Aprendiendo Geometría Analítica a través de problemas y actividades grupales

Gabriel López Garza

Profesor de la Universidad Autónoma Metropolitana campus Iztapalapa

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, March 2013

Índice general

1 Introducción

1.1 Geometría sin coordenadas

La geometría analítica estudiada en este libro requiere como conocimiento previo en cierta medida de la Geometría Euclidiana con la axiomática establecida en el libro de David Hilbert [1]. Se supondrá a lo largo de este libro que el estudiante conoce los teoremas más importantes de congruencia y semejanza de triángulos, paralelismo y perpendicularidad de rectas, sin que se requiera que sea un lector experto.

Entre los conocimientos previos más importantes para comprender la Geometría Analítica, está el teorema de Pitágoras. Existen numerosas demostraciones de este importante teorema, recomendamos que el estudiante revise alguna, por ejemplo, la que se encuentra en el libro de Serra [3].

Teorema 1.1 — Teorema de Pitágoras. Sea T un triángulo rectángulo cuyos lados pasan por los puntos A,B,C. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ los lados adyacentes al ángulo recto del triángulo, llamados catetos y sea $\overline{AC}$ el lado opuesto al ángulo rectángulo, llamado hipotenusa. Denotamos con $\|\overline{AB}\|$, $\|\overline{BC}\|$ y $\|\overline{AC}\|$ las longitudes respectivas de los lados del triángulo. Entonces se cumple

$$\|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2 = \|\overline{AC}\|^2.$$

Recíprocamente, si en un triángulo T se cumple la relación anterior, entonces el triángulo es rectángulo, siendo en tal caso la hipotenusa de T el segmento $\overline{AC}$ y los catetos los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Presentaremos una demostración de una parte del teorema la cual puede ser al menos intuitivamente aceptable por los lectores a los que está dirigido este libro.

Demostración. En la figura 1.1 hay dos cuadrados, formados en parte por los triángulos que tienen catetos con longitud $a = \|\overline{AB}\|$, $b = \|\overline{BC}\|$ y longitud de la hipotenusa $c = \|\overline{AC}\|$. Ambos cuadrados tienen área $(a+b)^2$ ya que ambos tienen lados con longitud $a+b$, mientras que cada triángulo ABC tiene área $ab/2$. Notamos que el cuadrado de la izquierda

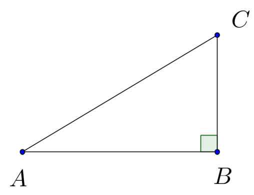


Figura 1.1: Triángulo ABC.

está formado por el cuadrado c^2 y cuatro triángulos ABC de área $ab/2$, es decir, $(a+b)^2 = c^2 + 4(ab/2)$. Para el cuadrado de la derecha se tiene $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 4(ab/2)$.

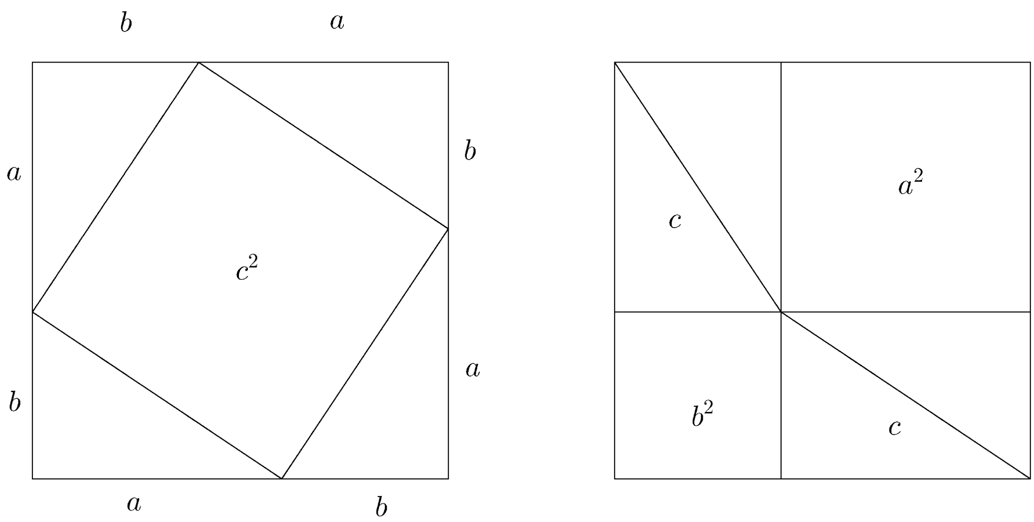


Figura 1.2: Demostración del teorema de Pitágoras

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= c^2 + 4(ab/2)\\ &= a^2 + b^2 + 4(ab/2).\end{aligned}$$

de donde se concluye que $a^2 + b^2 = c^2$. ■

1.2 Conjuntos

Utilizaremos la notación básica para conjuntos. Por ejemplo, para un conjunto A cuyos elementos x satisfacen la propiedad $p(x)$, escribimos

$$A = \{x : p(x)\}.$$

Lo cual se lee "A es el conjunto de x, tales que x satisface la propiedad $p(x)$."

Notación 1.1. *Si x es elemento de un conjunto A decimos que x está en A o bien que x pertenece a A y se denota*

$$x \in A.$$

1.2.1 Producto cartesiano

Definición 1.1 Dados dos conjuntos A, B, se define el producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \ \text{ y } \ y \in B\}.$$

Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ elementos de $A \times B$ se tiene que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$.

Definición 1.2 — Correspondencia biunívoca. Se dice que existe una correspondencia biunívoca de un conjunto A con un conjunto B para cada elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$.

1.3 Números Reales

Notación 1.2. *El conjunto de los números reales se denotará por $\mathbb{R}$.*

Se requerirá en este libro algunos conocimientos básicos de las operaciones así como el concepto de orden en $\mathbb{R}$.

1.3.1 Propiedades de Campo

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades

i) $a + b = b + a$.
ii) $ab = ba$.
iii) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
iv) $a(bc) = (ab)c$.
v) $a(b + c) = ab + ac$.
vi) Existe un elemento de $\mathbb{R}$ denotado 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$ y un elemento de $\mathbb{R}$ denotado 1 tal que $a1 = 1a = a$ para todo a en $\mathbb{R}$.
vii) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un elemento denotado por $-a$ tal que $a + (-a) = 0$. Para todo $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$, existe un elemento denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a\frac{1}{a} = 1$.

Consecuencia inmediata de estas propiedades son las reglas dadas para los llamados *productos notables* los cuales llenan páginas y páginas de los llamados *libros de álgebra elemental*. Para este libro se requerirán únicamente, al menos que otra cosa sea especificada, los productos contenidos en el siguiente

Teorema 1.2 Para todo $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ se cumple

1. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.
2. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$.
3. $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$.
4. $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$.
5. $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.
6. $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

N Al procedimiento mediante el cual partiendo del lado derecho de las expresiones en el Teorema 1.2 se llega a las expresiones de lado izquierdo, se le llama **factorizar**. Al procedimiento que comienza en la izquierda, (es decir, en sentido el inverso al anterior mencionado), se le llama **desarrollar los factores**. Se recomienda que el lector tenga memorizados ambos procedimientos para seguir sin ningún contratiempo cualquier curso de geometría analítica. La memorización de algunos resultados simples no es de ninguna manera desdeñable en una etapa del aprendizaje de las matemáticas, sino *al contrario, es un prerrequisito para un aprendizaje superior.*

1.3.2 Orden en los números reales

Es fundamental poder comparar números reales y diferenciarlos como positivos o negativos, según sea el caso. Para este fin se introduce el siguiente

Axioma 1.1 El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ contiene un subconjunto $\mathbf{P}$ llamado *conjunto de números positivos* con las siguientes propiedades:

i) Si a y $b \in \mathbf{P}$, entonces $a+b \in \mathbf{P}$ y $ab \in \mathbf{P}$.
ii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es cierta: $a \in \mathbf{P}$, o bien $-a \in \mathbf{P}$ o bien $a = 0$.

Se puede ahora proceder a definir los signos $>, <, \leq$ etcétera.

Definición 1.3 Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a > b$ significa que $a - b \in \mathbf{P}$; $a < b$ significa que $b > a$; $a \geq b$ significa que $a > b$ o bien que $a = b$.

Las propiedades del ordenamiento en $\mathbb{R}$ quedan resumidas en el siguiente

Teorema 1.3 supongamos que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$.

Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$.

El valor absoluto de un número real será utilizado extensamente en el siguiente capítulo podemos con lo visto hasta ahora definirlo formalmente.

Definición 1.4 El valor absoluto $|a|$ de un número real a se define mediante

$$|a| = \begin{cases} \text{Si } a \geq 0 \text{ entonces } |a| = a \\ \text{Si } a < 0 \text{ entonces } |a| = -a. \end{cases} \tag{1.1}$$

2 Plano cartesiano

2.1 Coordenadas en una línea

Antes de pasar a estudiar el plano cartesiano estudiaremos un objeto más simple, la línea recta. En una recta los únicos objetos de estudio son la recta misma, puntos aislados y segmentos de recta. La esencia de la geometría analítica consiste en establecer una correspondencia entre números y objetos geométricos. Tal correspondencia en la recta, requiere del siguiente resultado.

Teorema 2.1 Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y los puntos de cada recta de tal manera que se conserva el orden de los números reales. El hecho de que exista una correspondencia biunívoca entre una recta l y el conjunto de los números reales lo denotamos por $l \approx \mathbb{R}$.

N El lector, ya conoce esta correspondencia de manera intuitiva, a cada punto sobre la recta le corresponde un y sólo un número real y, recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta. Sin embargo desde el punto de vista de la axiomática de Hilbert en su libro [1], este teorema nada trivial es consecuencia del los axiomas de continuidad así como del Teorema 32, página 27 en dicho libro. De hecho un muy conocido defecto en los portentosos elementos de Euclides es que no consideraron que se requieren axiomas de continuidad.

Dada una recta l podemos localizar el punto correspondiente al número cero sobre la recta. Convenimos en asignar los números negativos a los puntos localizados a la izquierda del 0 y en asignar los números positivos los localizados a la derecha del 0 de tal forma que $x < y$, si y sólo si x está a la izquierda de y. Dados dos puntos en la recta l se define la distancia entre ellos de la manera siguiente.

Definición 2.1 Sea l una recta y sean $x, y \in \mathbb{R}$ puntos sobre la recta. Se define la distancia $d(x,y)$ entre ellos, lo cual se lee, *distancia de x a y*, como

$$d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x-y)^2}.$$

Actividad grupal 2.1 En equipos pequeños, los estudiantes deben inventar ejemplos con números reales que ilustren las siguientes preguntas:

1. Si se conoce $d(x,y)$ ¿qué puede decirse de $d(y,x)$?
2. ¿Qué número corresponde a $d(x,x)$?
3. ¿Puede ocurrir que $d(x,y) < 0$?

Escriba sus conclusiones en forma de una *proposición matemática.* ■

■ **Ejemplo 2.1** Por ejemplo, si $x=-2, y=-3$ tenemos $d(-2,-3)=|-2-(-3)|=|-2+3|=|1|=1$. Si $x=-8, y=1$ en este caso $d(-8,1)=|-8-1|=|-9|=9$. ■

2.2 El plano cartesiano

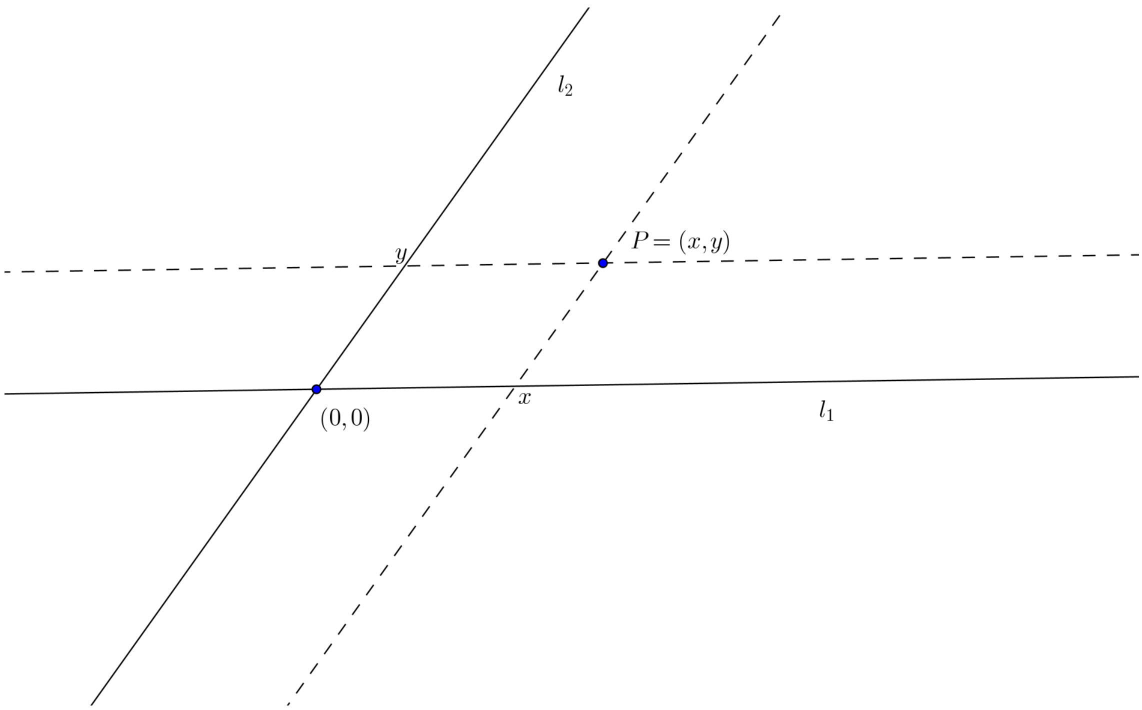
Dadas dos rectas l_1, l_2 que se intersectan en un punto, (podemos suponer que el punto de intersección corresponde al cero de cada una de ellas) formamos el producto cartesiano $l_1 \times l_2$ como se definió en el capítulo anterior. Dado que cada recta tiene una correspondencia biunívoca con $\mathbb{R}$ se tiene que

$$l_1 \times l_2 \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Notación 2.1. *Se denota $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el símbolo $\mathbb{R}^2$ se lee "erre dos". A los pares (x,y) les llamaremos puntos del plano cartesiano.*

2.2.1 Coordenadas

Dado cualquier punto $(x,y) \neq (0,0)$ del plano cartesiano formado con $l_1 \times l_2$ podemos trazar una recta que pase por x en l_1 paralela a l_2 y una recta que pase por y en l_2 paralela a l_1. La intersección de tales rectas paralelas a los ejes es exactamente el punto $P=(x,y)$.



Actividad grupal 2.2 Divídase el grupo en equipos. Cada equipo debe establecer un sitema de coordenadas con un par de rectas l_1, l_2 que se intersecten. Para la realización del taller deben tomarse en cuenta las siguientes consideraciones:

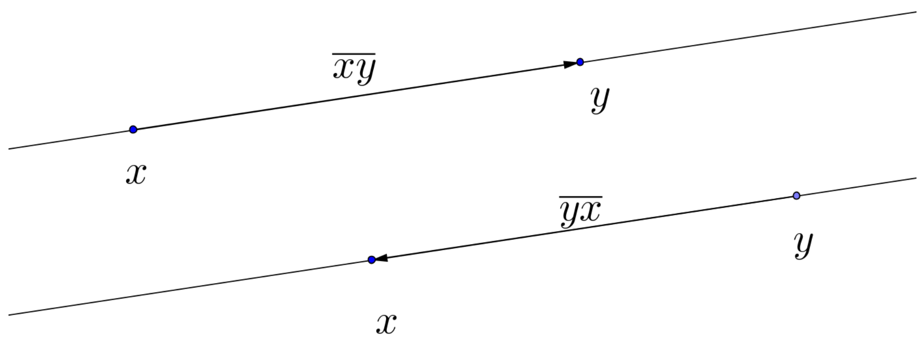
- Las rectas que consideren los equipos **no deben ser perpendiculares.** En el pizarrón debe dibujarse posteriormente un sistema de coordenadas **rectangulares**, es decir, un sistema formado por un par de rectas que se cortan en un ángulo recto.
- Localice varios puntos en los diferentes sistemas de coordenadas del grupo. Por ejemplo, localice los puntos $(-1,2)$, $(-3,-3)$, $(2,1)$, $(1,-4)$.
- Realice una discusión grupal para determinar si los sistemas son mejores unos que otros. ¿Cuáles serían los criterios para determinar cuál es mejor?
- Una vez terminada la actividad anterior, la siguiente actividad consiste en medir distancias entre puntos. ¿Cómo debe hacerse? **No debe llegarse en este momento a ninguna fórmula.** Se trata solamente de un primer acercamiento.

