	Frontera del conjunto A.
$B(\ ,\ )$	$B(Q,r)$	Bola abierta con centro en Q y radio r.
$^\circ$	x°	x grados.
sen	$\operatorname{sen}\theta$	Seno de θ.
cos	$\cos\theta$	Coseno de θ.
tan	$\tan\theta$	Tangente de θ.
cot	$\cot\theta$	Cotangente de θ.
sec	$\sec\theta$	Secante de θ.
csc	$\csc\theta$	Cosecante de θ.

Símbolo	**Ejemplo**	**Significado**
arcsen	$\operatorname{arcsen} x$	Arcoseno de x.
arccos	$\arccos x$	Arcocoseno de x.
arctan	$\arctan x$	Arcotangente de x.
arccot	$\operatorname{arccot} x$	Arcocotangente de x.
arcsec	$\operatorname{arcsec} x$	Arcosecante de x.
arccsc	$\operatorname{arccsc} x$	Arcocosecante de x.
$\bar{}$	$\bar{z}$	Conjugado de z.
arg	$\arg(z)$	Argumento principal de z.
Im	$\operatorname{Im}(z)$	Parte imaginaria de z.
Re	$\operatorname{Re}(z)$	Parte real de z.
i		Unidad imaginaria.
π		Longitud de una circunferencia de radio 1.

APÉNDICE IV. ÍNDICE ALFABÉTICO