La actividades de este taller pueden realizarse en 20 minutos. ■

2.3 Segmentos orientados

Dada una recta l y dados dos puntos sobre ella $x, y \in \mathbb{R}$ podemos construir dos segmentos con diferente orientación: el segmento que va de x a y y el segmento que va de y a x. Utilizaremos una punta de flecha para distinguir entre ellos de la manera siguiente: si el punto inicial del segmento es x y el final y pondremos una punta de flecha que termine en y.

Notación 2.2. Denotaremos con $\overline{xy}$ el segmento que comienza en x y termina en y. Recíprocamente, denotaremos con $\overline{yx}$ el segmento que comienza en y y termina en x.



Similarmente, dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ denotamos el segmento que comienza en P_1 y termina en P_2 por $\overline{P_1P_2}$ y lo representamos con una flecha que inicia en P_1 y termina en P_2. Véase la figura 2.1.

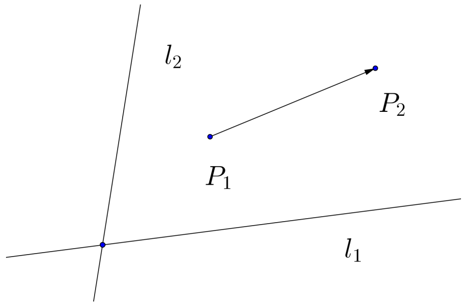


Figura 2.1: Segmento orientado en $\mathbb{R}^2$.

Cada punto $P = (x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ tendrá asignado un segmento orientado construido a partir de $(0,0)$ y que termina en (x, y). A este segmento orientado se le llamará *vector de posición* del punto $P = (x, y)$. En general, a los segmentos orientados les llamaremos *vectores.*

2.4 Suma de vectores

Dado un segmento orientado o vector cualquiera con punto inicial $P_1 = (x_1, y_1)$ y punto final $P_2 = (x_2, y_2)$, podemos construir un segmento orientado cuyo punto inicial sea $(0,0)$, que tenga la misma longitud y que apunte en la misma dirección del vector $\overline{P_1P_2}$. Para ello, simplemente construimos el vector de posición del punto $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. De esta manera a cada vector de $\mathbb{R}^2$ le corresponde un punto, obtenido por el vector de posición del vector cuyo punto inicial ha sido trasladado al origen de coordenadas $(0,0)$. Recíprocamente, como hemos mencionado ya, a cada punto le corresponde un vector de posición. Por lo tanto, **no distinguiremos con una notación diferente** a los vectores y puntos en este libro. Por ejemplo, cuando se diga *dibuje el vector* $(2,1)$, entenderemos que se dibujará **el vector de posición del punto correspondiente** $(2,1)$. Establecido lo anterior podemos definir la suma de vectores y el producto de un número por un vector.

Definición 2.2 Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) vectores en $\mathbb{R}^2$. Se define la suma de vectores como

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Si α es un número real y (x, y) un vector, se define el producto $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$. El vector cero se define como $\overline{0} = (0,0)$.

Actividad grupal 2.3 ¿Puede decirse que la suma de vectores es conmutativa? ¿es asociativa? Si $r, s \in \mathbb{R}$ ¿cómo calcularía $r(s(x, y))$? Si $\overline{v}$ es cualquier vector, ¿qué resulta de las operaciones $\overline{v} + \overline{0}$, $\overline{0} + \overline{v}$ y $\overline{v} + (-1)\overline{v}$? ▪

▪ **Ejemplo 2.2** Dados los vectores $(1,2)$ y $(-1,3)$ encuentre su suma y encuentre el vector $3(-1,3)$.
Solución. La suma se calcula simplemente sumando componente a componente

$$(1,2) + (-1,3) = (1 + (-1), 2 + 3) = (0,5)$$

Para el producto $3(-1,3)$ se tiene $3(-1,3) = (3 \cdot (-1), 3 \cdot 3) = (-3,9)$. ▪

Actividad grupal 2.4 Dibuje el vector con punto inicial $P_0 = (1,2)$ y punto final $P_1 = (4,3)$. Calcule el vector $-\overline{P_0P_1}$ dibuje este vector y diga que relación tiene con $\overline{P_1P_0}$.

¿La operación diferencia o resta de vectores puede ser definida a partir de la suma y del producto por un número real? Como puede definirla.

Calcule la diferencia del radio vector de P_1 y P_0. ¿Qué relación tiene con el vector $\overline{P_0P_1}$? Haga los dibujos correspondientes. ■

2.4.1 Ejercicios

1. Considere los vectores $a = (1,-3), b = (2,5), c = (-2-7)$. Calcule
   a) $a+b$
   b) $3a-c+5b$
   c) $3(b-2a)+6a$
2. Sean a,b vectores en $\mathbb{R}^2$. Resuelva las siguientes ecuaciones
   a) $5(3,-1)+7a = (-3,4)$
   b) $-5b = (-2,6)$
   c) $2[(5,-1)-a] = 2a+(1,0)$

2.4.2 Suma de vectores y flechas

Un buen ejercicio geométrico consiste en encontrar la relación entre la suma y diferencia de vectores con la construcción de un triángulo cuyos lados son los vectores involucrados. Por ejemplo, si se desea encontrar la suma del vector $a = (a_1,a_2)$ con el vector $b = (b_1,b_2)$ geométricamente, consideramos cualquier punto P del plano, sobre P nos movemos en dirección paralela al eje x, a_1 unidades a la derecha si $a_1 > 0$ y a la izquierda si $a_1 < 0$, a partir de este punto nos movemos a_2 unidades verticalmente, hacia arriba si $a_2 > 0$ y hacia abajo si $a_2 < 0$. Queda así construido el segmento $\overline{PQ}$ cuyo punto inicial es P y cuyo punto final es $P+a = Q$. Sobre le punto Q se construye el vector $Q+b = R$ y el segmento dirigido $\overline{QR}$. La suma $a+b$ queda entonces representada por el vector $\overline{PR}$.

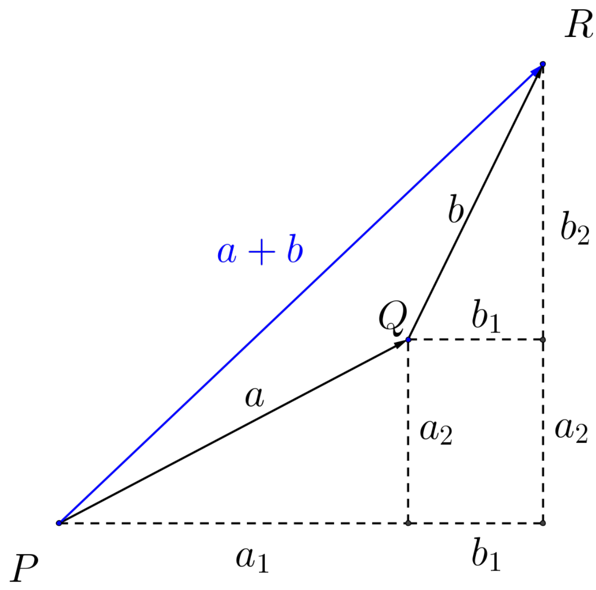
Para representar la resta de vectores se procede como en el parrafo anterior, es decir, a partir de cualquier punto P construimos el segmento $\overline{PQ}$ con $Q = P+a$. A partir de Q se construye ahora el punto R' con poniendo $R' = Q-b$. Entonces el vector $a-b$ esta dado por el segmento orientado $\overline{PR'}$.

2.5 Distancia entre puntos en $\mathbb{R}^2$ y longitud de vectores

La distancia entre dos puntos puede definirse con referencia a cualesquiera ejes coordenados sin importar que sean no rectangulares, de acuerdo a la siguiente

Definición 2.3 Dados dos puntos cualesquiera P_1,P_2 del plano se define la distancia entre ellos $d(P_1,P_2)$ como la longitud del segmento rectilíneo que los une.

De aquí en adelante usaremos sólo coordenadas rectangulares, lo cual significa que las rectas que determinan los ejes de coordenadas se cortan en un ángulo recto, es decir, se cortan en un ángulo de $\pi/2$ radianes, o bien $90°$. A la recta horizontal le llamaremos eje



de las x y a la vertical eje de las y. Al eje de las x se le llama también *eje de las absisas* y al eje de las y se les llama *eje de las ordenadas.*

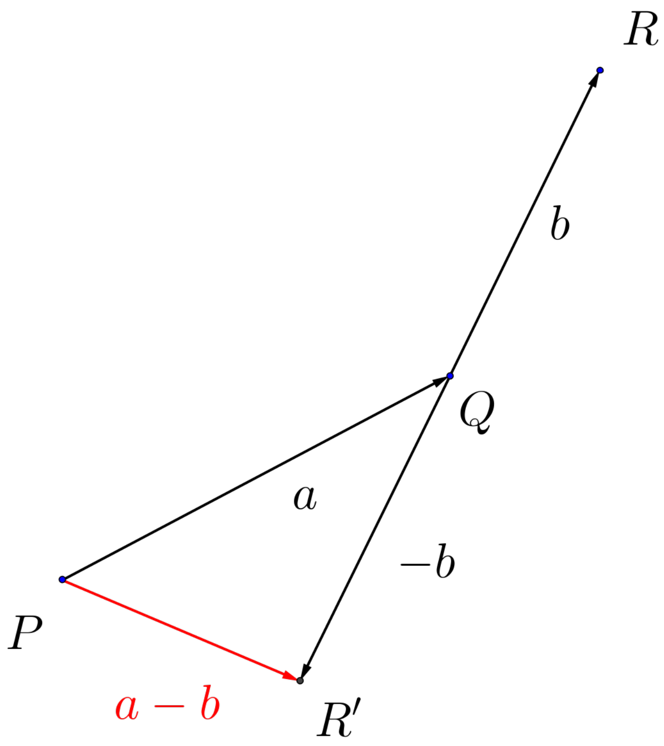
Una vez que se tienen ejes coordenados rectangulares la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano se puede medir por medio del teorema de Pitágoras, teorema 1.1.

Actividad grupal 2.5 La distancia entre puntos que forman segmentos paralelos a los ejes, puede calcularse fácilmente, con ellas puede conocerse la distancia entre dos puntos cualquiera. la siguientes actividades facilitarán al estudiante el entendimiento de la fórmula general.

1) Encuentre una manera simple de calcular la distancia entre los puntos $(3,1)$ y $(3,-2)$. Encuentre también la distancia entre $(-2,-1)$ y $(-4,-1)$. Dibuje planos cartesianos rectangulares y localice los puntos en ellos, proceda *sólo después de haber hecho las gráficas* a calcular la distancia.
2) Se desea calcular la distancia entre los puntos $A=(-2,1)$ y $C=(3,4)$ por medio del teorema de Pitágoras. Para ello construimos un triángulo rectángulo como el que se muestra en la figura 2.2. Se desea entonces calcular la longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$.
   ¿Cómo puede calcularse la longitud de los catetos? ¿Cuál es la longitud de los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$? No olvide hacer un dibujo que corresponda a esta actividad.

El taller deberá tener una duración máxima de 20 minutos. ▪

Soluciones a las actividades del taller 2.5.
1) Para calcular distancias en rectas paralelas a los ejes de coordenadas, se proyecta el segmento en el eje paralelo correspondiente. Por ejemplo la distancia entre $(3,1)$ y $(3,-2)$ es $|1-(-2)|=3$.
2) Para calcular la longitud del cateto $\overline{AB}$ se proyecta dicho segmento sobre el eje de las x. Entonces se procede a calcular la longitud entre los puntos -2 y 3, sobre dicha línea tal distancia es $|-2-3|=5$. La longitud del cateto $\overline{BC}$ es la longitud entre los puntos 1 y 4 sobre el eje y, la cual está dada por $|1-4|=|-3|=3$. Por el teorema de Pitágotas 1.1, se



tiene

$$\|\overline{AC}\|^2 = \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2$$

De donde se llega al resultado

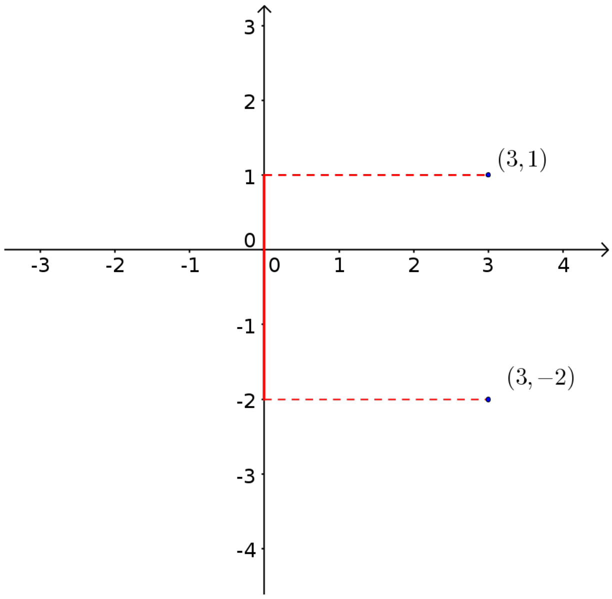
$$\|\overline{AC}\| = \sqrt{\|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Una vez que se han concluido las actividades del taller procedemos a dar la fórmula de la distancia entre dos puntos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2 — Distancia entre dos puntos. Dados dos puntos cualquiera $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ con un sistema coordenadas rectangular, la distancia entre ellos $d(P_1, P_2)$ está dada por la fórmula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.1}$$

Demostración. Supongamos primero que los puntos se encuentran sobre una recta paralela al eje x, por ejemplo, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_1 = (x_2, y_1)$, es decir, $y_1 = y_2$. Entonces la distancia entre los puntos se obtiene proyectando el segmento $\overline{P_1P_2}$ sobre el eje x por lo que su distancia es $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$ como se desea. Por un argumento similar si los puntos P_1, P_2 están sobre una recta paralela al eje y se tiene $d(P_1, P_2) = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2}$. Si los puntos P_1, P_2 no están sobre una recta paralela a ninguno de los



ejes, podemos construir un triángulo rectángulo con el segmento paralelo al eje y que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ y el punto $P_o = (x_1, y_2)$ y con el segmento paralelo al eje x que pasa por $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_o = (x_1, y_2)$. Se mostró en la primera parte de esta prueba que $d(P_2, P_o) = |x_1 - x_2|$ y $d(P_2, P_o) = |y_1 - y_2|$. Se concluye por medio del teorema de Pitágoras que

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

como se quería demostrar. ■

Ejercicio 2.1 Proceda a hacer un dibujo que ilustre la demostración del teorema 2.2. ■

Si se tiene un vector con punto inicial P_0 y punto final P_1, la longitud del vector es la distancia entre P_0 y P_1, de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 2.4 La norma o longitud del vector $\overline{v} = \overline{P_0P_1}$, denotada por $\|\overline{v}\|$ es la longitud del segmento que une P_0 y P_1. Es decir,

$$\|\overline{v}\| = \|\overline{P_0P_1}\| = d(P_0, P_1).$$

Ejercicio 2.2 Ilustre con un dibujo el vector R que resulta de la resta de los vectores de posicion de dos puntos P_1, P_2, ¿Cuando se cumple que $\|R\| = d(P_1, P_2)$? ■

Actividad grupal 2.6 Dados los puntos $P_0 = (-4, -5)$ y $P_1 = (2, 1)$ construya los vectores $\overline{P_0P_1}$ y $\overline{P_1P_0}$.

1. ¿Qué se puede decir de $\|\overline{P_0P_1}\|$ con respecto de $\|\overline{P_1P_0}\|$.
2. Si $r \in \mathbb{R}$ que se puede decir de $\|r\overline{P_0P_1}\|$. Realice los cálculos con $r = 2, 3, -5$.
3. ¿Cuál es la norma del vector $\overline{0}$?

La actividad de este taller no debe exceder 15 minutos. ■

Terminado el taller, es pertinente presentar los resultados en la siguiente forma:

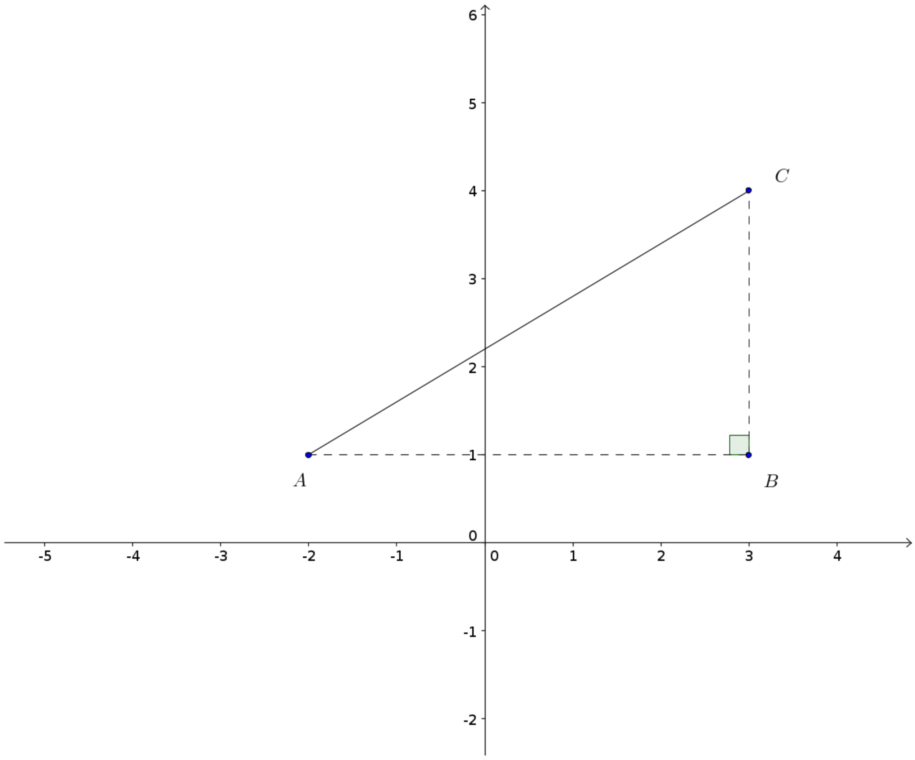


Figura 2.2: Distancia entre los puntos A y C

Teorema 2.3 Sean $r \in \mathbb{R}$ cualquier número real y $\overline{v} \in \mathbb{R}^2$ cualquier vector, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\|\overline{v}\| \geqslant 0$.
2. $\|\overline{v}\| = 0$, si y sólo si $\overline{v} = \overline{0}$.
3. $\|r\overline{v}\| = |r|\|\overline{v}\|$

Demostración. Las propiedades de la norma de un vector son consecuencia directa de propiedades similares para la distancia entre puntos. Por ejemplo, si $\overline{v} = \overline{P_0P_1}$ con $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$, entonces

$$\|r\overline{v}\| = \|r\overline{P_0P_1}\| = d(rP_1, rP_2) = \sqrt{r^2((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2)} = |r|\|\overline{v}\|.$$

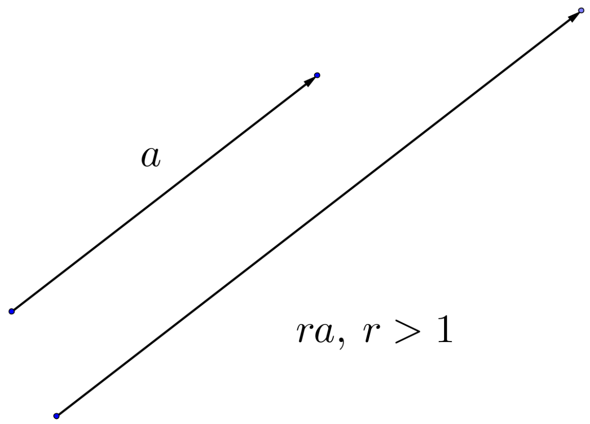
las demás partes de la demostración se dejan como ejercicio. ■

Interpretación geométrica de la multiplicación por un escalar

El teorema anterior implica que al multiplicar un vector por un número real (escalar) r aumenta el tamaño del vector si $|r| > 1$ o disminuye el tamaño del vector si $|r| < 1$. Pero si recordamos que un vector puede representarse por una flecha, no debemos olvidar que al multiplicar por un escalar, **además se invierte la dirección del vector** si $r < 0$.

Considerado lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 2.5 El vector a es paralelo a b si y sólo si, existe un número real r, tal que $a = rb$.



Actividad grupal 2.7 De acuerdo con la definición 2.5 ¿qué ocurre con el vector $\overline{0} = (0,0)$?¿Qué se puede decir de este vector con respecto a todos los demás? Si un vector a es paralelo a un vector b ¿es b paralelo a a?

Solución. El vector cero es paralelo a todos los vectores de acuerdo a la definición anterior.

Supongamos que a y b no son el vector cero. Si a es paralelo a b entonces existe r tal que $a = rb$ como $\overline{0} \neq a$ y $\overline{0} \neq b$ entonces $r \neq 0$. Así podemos multiplicar por el inverso de r, es decir, podemos multiplicar por $1/r \in \mathbb{R}$ para obtener $b = 1/ra$. Por lo tanto b es paralelo a a.

Los estudiantes deben poder dar argumentos para justificar cada una de las respuestas anteriores, después de haber trabajado con ejemplos concretos dando valores al número r.

Ejercicio 2.3

1. Determine analíticamente si los siguientes pares de vectores son paralelos o no
   a) $(1,1),(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$
   b) $(4,7),(12,-20)$
2. Suponga que a,a',b,b' son distintos de cero. Si a es paralelo a a', b paralelo a b' y a paralelo a b entonces a' es paralelo a b'. Ilustre este resultado geométricamente.
3. Muestre que si $d = b+c$ y b es paralelo a a, entonces d esparalelo a a si y sólo si c es paralelo a a ilustre este resultado con una gráfica.

2.5.1 Propiedades de espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

No debe ser difícil para el lector verificar que $\mathbb{R}^2$ con la operación suma y la operación producto por un escalar satisface las siguientes propiedades

i) Si $a,b \in \mathbb{R}^2$ entonces $a+b = b+a$.
ii) Si $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ entonces $a+(b+c) = (a+b)+c$.

iii) Existe $\bar{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}^2$, se tiene $a + \bar{0} = a$.
iv) Para todo $a \in \mathbb{R}^2$, existe un elemento denotado $-a \in \mathbb{R}^2$ tal que $a + (-a) = \bar{0}$.
v) Si $r, s \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^2$, entonces $s(ra) = (sr)a$ y $(s+r)a = sa + ra$.
vi) Si $r, \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}^2$, entonces $r(a+b) = ra + rb$.
vii) Si $a \in \mathbb{R}^2$, entonces $1a = a$.

Claramente $\bar{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ y si $a = (a_1, a_2)$, se tiene $-a = (-a_1, -a_2) = (-1)a$.

Ejercicio 2.4 Dados $a = (-1,3), b = (-4,8), c = (5,2)$ y $r = -2, s = 3$ verifique que se cumplen las propiedades i) a vii). ■

N El concepto de *espacio vectorial* es muy importante en las matemáticas universitarias. En general dado un conjunto $\mathbb{V}$ y $\mathbb{R}$ donde se han definido la operación suma en $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ y producto por un escalar en $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$, se dice que el par $\{\mathbb{V}, \mathbb{R}\}$ junto con las dos operaciones, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ si se cumplen las propiedades i) a vii) para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{V}$ y $r, s \in \mathbb{R}$.

En un primer curso **no se recomienda** introducir el concepto de espacio vectorial en general. Sin embargo es pertinente aclarar que la definición precisa de vector, debe darse simplemente como *un vector, es un elemento de un espacio vectorial*. La noción de flecha ayuda a comprender los aspectos geométricos relacionados con los vectores y es ampliamente usada en ciencias e ingeniería, pero el aspecto algebráico de los espacios vectoriales es el que realmente es de primordial importancia, en matemáticas avanzadas.

2.6 Vectores perpendiculares

El concepto de ortogonalidad (o perpendicularidad) de vectores es muy importante en geometría. Para desarrollar cierta intuición sobre este concepto se sugiere trabajar en las actividades siguientes.

Actividad grupal 2.8

1. ¿Puede ocurrir que dados dos vectores $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ se tenga que $\|a+b\| = \|a-b\|$? Construya ejemplos si su respuesta es afirmativa o contraejemplos si su respuesta es negativa.
2. Si ocurre que $\|a+b\| = \|a-b\|$ se tiene

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2} = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}$$

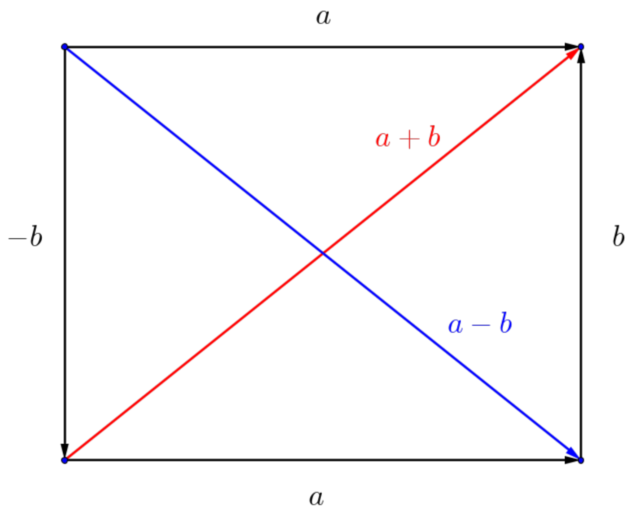
eleve al cuadrado, desarrolle los binomios y simplifique para llegar a

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

No olvide hacer dibujos que ilustren sus ejemplos. ■

Una vez realizado el ejemplo anterior se puede proceder a enunciar la definición siguiente.

Definición 2.6 Dos vectores a y b son ortogonales si y sólo si $\|a+b\| = \|a-b\|$.



■ **Ejemplo 2.3** Verifique que los vectores $a = (2,3)$ y $b = (-3,2)$ son ortogonales.
Solución. Calculamos directamente $\|a+b\| = \|(2,3)+(-3,2)\| = \|(-1,5)\| = \sqrt{26}$. Por otra parte $\|a-b\| = \|(2,3)-(-3,2)\| = \|(5,1)\| = \sqrt{26}$. Por lo tanto los vectores son ortogonales. ■

Definición 2.7 Dados dos vectores $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ se define el producto interior (o producto punto) de a y b como

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Con las definiciones anteriores se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.4 Dos vectores a y b son ortogonales si y sólo si $a \cdot b = 0$.

Demostración. Si $\|a+b\| = \|a-b\|$ entonces, como se hizo en la actividad grupal 2.8, se llega a que $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$. El recíproco se sigue de

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 + a_2 b_2 &= 0 \\
4(a_1 b_1 + a_2 b_2) &= 0 \\
2(a_1 b_1 + a_2 b_2) &= -2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \\
a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \\
\sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2} &= \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}.
\end{aligned}$$

Se concluye que $\|a+b\| = \|a-b\|$. ■

Actividad grupal 2.9 El producto interior tiene las siguientes propiedades:

1. $a \cdot b = b \cdot a$.
2. Para $r \in \mathbb{R}$, $(ra) \cdot b = r(a \cdot b)$.
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
4. $a \cdot a \geqslant 0$; $a \cdot a = 0$ implica $a = \overline{0}$.

Verifique que se cumplen las propiedades 1 a 3.

Solución. Para llevar a cabo la actividad anterior, sugerimos escribir $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ y $c = (c_1, c_2)$. Las propiedades son un cálculo directo a partir de las definiciones de a, b, c y la definición de producto interno.

Con las herramientas matemáticas desarrolladas hasta ahora podemos dar una demostración vectorial del teorema de Pitágoras.

Teorema 2.5 — Teorema de Pitágoras. Los vectores a y b son ortogonales si y sólo si

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Demostración. Notamos que para cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ se tiene $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 = \|v\|^2$. Para el caso $v = a + b$ se tiene $\|a+b\|^2 = (a+b) \cdot (a+b)$. Aplicamos ahora las propiedades del producto interior vistas en la actividad grupal 2.9 para obtener

$$\begin{aligned} \|a+b\|^2 &= (a+b) \cdot (a+b) \\ &= a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= \|a\|^2 + 2a \cdot b + \|b\|^2. \end{aligned}$$

De esta manera $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ si y sólo si $a \cdot b = 0$, es decir si y sólo si a y b son ortogonales. ∎

Ejercicio 2.5 Los ejercicios siguientes son muy importantes para consolidar los conocimientos adquiridos hasta ahora. Se recomienda que se realicen como actividad extraescolar, pero también pueden realizarse en un taller grupal de ejercicios.

1. Use las propiedades del producto interior de vectores para demostrar que $(a+b) \cdot (a-b) = \|a\|^2 - \|b\|^2$.
2. Determine cuáles pares de vectores son paralelos, cuáles perpendiculares o ninguna de las dos cosas.
   a) $(2,4)$ y $(-1/5, -2/5)$
   b) $(-18, 12)$ y $(2,3)$
   c) $(0,1)$ y $(-1,0)$
3. Calcule la suma y la resta de los vectores $(5,2)$ y $(-4,3)$ geométrica y algebráicamente.
4. Si $a = (-1,1)$, $b = (3,2)$ y $c = (4,6)$ calcule
   a) $a \cdot b$.
   b) $(a-c) \cdot b$.
   c) $(a+b) \cdot c - \|a\|^2$.
   d) $\|b-c\|$.
5. Si $a = (1,4)$ y $b = (-2,3)$ calcule la longitud de

   a) $-3(a-b)$
   b) $b/\|b\|$
6. Compruebe gráfica y analíticamente si es que los vectores son ortogonales
   a) $(1,5),(-4,1)$
   b) $(2,3),(9,-6)$
7. ¿Qué puede decirse de un vector cuando sabemos que es ortogonal a si mismo?

■

Vocabulario 2.1 En este capítulo hemos visto muchas palabras que pueden ser nuevas para los estudiantes, entre ellas *absisa, ordenada, ortogonal.* Escriba las palabras y sus definiciones. Haga dibujos que correspondan a las definiciones de las palabras correspondientes.

Planteamiento y resolución de problemas

Los problemas de esta sección serán en general, de mayor dificultad que otros ejemplos de este capítulo, se recomienda para el mejor aprovechamiento de los estudiantes que realicen la actividad grupal sugerida antes de que revisen la solución de los problemas.

■ **Ejemplo 2.4 — División de un segmento en una razón dada.** Consideramos un segmento $\overline{PQ}$ con puntos extremos $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$. Se desea encontrar las coordenadas del punto $M=(x,y)$ dada la razón $r=\dfrac{\|\overline{PM}\|}{\|\overline{MQ}\|}$. ■

Actividad grupal 2.10 El lector debe utilizar diagramas y dibujos para lograr un buen desempeño. Se pueden seguir las siguientes sugerencias, pero esta actividad puede dejarse enteramente al criterio de los estudiantes.
1. Utilice triángulos semejantes para determinar r con las coordenadas de P,Q,M. Dibuje los triángulos.
2. ¿Puede despejarse la coordenada x en alguna de estas razones? ¿Y la coordenada y?
3. ¿Cómo se encuentran las coordenadas del punto medio, es decir, que número debe ser r para que M divida al segmento a la mitad?

El taller no debe exceder media hora y pueden participar tres o más estudiantes por equipo.

■

Solución. Formamos los triángulos MRQ y PR_MM, donde $R=(x_2,y)$ y $R_M=(x,y_1)$, los cuales son semejantes (el estudiante debe ser capaz de argumentar esta afirmación). Como triángulos semejantes tiene lados proporcionales y las hipotenusas satisfacen $r=\dfrac{\|\overline{PM}\|}{\|\overline{MQ}\|}$, por lo tanto

$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x}$$

y

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y}.$$

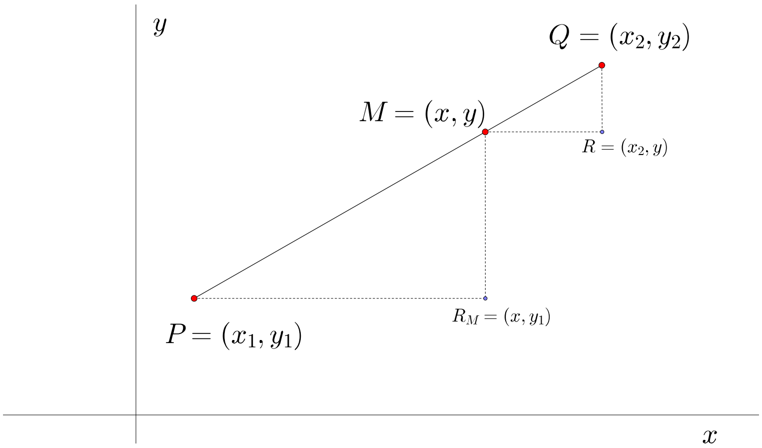


Figura 2.3: Diagrama del ejemplo 2.4.

Es posible despejar x de la relación $r=\frac{x-x_1}{x_2-x}$ siempre y cuando $r\neq -1$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r(x_2-x) &= x-x_1 \\ x+rx &= rx_2+x_1 \\ (1+r)x &= x_1+rx_2 \\ x &= \frac{x_1+rx_2}{1+r}. \end{aligned}$$

similarmente se obtiene

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}.$$

Por ejemplo, para dividir un segmento a la mitad se pone $r=1$ (¿por qué?) y así las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{PQ}$ son

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Debe notarse que razones negativas salvo $r=-1$, quedan fuera del segmento.

Ejercicio 2.6

1. Dados los puntos $P=(3,-2),Q=(-5,5)$ en el segmento $\bar{PQ}$ encuentre las coordenadas de los puntos que lo dividen: a) a la mitad; b) en un tercio.
2. Encuentre el número r que divide cualquier segmento de tal manera que $\|\bar{MQ}\|/\|\bar{PM}\|=\|\bar{PM}/\|\bar{PQ}\|$. Encuentre las coordenadas de M si P,Q son los puntos del inciso anterior.
3. ¿Qué pasa si $r<0$ y distinto de -1 experimente con $r=-1/2$ con los puntos del inciso 1.

■

■ **Ejemplo 2.5 — Proyecto: Proyección ortogonal, componentes, desigualdades importantes.** *Los proyectos de este libro requieren del estudiante de una mayor madurez matemática que el resto de las actividades y pueden ser omitidos en un primer curso de geometría analítica.*

Actividad grupal 2.11 — Proyección ortogonal, desigualdad del triángulo. Dados dos vectores a y b no paralelos es posible construir un triángulo rectángulo con hipotenusa a y base paralela a b, es decir, base sb, donde $s \in \mathbb{R}$ es un número por determinar. Se desea de esta manera construir un triángulo con catetos b y $c = a - sb$ tal que c sea ortogonal a b.

1. Exprese en forma vectorial por medio del producto punto la condición b ortogonal a $c = a - sb$.
2. De la relación anterior despeje s, observe que dado que a y b no son paralelos $a \cdot b \neq 0$.
3. Compruebe que el triángulo buscado con hipotenusa a tiene lados $\dfrac{a \cdot b}{\|b\|^2} b$ y $a - \dfrac{a \cdot b}{\|b\|^2} b$. Realice un dibujo del triángulo correspondiente con $a = (-3, 2)$ y $b = (1, -1)$.
4. Compruebe que el vector $\dfrac{b}{\|b\|}$ tiene norma uno.
5. El número $\dfrac{a \cdot b}{\|b\|}$ se llama componente del vector a en la dirección de b y se denota por $comp_b a$. Se tiene entonces
$$a \cdot b = \|b\| comp_b a.$$
Si θ es el ángulo formado por los vectores a y b ¿cuál es el valor de $comp_b a$ en términos de $\|a\|$ y $\cos\theta$?
6. Compruebe que
$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos\theta.$$
7. *Desigualdad de Schwarz.* Hemos construido un triángulo rectángulo con hipotenusa a y cateto adyacente b, dados, y con cateto opuesto $c = a - \dfrac{a \cdot b}{\|b\|^2} b$.
   a) Utilice el teorema de Pitágoras y las propiedades de la norma de vectores para mostrar que
$$\left|\frac{a \cdot b}{\|b\|}\right|^2 = \left\|\frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b\right\|^2 = \|a\|^2 - \|c\|^2.$$
   b) Muestre que $\|a\|^2 - \|c\|^2 < \|a\|^2$ y concluya que $\left|\dfrac{a \cdot b}{\|b\|}\right| < \|a\|$ y de aquí
$$|a \cdot b| < \|a\| \|b\|.$$
   c) Compruebe que si a y b son paralelos entonces se cumple que
$$|a \cdot b| = \|a\| \|b\|.$$
   d) El siguiente teorema esta incompleto, utilice la información obtenida en este proyecto para escribirlo correctamente.

Teorema 2.6 — Desigualdad de Schwarz. Para cualesquiera vectores a, b en $\mathbb{R}^2$ se cumple la desigualdad

$$\cdots \leqslant \cdots$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si.......

8. *La desigualdad del triángulo.* Muestre que $a \cdot b \leqslant |a \cdot b|$ y utilice la desigualdad de Schwarz para demostrar la llamada **desigualdad del triángulo**

$$\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|,$$

para este fin, escriba $\|a+b\|^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ y desarrolle el lado derecho de esta igualdad.

Recuerde que el proyecto anterior puede ser difícil para los estudiantes que por primera vez cursan geometría analítica y puede omitirse sin detrimento alguno. ■

Autoevaluación

El ejercicio de autoevaluación requiere de una seria autocrítica por parte del estudiante. Después de haber respondido los siguientes reactivos el estudiante debe buscar por sí mismo las respuestas y evaluarlas. Aquellos reactivos incorrectos requieren de un mayor estudio, individualizado. El estudiante debe ser capaz de buscar otros enfoques y más ejercicios por sí solo los cuales puedan paliar las dificultades encontradas.

1. Enuncie el teorema de Pitágoras en la forma vectorial. ¿Puede demostrarlo?
2. Se puede decir que dos vectores a, b son ortogonales si y sólo si...............
3. ¿Cómo puede comprobar que dos vectores dados son paralelos?
4. Si $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ calcule $d(a, b)$.

2.7 Problemas y ejercicios de repaso del capítulo

Para una cabal comprensión de la matemática se debe alcanzar ciertas etapas del conocimiento. En esta sección se proponen tres niveles o etapas:

a) La primera etapa o **nivel básico** requiere del estudiante comprender y ser capaz aplicar las fórmulas básicas, en este capítulo suma de vectores, producto por un escalar, producto punto, etcétera;
b) La segunda etapa o **nivel medio** en la que el estudiante, una vez superada la primera etapa, es capaz de plantear y resolver problemas empleando directamente las definiciones, teoremas y fórmulas de este capítulo;
c) La tercera etapa o **nivel de dominio**, en la que el estudiante es capaz de plantar y resolver problemas del máximo grado de dificultad cuya relación con los temas del capítulo no es inmediata, ni obvia.

De acuerdo con esta subdivisión se proponen los siguientes problemas.

Nivel básico

1. Divida el segmento formado por $(-1, 2)$ y $(3, -2)$ a la mitad y en un tercio de su longitud. Realice una gráfica que ilustre sus resultados.

2. Considere los vectores $a = (1, -3), b = (2, 1/2), c = (-1, 7)$. Calcule
   a) $a - b + c$
   b) $3a - c + 5b$
   c) $3(b - 2a) + 6a$
   d) $a \cdot (a + b)$
   e) $\|b - c\|$
3. Sean a, b vectores en $\mathbb{R}^2$. Resuelva las siguientes ecuaciones
   a) $4(1, -1) + 7a = (3, -2)$
   b) $-5b = (-2, 6)$
   c) $2[(5, -1) - a] = 2a + (1, 0)$
4. ¿Cómo puede saberse analíticamente si dos vectores son o no ortogonales? ¿Cómo puede saberse analíticamente si dos vectores son o no paralelos?

Nivel medio

1. El centro de gravedad de una varilla rectilínea homogénea está situado en el punto $M = (1, 4)$. Uno de los extremos de la varilla está en el punto $P = (-2, 2)$. Determine las coordenadas del otro extremo de la varilla.
2. Determine las coordenadas de los extremos de un segmento que esta dividido en tre partes iguales por los puntos $(2, 2)$ y $(1, 5)$
3. Dados los puntos $M = (2, 2)$ y $N = (5, -2)$ halle en el eje y un punto P tal que el ángulo MPN sea recto.
4. Muestre que el triángulo con vértices $(1, 1), (2, 3)$ y $(5, -1)$ es rectángulo.

Nivel de dominio

1. Por el punto $(4, 2)$ se ha trazado una circunferencia tangente a los dos ejes de coordenadas. Determine las coordenadas del centro de la circunferencia y el radio. (*Sugerencia: Observe que no se requiere la ecuación de la circunferencia.*)
2. Los vértices de un cadrilátero son $A = (-3, 12)$, $B = (3, -4)$, $C = (5, -4)$ y $D = (5, 8)$. Calcule la razón en la que la diagonal AC divide la diagonal BD.

3 La circunferencia

La mayoría de los libros de Geometría Analítica posponen el estudio de la circunferencia hasta que se haya visto la línea recta. En este libro estudiaremos primero la circunferencia dado que es mucho más simple en varios aspectos que la linea recta y dado que utilizaremos la ecuación de la circunferencia para estudiar la trigonometría analítica y algunas relaciones trigonométricas que se utilizarán, por ejemplo, para calcular el ángulo entre rectas.

3.1 Introducción

Una primera actividad de descubrimiento de la circunferencia debe incluir dos cosas, desde mi punto de vista. Una es, cómo construir una circunferencia y la otra, debe incluir el descubrir la relación entre el diámetro y longitud de la circunferencia. Para este fin se sugiere la siguiente actividad grupal

Actividad grupal 3.1 Esta actividad puede realizarse *en equipos de dos personas.* Se requiere del siguiente material: 50 cm de cuerda delgada, pero resistente o compás; hoja de cartulina; pegamento; al menos dos grupos de tres bolas de diferentes tamaños, por ejemplo, tres bolas de pingpong y tres bolas de tenis.

1. Con la cuerda o el compás deben trazarse circunferencias de varios tamaños. Se llamará centro de la circunferencia al extremo de la cuerda que queda fijo. Se llama circunferencia al conjunto de puntos dibujado al mover la cuerda alrededor del centro. ¿La distancia entre el centro y la circunferencia permanece constante o varía?
2. De un nombre adecuado al punto que permanece fijo al trazar la circunferencia. Se llama diámetro al segmento de recta que pasa por el centro de la circunferencia y la corta en dos.
3. Construya un cilindro que contenga verticalmente a tres bolas de un tamaño dado. La altura del cilindro debe ser exactamente la altura de las tres bolas. Enrolle la cuerda alrededor del cilindro, con ello obtenemos la medida de la circunferencia. Compare la circunferencia medida por la cuerda con la altura del cilindro. ¿Cuál

es mayor? ¿La relación de tres diámetros con la medida de la circunferencia podría conservarse sin importar el tamaño de las bolas? Comparen los resultados con las medidas de otros equipos.

Conclusiones. Escriba sus conclusiones y después de hacerlo, diga si está de acuerdo con las siguientes afirmaciones: a) Una circunferencia es el conjunto de puntos que está a una distancia constante de un punto fijo. b) Al dividir la medida de la circunferencia y el diámetro de la circunferencia se obtiene una constante, sin importar el tamaño de la circunferencia y, tal constante, es un poco mayor que tres. ■

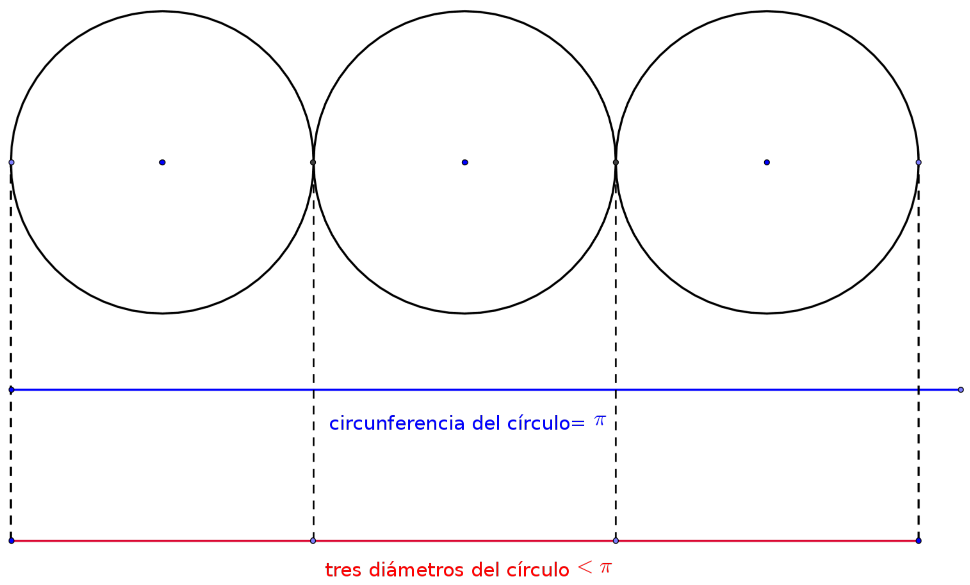


Figura 3.1: Relación entre el diámetro y la circunferencia del círculo

Vocabulario 3.1 Defina las palabras siguientes: circunferencia, centro de una circunferencia, radio, diámetro.

Después de completado el trabajo de la actividad grupal se puede presentar la siguiente definición.

Definición 3.1 Se llama circunferencia al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que se encuentra a una distancia constante $r > 0$ de un punto fijo C. Al punto C se le llama centro de la circunferencia y a la distancia r se le llama radio de la circunferencia.

N El hecho de los puntos de una circunferencia estén a una distancia constante del centro puede expresarse como "los puntos de la circunferencia **equidistan** del centro". Equidistar proviene de las palabras latinas *equi* = igual y *distare* = estar a una distancia dada. *Equidistar* significa entonces, estar a una distancia igual.

3.2 Ecuación de la circunferencia

Consideramos ahora una circunferencia con centro en el punto $(0,0)$ y radio r. Sea $P=(x,y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia. De acuerdo a la fórmula de distancia entre dos puntos (2.1) y la definición 3.1 se debe tener

$$d(\overline{0},P)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r \tag{3.1}$$

Al desarrollar y elevar al cuadrado se obtiene la ecuación

$$\boxed{x^2+y^2=r^2.} \tag{3.2}$$

De esta manera un punto está sobre la circunferencia de radio r si las coordenadas x y y del punto satisfacen la ecuación y recíprocamente, si un par de números x_1, y_1 satisfacen la ecuación (3.2) entonces el punto (x_1,y_1) está sobre la circunferencia.

■ **Ejemplo 3.1** Determine si los puntos $(1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(3,1)$ están sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Solución. Como $1^2+0^2=1$, el punto $(1,0)$ *está* sobre la circunferencia. Por otra parte, como $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ *está* sobre la circunferencia. Finalmente, como $3^2+1^2=10\neq 1$ el punto $(3,1)$ **no está** sobre la circunferencia. ■

Es muy importante que el estudiante obtenga por sí mismo las ecuaciones de las curvas estudiadas, para el caso de la circunferencia, la ecuación con el centro en un punto cualquiera. La siguientes actividades guiarán al estudiante para que logre este fin.

Actividad grupal 3.2 Se recomienda que esta actividad se desarrolle de manera individual y que los resultados se expongan de manera grupal.

1. Sea $P_0=(x_0,y_0)$ el centro de una circunferencia de radio r y sea $P=(x,y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia. Use la definición 3.1 y la fórmula de distancia entre dos puntos (2.1) para obtener una relación semejante a (3.1).
2. Desarrolle los binomios y eleve al cuadrado la raíz en la relación obtenida en el inciso anterior para obtener la ecuación

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \tag{3.3}$$

La ecuación (3.3) se conoce como ecuación canónica de la circunferencia con centro en (x_0,y_0) y radio r. ■

■ **Ejemplo 3.2** Determine si la ecuación $x^2+y^2-2x+y-1=0$ corresponde a una circunferencia.

Solución. Dado que la ecuación $x^2+y^2-2x+y-1=0$ contiene los términos $2x$, $-y$ si se trata de una circunferencia deberá corresponde a una circunferencia de la forma (3.3), al completar cuadrados se obtiene

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+y-1 &= (x^2-2x+1)+(y^2+y+\frac{1}{4})-1-1-\frac{1}{4} \\ &= (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De donde se llega a $(x-1)^2+(y+1/2)^2=9/4$, lo que corresponde a una circunferencia con centro en $(1,-1/2)$ y radio $r=\sqrt{9/4}=3/2$. ■

■ **Ejemplo 3.3** ¿La ecuación $x^2+y^2-2x+y+5/4=0$, corresponde a algún lugar geométrico?
Solución. Al completar cuadrados la ecuación $x^2+y^2-2x+y+5/4=0$, se puede escribir como

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+y+\frac{5}{4} &= (x^2-2x+1)+(y^2+y+\frac{1}{4})+\frac{5}{4}-1-\frac{1}{4} \\ &= (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x-1)^2+(y+1/2)^2=0$, lo que corresponde al punto $(1,-1/2)$, es decir, la ecuación es satisfecha solamente por un punto y **no corresponde a una circunferencia.** ■

■ **Ejemplo 3.4** Determine el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $x^2+y^2-2x+y+6/4=0$?
Solución. Al completar cuadrados en la ecuación $x^2+y^2-2x+y+6/4=0$, se tiene

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+y+\frac{6}{4} &= (x^2-2x+1)+(y^2+y+\frac{1}{4})+\frac{6}{4}-1-\frac{1}{4} \\ &= (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x-1)^2+(y+1/2)^2=-1/4$, lo que no puede ocurrir en los números reales ya que **la suma de dos cantidades mayores o iguales a cero no puede ser negativa.** Por lo tanto el conjunto que corresponde a la ecuación es el conjunto vacío, $\emptyset$. ■

Ejercicio 3.1
1. Determine si las siguientes ecuaciones definen una circunferencia
   a) $x^2+y^2-3/2x+5/4y-21=0$.
   b) $x^2+y^2+4x+6y+20=0$.
   c) $(x-1)^2+(y-1/6)^2+7=0$.
2. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en $(1,-1)$ y radio $r=1$.
3. Dibuje la circunferencia que pasa por $(-3,2)$ y con centro en $(6,3)$. ¿Cuál es su ecuación correspondiente?

■

La actividad grupal del comienzo del capítulo, los ejemplos y ejercicio anteriores ayudan a ver que el siguiente teorema resulta justificado.

Teorema 3.1 La ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia si y sólo si $D^2+E^2-4F>0$.

Demostración. Una circunferencia con centro en (x_0,y_0) y radio $r>0$ tiene por ecuación

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Al elevar al cuadrado se tiene

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y-r^2+x_0^2+y_0^2=0.$$

Poniendo $D=-2x_0$, $E=-2y_0$ y $F=-r^2+x_0^2+y_0^2$ se tiene que

$$D^2+E^2-4F=4x_0^2+4y_0^2-4(-r^2+x_0^2+y_0^2)=4r^2>0.$$

Recíprocamente de la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ se obtiene al completar cuadrados que

$$\begin{aligned} x^2+y^2+Dx+Ey+F &= (x^2+Dx+(D/2)^2)+(y^2+Ey+(E/2)^2)+F-(D/2)^2-(E/2)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} (x^2+Dx+(D/2)^2)+(y^2+Ey+(E/2)^2) &= -F+(D/2)^2+(E/2)^2 \\ (x+D/2)^2+(y+E/2)^2 &= \frac{1}{4}(D^2+E^2-4F). \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia con centro en $(-D/2,-E/2)$ y radio $r=1/2\sqrt{D^2+E^2-4F}$, si $D^2+E^2-4F>0$; representa un punto, si $D^2+E^2-4F=0$; finalmente, representa al conjunto vacío, si $D^2+E^2-4F<0$. ■

Ejercicio 3.2 Lea con cuidado la demostración anterior. Verifique que los cálculos son correctos rehaciéndolos con todos los detalles incluidos. ■

3.3 Trigonometría Analítica

En esta sección utilizaremos la ecuación de la circunferencia para introducir la medida en radianes para las funciones trigonométricas y para deducir algunas de las identidades trigonométricas más utilizadas. Las cuales se requieren extensamente al tratar la ecuación de la recta. Queremos advertir que no se trata de un curso sobre trigonometría, sino de cubrir algunos aspectos indispensables para la geometría analítica.

3.3.1 La circunferencia unitaria

A la circunferencia de radio $r = 1$, la cual tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 1$ se le llama *circunferencia unitaria.* En la actividad grupal 3.1 se encontró cierta evidencia de que al dividir la longitud de la circunferencia entre el diámetro de la misma, se obtiene una constante. Puede demostrarse, por ejemplo por medio de las herramientas del cálculo diferencial, que efectivamente **tal razón es una constante universal denotada por** π. El número π es un número irracional, es decir, no es cociente de números enteros[1]. Como consecuencia de no ser racional el desarrollo decimal de π=3.1415926..., no termina nunca, ni es periódico[2]. Si l denota la longitud total de una circunferencia dada y si el diámetro de la misma se denota por $2r$ donde r es radio de la circunferencia, el que π sea constante implica que

$$\pi = \frac{l}{2r}$$

para cualquier circunferencia dada, o bien

$$l = 2\pi r.$$

Así para la circunferencia unitaria, $r = 1$ y entonces $l = 2\pi$ es la longitud de su circunferencia.

Ahora estableceremos una correspondencia entre puntos de la circunferencia unitaria y la longitud correspondiente a partir del punto $(1,0)$ desde el cual comenzamos a medir. Denotamos por θ las longitudes de arco de circunferencia. Se establece que las longitudes positivas $\theta > 0$ se miden a partir de $(1,0)$ en sentido contrario de las manecillas del reloj y que las longitudes negativas se miden a partir de $(1,0)$ al moverse en el sentido de las manecillas del reloj.

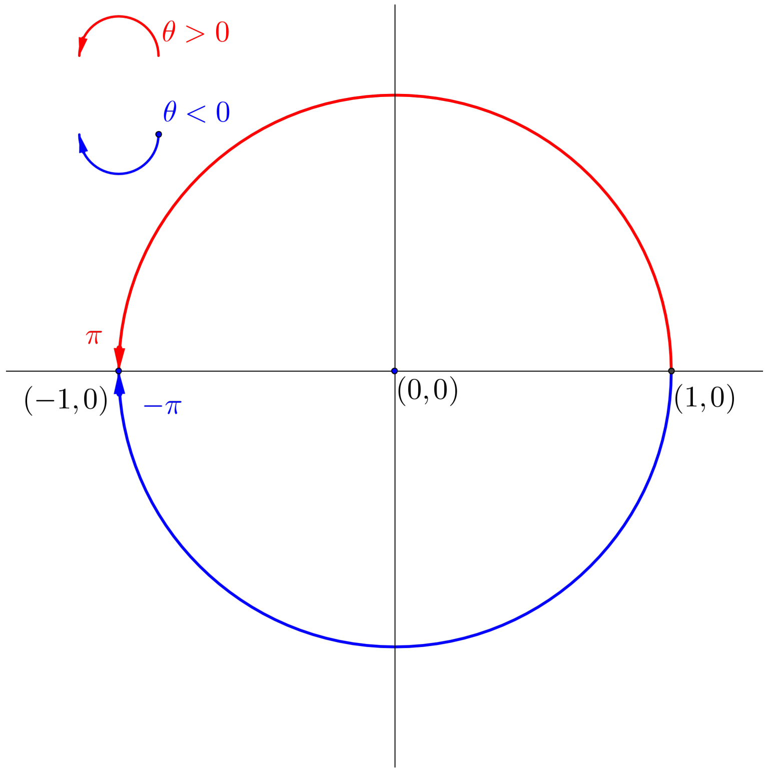
Al partir de $(1,0)$, cuando se llega al punto $(0,1)$ se habrá recorrido un cuarto de circunferencia con lo que a este punto le corresponde la longitud $\pi/2$. Al llegar al punto $(-1,0)$ habremos recorrido media circunferencia, por lo que a este punto le corresponde la longitud π. De esta misma manera al llegar al punto $(0,-1)$ habremos recorrido una circunferencia de $3/2\pi$. Al llegar al punto $(1,0)$ otra vez habremos recorrido una circunferencia completa de longitud 2π. A las unidades de longitud de arco se les llama **radianes**, por lo que al recorrer la circunferencia completa se habrán recorrido 2π radianes.

Si a partir de $(1,0)$ nos movemos en el sentido de las manecillas del reloj al llegar a $(-1,0)$ habremos recorrido una distancia de $-\pi$. De esta manera moviéndonos en el sentido de las manecillas del reloj al punto $(-1,0)$ le corresponde $-\pi$, etcétera. En general para cualquier número real θ, positivo, negativo o cero le corresponde un punto sobre la circunferencia unitaria. Si se piensa la longitud θ como un segmento o una cuerda, debe pensarse que al enrollar la cuerda sobre el círculo unitario se encuentra el punto de coordenadas (x,y) al cual le corresponde a θ.

En la enseñanza elemental se miden ángulos con grados, lo cual corresponde a la división de la circunferencia en 360°. Sin embargo, esta medida no es conveniente en matemáticas superiores por varias razones. En el siguiente taller se mencionan algunas de ellas.

[1] El número π es todavía más complicado, ya que es trascendente y el patrón de sus dígitos no se repite.

[2] De hecho, actualmente se conocen millones de dígitos de la expansión de π.



Actividad grupal 3.3 Al estudiar ángulos es decir, un par de segmentos de recta unidos en uno de sus extremos, la abertura entre ellos se puede medir en grados, por medio de un transportador o en radianes usando el círculo unitario. Algunas comparaciones son importantes.

1. ¿Conoce medidas negativas en grados? ¿Conoce medidas en grados mayores de $360°$? ¿Conoce medidas en valores irracionales de grados, es esto posible?
2. ¿Cuál es la relación entre grados y los radianes, es decir, las unidades en términos de la longitud de arco de la circunferencia unitaria? Es decir, ¿Cuántos radianes corresponden a $360°$?
3. Las funciones seno, coseno, etcétera se definen sobre triángulos, ¿tiene sentido hablar del $\operatorname{sen}(500°)$? Argumente por qué para triángulos rectángulos los valores que pueden tomar los ángulos para las funciones seno y coseno se encuentran restringidos a $0 < \theta < \pi/2$.

La discusión de esta actividad grupal puede incluir al grupo completo. ■

3.3.2 Las funciones trigonométricas

Definiremos ahora las funciones trigonométricas sobre el círculo unitario. De esta forma, podremos definirlas para todos los valores reales $\theta \in \mathbb{R}$, mientras que, como se discutió en la actividad 3.3, cuando se definen sólo para triángulos rectángulos, los valores que pueden tomar los ángulos se encuentran restringidos a $0 < \theta < \pi/2$.

Definición 3.2 Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera, sea (x,y) el punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ al que le corresponde el arco de circunferencia θ. Se definen las funciones trigonométricas por medio de la fórmulas

$$\operatorname{sen}\theta = y \tag{3.4}$$
$$\cos\theta = x \tag{3.5}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \tag{3.6}$$

■ **Ejemplo 3.5** Al arco $\theta = 5\pi/4$ le corresponde el punto $(x,y) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ sobre la circunferencia. Encuentre $\operatorname{sen} 5\pi/4$, $\cos 5\pi/4$ y $\tan 5\pi/4$.
Solución. De acuerdo con la definición 3.2, se tiene $\cos 5\pi/4 = x = -\sqrt{2}/2$, sen $\cos 5\pi/4 = y = -\sqrt{2}/2$ y, finalmente, $\tan 5\pi/4 = y/x = -\sqrt{2}/2/-\sqrt{2}/2 = 1$. ■

Periodicidad de las funciones trigonométricas

En la forma en que hemos construido las funciones trigonométricas, puede verse que después de recorrer una vuelta completa sobre la circunferencia, las funciones vuelven a tomar los mismos valores. De esta forma, para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \tag{3.7}$$
$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta. \tag{3.8}$$

Debido a esta propiedad se dice que **las funciones trigonométricas son periódicas** de periodo 2π.

■ **Ejemplo 3.6** Evalúe $\cos(9\pi/2)$ utilizando la periodicidad de la función coseno.
Solución. Dado que $9\pi/2 = 4\pi + 1\pi/2$ se tiene

$$\cos(9\pi/2) = \cos(4\pi + \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0.$$

Claramente, en general se tiene que $\cos(\theta + 2m\pi) = \cos\theta$ para cualquier entero m. ■

Funciones impares y pares

Podemos ver mediante un argumento geométrico simple sobre la circunferencia unitaria que para las funciones seno y coseno se cumple que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \tag{3.9}$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta. \tag{3.10}$$

Efectivamente en la siguiente figura puede observarse que $\operatorname{sen}(-\theta)$ está por debajo del eje x y por lo tanto es negativo y de magnitud igual al $\operatorname{sen}\theta$. Por otra parte se tiene que $\cos\theta$ y $\cos(-\theta)$ están del mismo lado del eje y y por lo tanto son ambos positivos y de la misma longitud. Como $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ se dice que **la función seno es impar**, y como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ se dice que **la función coseno es par**. Las identidades (3.9) y (3.10) se conocen como identidades de paridad de las funciones seno y coseno respectivamente y estas implican que

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta,$$

como puede fácilmente verificar el lector, lo cual quiere decir que la función tangente es impar.

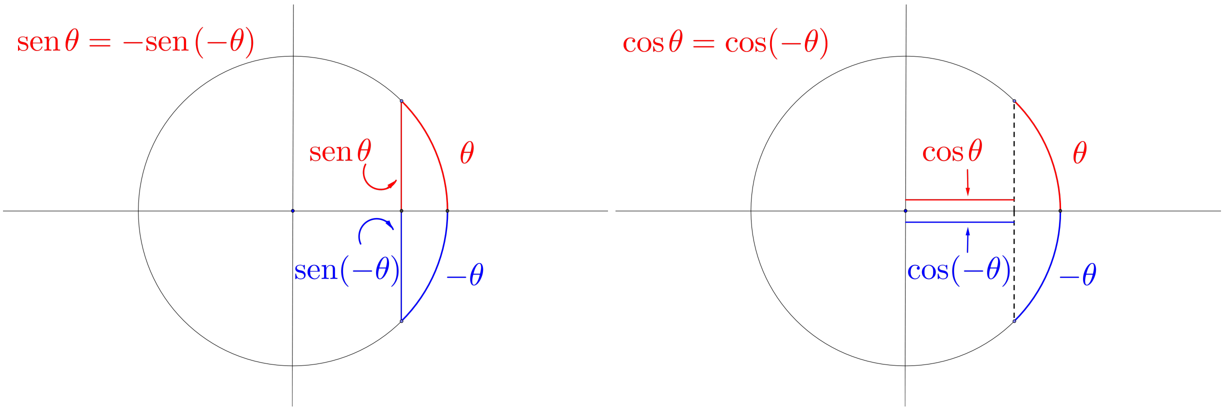


Figura 3.2: Identidades de paridad de las funciones seno y coseno.

Recíprocas de las funciones trigonométricas

Ahora definimos las funciones trigonométricas recíprocas.

Definición 3.3 Los inversos multiplicativos de las funciones trigonométricas definen las funciones, cosecante, secante y cotangente, respectivamente:

$$\begin{aligned} \csc\theta &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \\ \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} \\ \cot\theta &= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}. \end{aligned}$$

Para que el estudiante se familiarice con las funciones trigonométricas y sus recíprocas se recomienda el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.3 Al parámetro $\theta = 0$ le corresponde el punto $(x,y) = (1,0)$, a $\theta = \pi/6$, le corresponde el punto $(x,y) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ encuentre los valores de las funciones seno , coseno y tangente de estos ángulos, por medio de las definiciones 3.2 y 3.3.

Compruebe que la función cosecante es impar, la función secante par y la función cotangente impar, mediante las identidades de paridad (3.9) y (3.10). ■

Identidades trigonométricas

Al definir las funciones trigonométricas sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ se tiene que para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, $x = \cos\theta$ y $y = \operatorname{sen}\theta$, de donde es inmediato que

$$\boxed{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1, \qquad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}.} \tag{3.11}$$

N La notación $\cos^2\theta$, recordamos, quiere decir que se eleva al cuadrado el coseno, es decir,

$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2.$$

La notación $\cos\theta^2$ quiere decir que θ se eleva al cuadrado y después se toma el coseno. **Estas notaciones no deben confundirse.**

El siguiente lema se deduce fácilmente de la identidad (3.11).

Lema 3.1 Para los valores de θ donde están definidas las funciones tangente y cotangente respectivamente, se cumplen las identidades

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{3.12}$$
$$1+\cot^2\theta = \csc^2\theta. \tag{3.13}$$

Demostración. Para $\theta \neq \pm(2n+1)\pi/2$ se sabe que $\cos\theta \neq 0$ se puede entonces dividir ambos lados de la identidad (3.11) por $\cos\theta$ para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ 1+\tan^2\theta &= \sec^2\theta, \end{aligned}$$

donde la segunda identidad se obtiene de la definición 3.3. La segunda parte se deja como ejercicio. ■

Ejercicio 3.4 El siguiente ejercicio ayudara a memorizar las identidades de esta sección.

1. Demuestre la identidad (3.13).
2. Si se sabe que $\cos\theta = 0.8$ encuentre los valores de todas las demás funciones trigonométricas en θ por medio de identidades.
3. Si se sabe que θ es un ángulo agudo tal que $\tan\theta = 4$ calcule el valor de todas las demás funciones trigonométricas en ese ángulo.

Verifique los resultados de los problemas 2 y 3 por medio de una calculadora, no olvide usar el *modo radianes.* ■

Fórmulas de suma y diferencia de ángulos

La fórmula de distancia entre puntos es suficiente para demostrar las identidades trigonométricas para suma y diferencia de ángulos, las cuales aparecerán con frecuencia a lo largo de este libro. Primero demostramos la identidad para el coseno de una diferencia de ángulos.

Lema 3.2 Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}$ se cumple la identidad

$$\boxed{\cos(u-v) = \cos u\cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v.} \tag{3.14}$$

Demostración. Consideramos el caso $0 < v < u < 2\pi$ para comenzar. Denotamos con $i = (1,0)$, el punto sobre la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ que se intersecta con el semieje positivo x. Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ el punto correspondiente al arco v, sea $P_3 = (x_3, y_3)$ el punto correspondiente al arco u y sea $P_2 = (x_2, y_2)$ el arco correspondiente a $u-v$. Por construcción, el arco iP_2 es igual al arco P_2P_3, por lo tanto también se tiene que los segmentos $\overline{iP_2}$ y $\overline{P_2P_3}$ tienen la misma longitud, lo cual implica que

$$\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$$

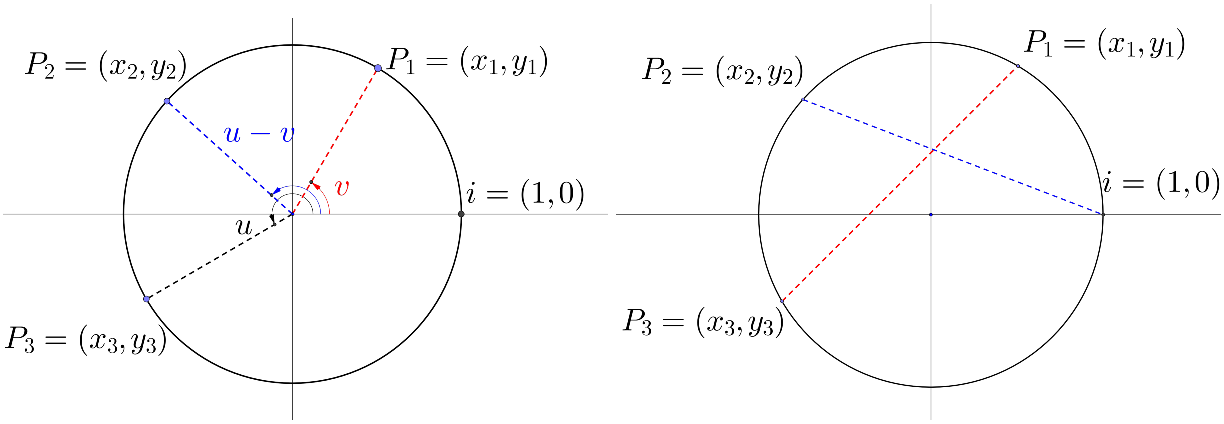


Figura 3.3: Diferencia de ángulos y arcos de circunferencia.

Al elevar al cuadrado y simplificar se tiene

$$\begin{aligned}
x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 &= x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_3 + y_1^2 \\
(x_2^2 + y_2^2) + 1 - 2x_2 &= (x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_3 - 2y_1y_3 \\
1 + 1 - 2x_2 &= 1 + 1 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1 \\
x_2 &= x_3x_1 + y_3y_1.
\end{aligned}$$

Dado que estamos sobre la circunferencia unitaria $x_2 = \cos(u - v)$, $x_3 = \cos u$, $x_1 = \cos v$, $y_3 = \operatorname{sen} u$ y $y_1 = \operatorname{sen} v$, de donde se obtiene la identidad que se desea demostrar. ■

Ejercicio 3.5 La fórmula para $\cos(u+v)$ puede derivarse de la fórmula (3.14) si escribimos $u+v = u-(-v)$ y se utilizan las fórmulas de paridad de las funciones trigonométricas (3.9) y (3.10):

$$\cos(u+v) = \cos(u-(-v)) = ?$$

Obtenga la fórmula $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$. ■

La identidad $\cos(\pi/2 - v) = \operatorname{sen} v$ implica que las gráficas de las funciones coseno y seno son idénticas si desplazamos el coseno $\pi/2$ unidades a la derecha. Por ello se llaman *co-funciones*, de donde proviene la palabra coseno.

■ **Ejemplo 3.7 — Fórmulas para co-funciones.** Muestre que la fórmula $\cos(\pi/2 - v) = \operatorname{sen} v$ es correcta.
Solución. Aplicamos la fórmula (3.14) para obtener

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} v.$$

Ahora, dado que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ se obtiene $\cos(\pi/2 - v) = \operatorname{sen} v$. ■

Ejercicio 3.6 El objetivo de este ejercicio es obtener la fórmula para suma de ángulos de la función seno, procederemos paso a paso.

1. De la fórmula del ejemplo 3.7, se tiene

$$\operatorname{sen}(u+v)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(u+v)\right),$$

expanda la fórmula del lado derecho de la identidad anterior de una forma apropiada para obtener la fórmula

$$\operatorname{sen}(u+v)=\operatorname{sen}u\cos v+\operatorname{sen}v\cos u.$$

2. Encuentre una fórmula para $\operatorname{sen}(u-v)$, similar a la anterior.
3. Obtenga las fórmulas correspondientes para $\tan(u\pm v)$ dividiendo la función seno apropiada por la función coseno correspondiente.

Es muy importante que el estudiante llegue por sí mismo a la fórmula

$$\tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v},$$

la cual es fundamental en estudio del ángulo entre rectas. ■

Fórmulas del ángulo doble

Finalmente, requeriremos también las fórmulas del ángulo doble para simplificar los cálculos para la rotación de ejes coordenados. Las expondremos en forma de lema y la demostración se hará en forma de actividad grupal.

Lema 3.3 Para toda $u\in\mathbb{R}$ se cumplen las identidades:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}2u &= 2\operatorname{sen}u\cos u, && (3.15)\\ \cos 2u &= \cos^2 u-\operatorname{sen}^2 u. && (3.16)\\ &= 2\cos^2 u-1 && (3.17)\\ &= 1-2\operatorname{sen}^2 u. && (3.18)\end{aligned}$$

Demostración. Se llega a la demostración por medio de la actividad grupal 3.4. ■

■ **Ejemplo 3.8** Escriba $\operatorname{sen}3x$ en términos de $\operatorname{sen}x$.
Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}3x &= \operatorname{sen}(2x+x)\\ &= \operatorname{sen}2x\cos x+\cos 2x\operatorname{sen}x\\ &= 2\operatorname{sen}x\cos^2 x+(1-2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}x\\ &= 2\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}^2 x)+(1-2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}x\\ &= 3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3 x,\end{aligned}$$

donde la última línea de las igualdades anteriores se obtiene después de simplificar y cancelar términos. ■

Actividad grupal 3.4 1) Escriba $2u = u + u$ en las fórmulas para coseno y seno de suma de ángulos y obtenga las identidades (3.15) y (3.16) del lema 3.3.
2) Compruebe las identidades (3.17) y (3.18) mediante la identidad pitagórica.
3) Del sistema

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \\ \cos u &= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

Obtenga las fórmulas del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} \tag{3.19}$$

$$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}. \tag{3.20}$$

Observe que los signos delante de las raíces cuadradas dependen del cuadrante en el que se encuentre $u/2$. ■

3.4 Planteamiento y resolución de problemas

En esta sección incluimos ejemplos más elaborados que los hechos hasta ahora a lo largo del capítulo. Se requiere un mayor esfuerzo de parte de los estudiantes para resolverlos. *Estos problemas no serán de ninguna utilidad si el estudiante no trata de resolverlos por sí mismo antes de ver la solución.*

■ **Ejemplo 3.9** Determine la longitud de la cuerda común a las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0.$$

Actividad grupal 3.5 Antes de ver la solución del ejercicio el estudiante debe hacer dibujos correspondientes, encontrar los centros de las circunferencias involucradas, dar argumentos analíticos del por qué se cortan las circunferencias, después debe proceder a los siguientes pasos:

1. ¿Qué se desea calcular? ¿Cómo puede hacerse?
2. Discuta como se puede saber si dos circunferencias se cortan sin hacer referencia a los dibujos, sino a los sistemas de ecuaciones.
3. Resuelva el sistema por suma y resta y encuentre las coordenadas de los puntos de intersección.
4. Encuentre la distancia entre los puntos, encontrado en el inciso anterior.
5. Finalmente compare sus procedimientos y resultados con los que se dan a continuación.

Haga un autoevaluación de su solución. Si sus resultados son incorrectos ¿qué fallo?, ¿Se trata de errores graves o simples equivocaciones? Reflexione. ■

Solución. Para resolver esta problema debemos encontrar los puntos de intersección de las circunferencias. Al completar cuadrados en la primera ecuación se obtiene $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ si y sólo si $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 50$, por lo que la circunferencia tiene centro en $(5,5)$ y radio $r = \sqrt{50}$. Al completar cuadrados en la segunda ecuación se tiene $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$ si y sólo si $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 50$, de esta forma la circunferencia tiene centro en $(-3,-1)$ y radio $r = \sqrt{50}$. Notamos que la distancia entre los radios es $\sqrt{(5-(-3))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{100} = 10 < 2r = 2\sqrt{50}$, por lo que efectivamente las circunferencias se intersectan. La gráfica de las circunferencias puede verse en la figura 3.4. Se desea calcular la distancia entre los puntos P_1 y P_2 de intersección de las dos circunferencias dadas para ello se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0. \end{cases}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera para obtener

$$16x + 12y = 40$$

de donde $y = (40-16x)/12 = -4x/3 + 10/3$, ya que los puntos de intersección pertenecen obviamente a ambas circunferencias se debe tener que al sustituir $y = -4x/3 + 10/3$, en cualquiera de ellas se debe mantener la igualdad, por ejemplo, al sustituirla en la segunda ecuación $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + (-4x/3 + 10/3)^2 + 6x + 2(-4x/3 + 10/3) - 40 &= 0 \\ x^2 + 256x^2 - 1280x + 1600 + 6x - 80 - 32x - 40 &= 0 \\ 25x^2 - 50x - 200 &= 0. \end{aligned}$$

De donde se obtienen dos soluciones $x = -2, 4$ y de aquí las respectivas $y = 6, -2$. Por lo tanto debemos encontrar la distancia entre los puntos $P_1 = (-2,6)$ y $P_2 = (4,-2)$. Por lo tanto $d(P_1,P_2) = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{100} = 10$. ∎

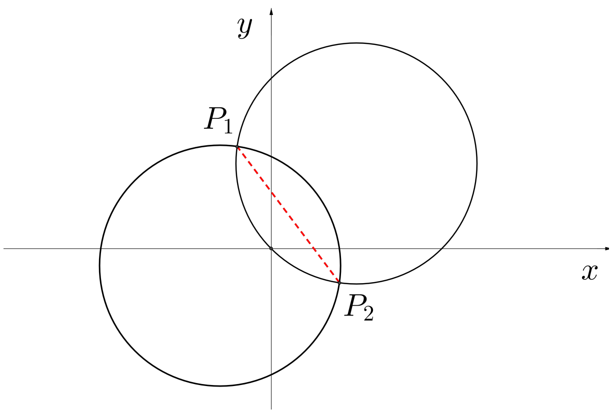


Figura 3.4: Gráfica del ejemplo 3.9.

3.4.1 Autoevaluación

El ejercicio de autoevaluación requiere de una seria autocrítica por parte del estudiante. Después de haber respondido los siguientes reactivos el estudiante debe buscar por sí mismo las respuestas y evaluarlas. Aquellos reactivos incorrectos requieren de un mayor estudio, individualizado. El estudiante debe ser capaz de buscar otros enfoques y más ejercicios por sí solo los cuales puedan paliar las dificultades encontradas.

1. ¿Qué puede decirse de la razón de la longitud de una circunferencia dividida por su radio?
2. Defina circunferencia.
3. ¿Por qué puede afirmarse que $\cos(-u) = \cos u$? ¿Y que relación se tiene de $\operatorname{sen}(-\theta)$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$?
4. Complete las siguientes identidades trigonométricas:
   a) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \cdots$
   b) $\cos 2\theta = \cdots$
   c) $\operatorname{sen} 2\theta = \cdots$
5. Explique cuáles diferencias hay entre medir los ángulos en radianes y medirlos en grados ¿puede convertir radianes a grados?

3.5 Problemas y ejercicios del capítulo

Nivel básico

1. Determine cuáles de las ecuaciones siguientes determinan una circunferencia, y encuentre el radio y las coordenadas del centro, cuando estos existan.
   a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$
   b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0.$
   c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0.$
   d) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}.$

   Soluciones.
   1a) circunferencia. 1b) vacío. 1c) un punto.
   1d) semicircunferencia.
2. Determine la región del plano de todos los puntos que satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 + 3x - 3y < 0.$
3. ¿Cómo está situado el punto $P = (-2, 3)$ con respecto a las siguientes circunferencias
   a) $x^2 + y^2 = 1.$
   b) $x^2 + y^2 = 15$
   c) $x^2 + y^2 = 16.$

   Soluciones.
   2a) Fuera de la circunferencia. 2b) Sobre de la circunferencia.
   2c) Dentro de la circunferencia.
4. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en $(-3, 2)$ y que pasa por $(-1, 3)$.
5. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en $(-7, 4)$ y radio $r = 3$.
6. Utilizando la identidad pitagórica y otras identidades, calcule los valores que faltan en la siguiente tabla

Función	$\theta = \pi/4$	$\theta = \pi/6$	$\theta = \pi/6$	$\theta = -\pi/4$	$\theta = -\pi/3$	$\theta = -\pi/6$
$\operatorname{sen}\theta$	$\sqrt{2}/2$					
$\cos\theta$		$\sqrt{3}/2$				
$\tan\theta$			$\sqrt{3}$			
$\sec\theta$						
$\csc\theta$						
$\cot\theta$						

7. Utilice la tabla anterior y la fórmula para suma de ángulos para encontrar
   a) El valor de $\cos(75^\circ) = \cos(30^\circ + 45^\circ)$.
   b) El valor de $\operatorname{sen}\pi/12$ si $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$.
8. Compruebe que

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}x}{h} = \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen}h}{h} - \operatorname{sen}x \cdot \frac{1-\cos h}{h}$$

   Esta última fórmula es muy importante en el cálculo.

Nivel medio

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $(1,1)$, $(1,-1)$, $(2,0)$.
2. Halle la distancia mínima del punto $(6,-8)$ a la circunferencia $x^2+y^2=9$.

Soluciones.

1. $(x-1)^2+y^2 = 1$. 2. 7.

Nivel avanzado

1. Determine el ángulo formado por la intersección de las dos circunferencias $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ y $(x-2)^2+(y+2)^2 = 2$. **Indicación.** No se requiere las ecuaciones de las rectas tangentes, use vectores solamente.

Soluciones.

1. $\pi/2$.

4 La línea recta

Con buenos fundamentos de trigonometría el estudiante no debe tener problemas para comprender la ecuación de la recta. Además, para un desempeño óptimo en los contenidos de este capítulo, el estudiante debe poseer algunos conocimientos básicos de geometría elemental, tales como:

- Las definiciones de rectas paralelas y perpendiculares.
- Ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Igualdad entre sí de: ángulos alternos internos, ángulos correspondientes, etcétera.
- Por dos puntos cualquiera del plano pasa una y sólo una recta.
- Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela.
- La suma de los ángulos internos de un triángulo es dos ángulos rectos.
- Definición de ángulos suplementarios y complementarios.

El profesor debe asegurarse mediante una evaluación diagnóstica cuál es el nivel de conocimientos de los estudiantes de los temas anteriores y actuar en consecuencia. Un conocimiento nulo de los temas enumerados se verá reflejado en un mínimo rendimiento de los estudiantes.

4.1 Pendiente de un segmento

Consideramos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $x_1 \neq x_2$. Si el segmento $\overline{P_1P_2}$ corta al eje x, el segmento forma un ángulo agudo θ con el eje x en el semiplano positivo $y \geqslant 0$. Si partiendo del punto de intersección, el ángulo agudo está del lado derecho del eje x entonces se considera positivo, ya que se mide hacia arriba en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Si el ángulo agudo está del lado izquierdo del eje x a partir del punto de intersección, entonces se considera negativo ya que se mide a partir del eje x hacia arriba en el sentido de las manecillas del reloj. Como $x_1 \neq x_2$ se tiene que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Si $y_1 = y_2$, entonces el segmento es paralelo al eje x y el ángulo que forman el segmento y el eje, es cero. Si el segmento no intersecta al eje x, el ángulo se mide prolongando el segmento de tal manera que la prolongación intersecte el eje x, se procede entonces a medir el ángulo de la prolongación con el eje x como se indicó arriba en este párrafo.

Consideremos el caso en el que el segmento no corta al eje x y es tal que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, es decir el caso en el que el segmento que une P_1 y P_2, *no es paralelo a ninguno de los ejes*. Si prolongamos el segmento lo suficiente para que corte el eje x, tendremos por geometría elemental que la prolongación del segmento forma dos ángulos suplementarios[1] con el eje en el semiplano positivo, uno mayor que $\pi/2$ y otro menor que $\pi/2$ al cual, como se sabe, es un ángulo agudo. Este ángulo es el que se considera para definir la pendiente.

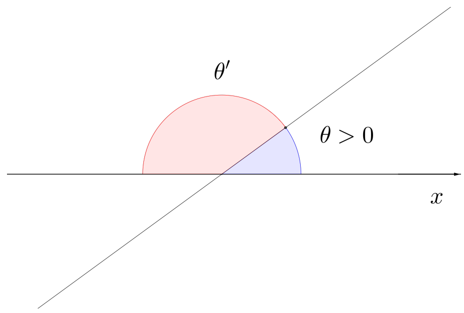


Figura 4.1: Se considera que el ángulo formado con el eje x es θ, no θ'.

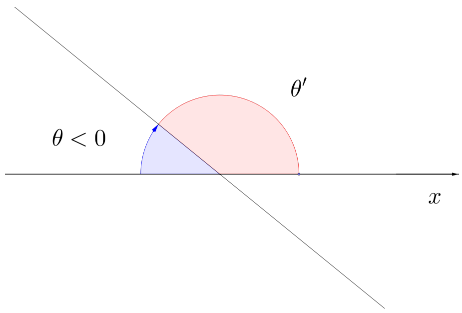


Figura 4.2: El ángulo formado con el eje x es θ, no θ'.

Definición 4.1 Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $x_1 \neq x_2$. Se define la pendiente m del segmento que une P_1 y P_2 como la tangente del ángulo agudo θ formado por el segmento y el eje x :

$$\boxed{m = \tan\theta.} \tag{4.1}$$

Lema 4.1 Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $x_1 \neq x_2$, entonces la pendiente m de la definición 4.1 está dada por

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.} \tag{4.2}$$

Demostración. Se tiene de la definición 4.1 y de las propiedades del valor absoluto que

$$|m| = |\tan\theta|.$$

[1]Ángulos suplementarios suman 180°.

Dado que $|\tan\theta|$ puede obtenerse con los catetos del triángulo rectángulo formado por

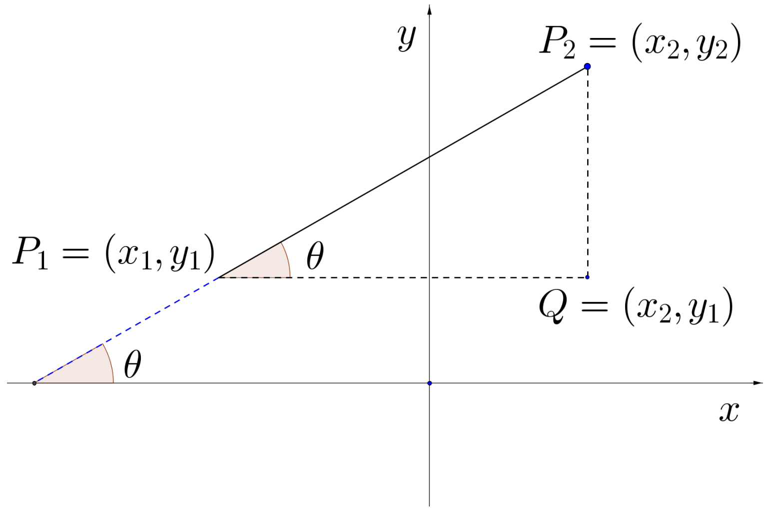


Figura 4.3: Pendiente para $\theta > 0$.

los segmentos $\overline{P_1Q}$ y $\overline{Qp_2}$ donde $Q = (x_2, y_1)$. Tenemos dada la definición de la función tangente:

$$|\tan\theta| = \frac{d(P_2, Q)}{d(Q, P_1)} = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}.$$

Ahora resta solamente analizar los diferentes casos, para quitar los signos de valor absoluto. Tenemos cuatro posibilidades:

i) **Caso** $y_2 \geqslant y_1$ **y** $x_2 > x_1$**.** Este caso corresponde a la figura 4.3 y se tiene $\theta \geqslant 0$, por lo que $\tan\theta \geqslant 0$ y por lo tanto $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, como afirma el lema.

ii) **Caso** $y_2 \geqslant y_1$ **y** $x_2 < x_1$**.** Este caso corresponde la figura 4.4 y se tiene $\theta \leqslant 0$, por lo que $\tan\theta \leqslant 0$, lo cual también se obtiene con el cociente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ya que en este caso $x_2 - x_1 < 0$.

iii) **Caso** $y_2 \leqslant y_1$ **y** $x_2 > x_1$**.** Este caso se tiene $\theta \leqslant 0$, pero $y_2 - y_1 \leqslant 0$ y $x_2 - x_1 > 0$. Por lo tanto nuevamente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

iv) **Caso** $y_2 \leqslant y_1$ **y** $x_2 < x_1$**.** En este caso nuevamente $\theta \geqslant 0$, $\tan\theta \geqslant 0$ lo cual nuevamente da $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ya que si $y_2 - y_1 < 0$ y $x_2 - x_1 < 0$, y el cociente de dos números negativos es un número positivo, o bien, si $y_2 = y_1$ entonces $m = 0$, como corresponde. ■

Ejercicio 4.1 Calcule la pendiente de los segmentos PQ, QP, QR, donde $P = (1, 2)$; $Q = (9, 3)$ y $R = (-2, 5)$. Haga una gráfica que corresponda a este ejercicio. ■

Actividad grupal 4.1 Para esta actividad el grupo debe dividirse en cuatro tipos de equipos, los equipos no deben tener más de cuatro estudiantes. Esta actividad tiene por objetivo que los estudiantes comprendan los detalles de la demostración del lema 4.1.

1. A cada equipo debe asignarse uno de los casos del lema 4.1. Los estudiantes deben dar ejemplos de coordenadas que ilustren cada caso, por ejemplo para el

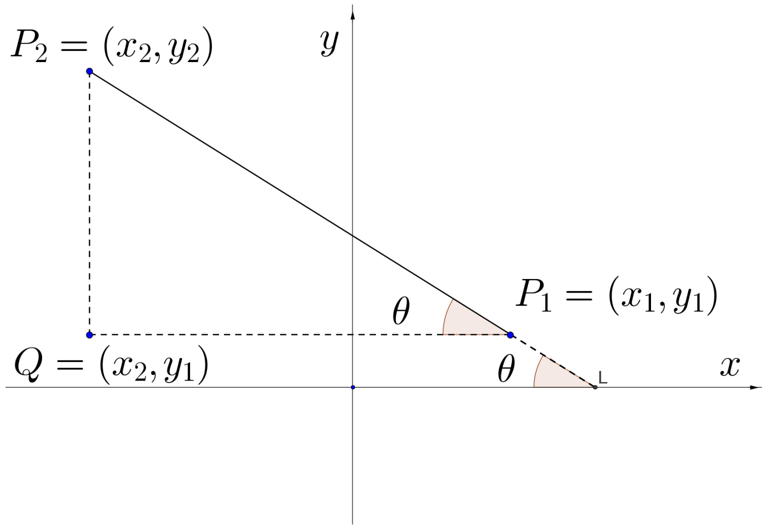


Figura 4.4: Pendiente para $\theta < 0$.

caso i) $P_1 = (1,1)$ y $P_2 = (3,3)$. Los estudiantes deben hacer dibujos con sus ejemplos y calcular m.

2. Los estudiantes deben mostrar grupalmente sus ejemplos.
3. Debe realizarse la siguiente discusión: ¿Qué pasa si definimos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$? ¿Se altera el resultado o da lo mismo que calcularla con la fórmula (4.1)?

Para este taller es muy importante que se dé una discusión donde se confronten puntos de vista diferentes, si desde el principio hay algún consenso en los estudiantes el profesor debe participar disintiendo del consenso de manera deliberada. ■

N Es muy importante para el proceso de aprendizaje de la definición de pendiente, que el estudiante se dé cuenta que no importa que punto se llame P_1 y cuál P_2, el resultado será **correcto**, siempre y cuando una vez establecido cual es cual, se tome

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y **no de ninguna otra forma.** Este hecho no es fácil de asimilar y algunos estudiantes tendrán una resistencia natural para aprenderlo. Se debe ser paciente cuando se detecten errores y procurar actividades de descubrimiento individualizadas, con ejemplos concretos. Debe tenerse en cuenta que sólo cuando exista disposición por parte del estudiante para detectar y corregir sus propios errores podrá lograrse algún avance.

Después de un análisis y discusión del lema 4.1 se puede proceder a definir la línea recta.

Definición 4.2 — Línea recta en $\mathbb{R}^2$. Una línea recta en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos del plano tales que la pendiente m de cualesquiera dos puntos diferentes en tal conjunto es constante.

4.2 Ecuación de la línea recta

La esencia de la geometría analítica es, como ya hemos mencionado, asociar con una línea dada un ecuación y recíprocamente. Para el caso de la línea recta tenemos que distinguir el caso en los que el ángulo formado con el eje x es $\theta = \pi/2$ y el caso en el que si $\theta \neq \pi/2$ el ángulo θ considerado, es el *ángulo agudo* formado con el eje x.

Caso $\theta = \pi/2$. Observe que si $\theta = \pi/2$ entonces $\tan \pi/2$ **no está definida.** En este caso la recta es paralela al eje y y la coordenada x de todo punto sobre la recta permanece constante, digamos, $x = c$ donde $c \in \mathbb{R}$ es un número fijo. *Tiene sentido entonces definir la ecuación cartesiana de las rectas verticales como*

$$x = c.$$

■ **Ejemplo 4.1** La recta $x = -3$, es la recta paralela al eje y que pasa por el punto $(-3,0)$. La recta con ecuación $x = 0$ corresponde al eje y. ■

Caso $-\pi/2 < \theta < \pi/2$**.** En esta caso existen varias posibilidades, a saber: i) Se conoce el ángulo θ formado por la recta y el eje x, o bien la pendiente m, y se conoce un punto $P_o = (x_o, y_o)$ sobre la recta. ii) Se conoce un vector paralelo a la recta y un punto $P_o = (x_o, y_o)$ sobre la recta.

i) Sea $\theta \in (\pi/2, \pi/2)$ el ángulo agudo que forma la recta con el eje x, entonces $m = \tan\theta$. Sea $P_o = (x_o, y_o)$ un punto dado sobre la recta. Si $P = (x,y)$ es un punto cualquiera sobre la recta se debe tener

$$m = \frac{y - y_o}{x - x_o}$$

por el lema 4.1. Tenemos entonces la ecuación

$$\boxed{y - y_o = m(x - x_o).} \tag{4.3}$$

La ecuación (4.3) se conoce como **ecuación de la recta en la forma punto pendiente.** Por otra parte, si (x_2, y_2) es un punto que satisface la ecuación (4.3) entonces se tiene que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y, por la definición 4.2 el punto pertenece a la recta.

ii) Sea $P_o = (x_o, y_o)$ un punto sobre la recta y $a = (\alpha, \beta)$ un vector paralelo a la recta. Si $P = (x,y)$ es un punto cualquiera sobre la recta debemos tener que existe un número t tal que

$$P - P_0 = ta,$$

debido a la definición de vectores paralelos. De esta manera

$$\boxed{(x,y) = (x_o, y_o) + t(\alpha, \beta),} \tag{4.4}$$

la ecuación (4.4) se conoce como **ecuación vectorial de la recta.** Al variar t sobre todo el conjunto $\mathbb{R}$ se obtiene la recta completa, es decir, la recta puede describirse como el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (x_o, y_o) + t(\alpha, \beta), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Igualando componente a componente se tienen las llamadas **ecuaciones paramétricas de la recta**

$$\begin{cases} x = x_o + t\alpha, \\ y = y_o + t\beta, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.5}$$

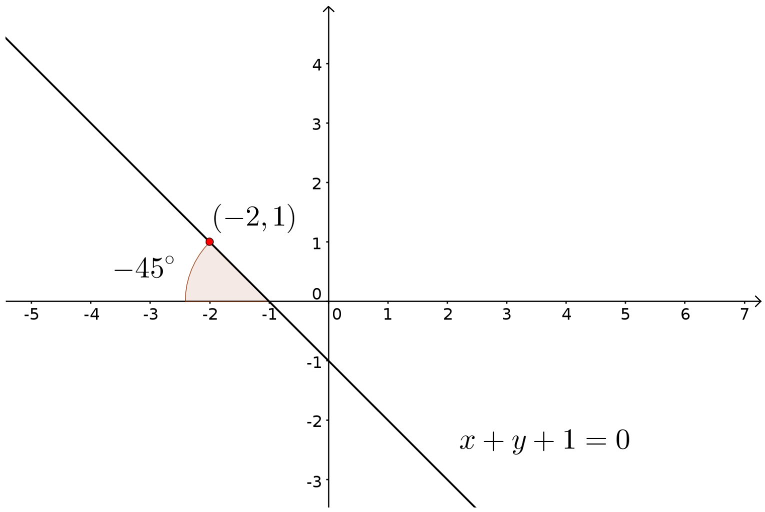
■ **Ejemplo 4.2** Supongamos que una recta forma un ángulo de $-45°$ con el eje x y que la recta pasa por $(-2,1)$. Encuentre la ecuación de la recta.
Solución. Tenemos $m = \tan(-45°) = -1$. Entonces podemos usar la ecuación (4.3) para obtener

$$y - 1 = m(x - (-2)) = (-1)(x+2)$$

o bien simplificando

$$x + y + 1 = 0.$$

Generalmente es deseable escribir la ecuación de la recta como lo hemos hecho, es decir



con todos los miembros de la ecuación del lado izquierdo y cero del lado derecho. Esta forma se conoce como **forma general de la ecuación de la recta**, como veremos más adelante. ■

■ **Ejemplo 4.3** Encuentre las *ecuaciones paramétricas* de la recta paralela al vector $(1,1)$ y que pasa por el punto $(-1,2)$. Encuentre también la ecuación cartesiana de la recta en la *forma general.*
Solución. Utilizamos la ecuación vectorial de la recta (4.4) para obtener

$$(x,y) = (-1,2) + t(1,1) = (-1+t, 2+t)$$

de donde las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para obtener la ecuación cartesiana se despeja t de las dos ecuaciones

$$\begin{cases} t = x + 1 \\ t = y - 2, \end{cases}$$

Como $t = t$ se tiene

$$x + 1 = y - 2$$

O bien la ecuación en la forma general $x - y + 3 = 0$. ■

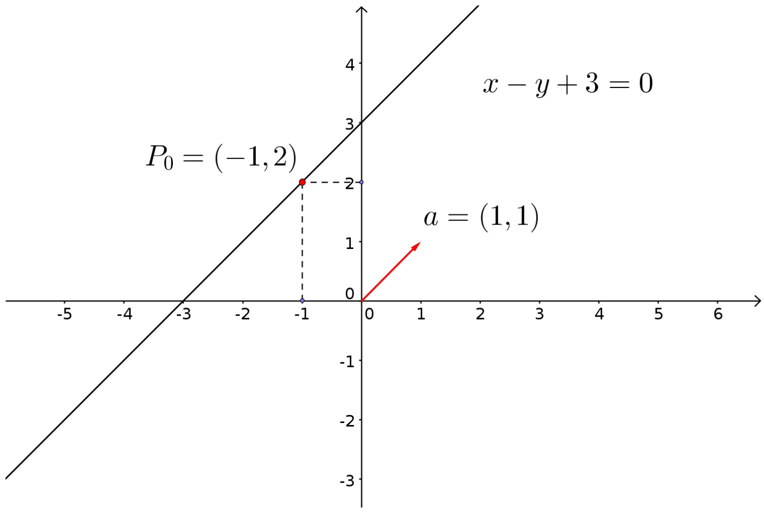


Figura 4.5: Gráfica del ejemplo 4.3

Después de las consideraciones anteriores aparecen varias combinaciones posibles para calcular la ecuación de una recta. También los resultados clásicos de la geometría euclidiana pueden formularse en el lenguaje de la geometría analítica. Por ejemplo, el postulado de la geometría eucludiana, *por dos puntos cualesquiera pasa una y sólo una recta,* puede formularse como un teorema en el contexto de la geometría analítica.

Teorema 4.1 Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera del plano, entonces existe una recta y sólo una que pasa por ellos.

Ejercicio 4.2 Demuestre el teorema 4.1. **Sugerencia.** ¿Qué debería ocurrir para que no fuera cierto? ■

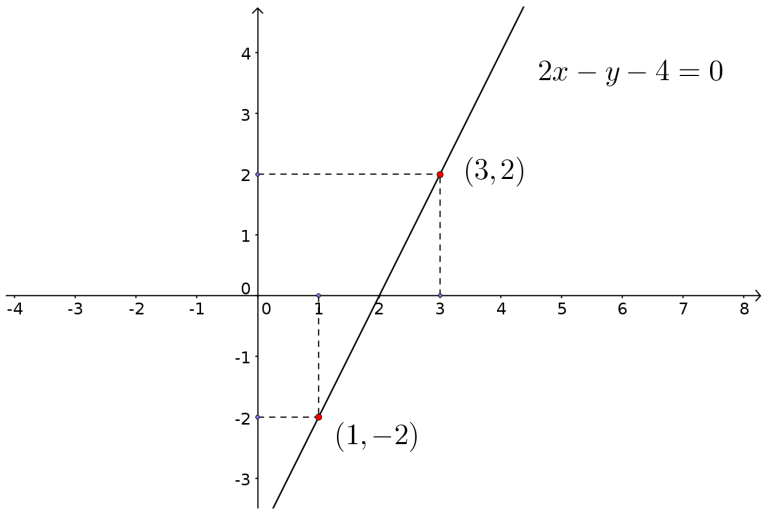
Partiendo de este teorema se encuentra la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.

Corolario 4.1 Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera del plano $\mathbb{R}^2$. La ecuación de la recta que pasa por P_1 y P_2 es

$$\begin{cases} y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), & \text{si } x_1 \neq x_2, \\ x = x_1, & \text{si } x_1 = x_2. \end{cases} \tag{4.6}$$

Demostración del Corolario 4.1. Por el teorema 4.1 existe una y sólo una recta que pasa por P_1 y P_2. Supongamos para comenzar que $x_1 \neq x_2$. Sea $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ entonces de acuerdo al caso i) de la discusión anterior, se tiene que el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen $y - y_1 = m(x - x_1)$ están en la recta que pasa por P_1 y P_2. Los demás detalles de la demostración se dejan como ejercicio. ■

■ **Ejemplo 4.4** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1,-2)$ y $(3,2)$.



Solución. Recuerde de la discusión del tema *la pendiente entre dos puntos* que no importa cuál punto se etiquete como P_1 y cuál como P_2. Por ejemplo, sean $P_1 = (3,2)$ y $P_2 = (1,-2)$. Entonces

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{1-3} = 2.$$

Por lo tanto la ecuación de la recta dada por (4.6) es

$$y - 2 = 2(x-3).$$

Al simplificar se tiene $2x - y - 4 = 0$. ■

Ejercicio 4.3 Repita el ejemplo anterior poniendo $P_2 = (3,2)$ y $P_1 = (1,-2)$ (es decir, al revés del ejercicio anterior). Compruebe que se llega a la misma ecuación: $2x - y - 4 = 0$. ■

Actividad grupal 4.2 — Otras formas de la ecuación de la recta. En esta actividad exploraremos otras maneras de expresar la ecuación de la recta, las cuales pueden obtenerse fácilmente partiendo de las ya vistas.
1) **Forma pendiente, ordenada al origen.** Si se conoce la pendiente m de una recta y se sabe que la recta pasa por el punto $(0,b)$, encuentre la ecuación de la recta por medio de la fórmula 4.3. Compruebe que la fórmula es

$$y = mx + b$$

llamada *ecuación de la recta en la forma pendiente, ordenada al origen*. Grafique la recta considerando un número $b \neq 0$, en abstracto. El número b se conoce como *ordenada al origen de la recta*. Encuentre la ecuación de la recta con pendiente $m = -2$ y ordenada al origen $b = 3$. Dibuje la gráfica de la recta que obtuvo.

Compruebe que cualesquiera dos puntos que satisfagan la ecuación $y = mx + b$ forman un ángulo constante con el eje x, es decir, están en una recta de acuerdo con la definición 4.2.

2) **Ecuación simétrica de la recta.** Si una recta pasa por los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$ con a y b distintos de cero, use la fórmula 4.6 para obtener la ecuación de la recta $ay=-bx+ab$. Multiplique por términos adecuados para obtener la ecuación

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

La ecuación anterior se llama de la *ecuación simétrica de la recta*. Por medio de la ecuación $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$, grafique la recta correspondiente encontrando las intersecciones de la recta con los ejes coordenados. ■

N Es importante que el profesor tome ciertas precauciones para que la proliferación de formas diferentes de la ecuación de la recta **no abrume al estudiante**. Lo esencial aquí es que las diversas formas pueden aplicarse dependiendo las hipótesis del problema que se considere, pero a fin de cuentas todas pueden llevarse a la forma general. Si se desea que el estudiante pase de una a otra forma con fluidez deberá entonces dedicarse un tiempo considerablemente largo a actividades que lo propicien, en nuestro enfoque, esto no es uno de nuestros objetivos.

A partir de mi experiencia personal, se debe hacer énfasis en la ecuación vectorial de la recta, ya que esta se generaliza a dimensiones superiores, (en particular se generaliza a $\mathbb{R}^3$) mientras que la ecuación cartesiana no se generaliza a dimensiones superiores, lo cual suele confundir al estudiante (por ejemplo, algunos estudiantes pueden creer que en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $y=x$ representa una recta, mientras que, como es sabido, representa un plano). En los cursos de geometría analítica, previos al curso de cálculo, se debe dar prioridad a la ecuación de la recta en la forma general ya que no da prioridad a ninguna variable sobre la otra, lo que se hace también con las cónicas, este enfoque es preferible en un curso elemental.

Ecuación de la recta en la forma general

En esta parte estableceremos la correspondencia entre rectas y una *ecuación lineal* llamada ecuación de la recta en la forma general.

Teorema 4.2 La ecuación

$$Dx+Ey+F=0 \tag{4.7}$$

corresponde a una recta en el plano $\mathbb{R}^2$ si, o bien $D\neq 0$, o bien $E\neq 0$, o bien ambos coeficientes D y E son distintos de cero. Recíprocamente, una recta en el plano $\mathbb{R}^2$ tiene una ecuación de la forma (4.7) donde al menos uno de los coeficientes D o E es distinto de cero.

Demostración. Si $E=0$, entonces $D\neq 0$ y podemos dividir ambos miembros de la ecuación $Dx=-F$ por D, para obtener $x=-F/D$, pero $-F/D=c$ es una constante y por lo tanto la ecuación corresponde a una recta vertical de acuerdo la definición 4.2 ya que cualesquiera dos puntos sobre ella forman un ángulo de 90° con el eje x. Recíprocamente una recta vertical tiene por ecuación $x=c$, lo cual corresponde a la ecuación (4.7) con $D=1$, $E=0$ y $F=-c$.

Si $E\neq 0$, pero $D=0$ un análisis similar al del párrafo anterior indica que $y=-F/E=c$, lo cual corresponde a una recta horizontal ya que cualesquiera dos puntos sobre ella forman un ángulo de cero grados con el eje x. Recíprocamente, una recta horizontal tiene por ecuación $y = c$, lo cual se sigue inmediatamente de la ecuación (4.3). La ecuación $y = c$ es de la forma (4.7), claramente, con $D = 0$, $E = 1$ y $F = -c$.

Finalmente, si $D \neq 0$ y $E \neq 0$ se tiene $y = -E/Dx - F/D$, lo cual corresponde a una recta con pendiente $m = -E/D$ y ordenada al origen $b = -F/D$, de acuerdo a la actividad grupal 4.2. Recíprocamente, al tomar dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ sobre una recta que no sea vertical ni horizontal se tiene que cualquier punto (x, y) sobre la recta, satisface la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ donde $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ de donde $mx - y + (y_1 - mx_1) = 0$ es de la forma de la ecuación (4.7) con $D = m \neq 0$, $E = -1$ y $F = y_1 - mx_1$. ■

■ **Ejemplo 4.5** Dibuje la gráfica de la línea correspondiente a la ecuación

$$3x + 2y - 1 = 0.$$

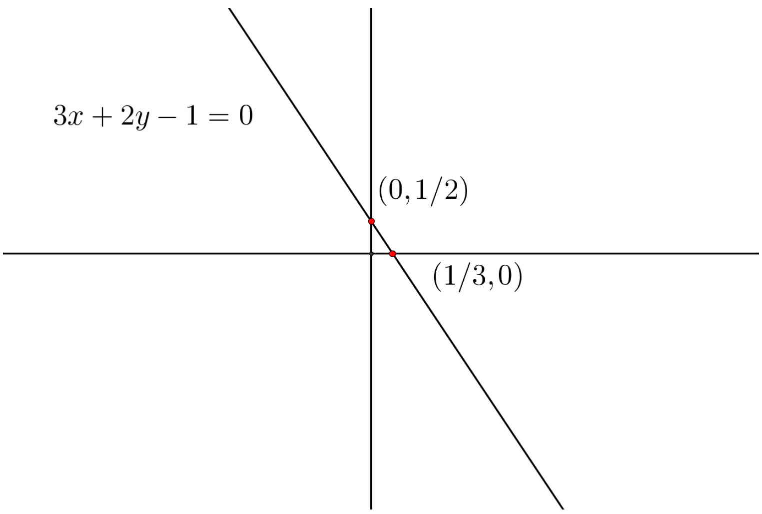
Solución. De acuerdo al teorema 4.2 la ecuación $3x + 2y - 1 = 0$ corresponde a una línea recta en el plano $\mathbb{R}^2$. Para graficarla basta encontrar dos puntos sobre la recta, ya que dos puntos determinan de manera única una recta. Si hacemos $x = 0$ en la ecuación $3x + 2y - 1 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 2y &= 1 \\ y &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto el punto $(0, 1/2)$ está sobre la recta. Si ahora hacemos $y = 0$ y despejamos x en la ecuación $3x + 2y - 1 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 3x &= 1 \\ x &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

por lo tanto el punto $(1/3, 0)$ está sobre la recta. La gráfica se muestra en la siguiente figura. ■



Posiciones relativas entre rectas

En esta sección estudiaremos el paralelismo y ortogonalidad entre rectas. Serán importantes tanto la ecuación general como la ecuación vectorial de la recta. comenzamos con una definición.

Definición 4.3 Dos rectas son paralelas si y sólo si forman el mismo ángulo con el eje x.

Lema 4.2 Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Demostración. Dos rectas diferentes son paralelas si y sólo si forman el mismo ángulo θ con el eje x, lo cual ocurre si y sólo si tienen la misma pendiente $m = \tan\theta$. ■

Corolario 4.2 Dos rectas son paralelas si y sólo, si sus vectores de dirección son paralelos.

Demostración. Dadas dos rectas $\mathscr{L}_1 = \{(x,y) : (x,y) = P_1 + ta_1, t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(x,y) : (x,y) = P_2 + sa_2, s \in \mathbb{R}\}$ las rectas son paralelas si y sólo si forman el mismo ángulo θ con el eje x. El ángulo de $\mathscr{L}_1$ con el eje x está dado por la fórmula $\cos\theta = \dfrac{a_1 \cdot i}{\|a_1\|}$ donde $i = (1,0)$ es el vector unitario en la dirección del eje x. Por otra parte a_1 y a_2 son paralelos por lo tanto existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 = \beta a_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\beta > 0$. Se tiene entonces que

$$\frac{a_2 \cdot i}{\|a_2\|} = \frac{\frac{1}{\beta}a_1 \cdot i}{\left\|\frac{1}{\beta}a_1\right\|} = \frac{a_1 \cdot i}{\|a_1\|} = \cos\theta.$$

Por lo tanto las rectas forman el mismo ángulo con el eje x. La parte que falta de este lema se deja como ejercicio. ■

Recordamos que el ángulo θ entre dos vectores a,b está dado por la fórmula $a \cdot b = \|a\|\|b\|\cos\theta$ y así dos vectores son perpendiculares si $\theta = \pi/2$ y en tal caso $a \cdot b = 0$ (ver también teorema 2.4). Para la perpendicularidad u ortogonalidad de dos rectas se tiene de manera natural la siguiente definición.

Definición 4.4 Dos rectas $\mathscr{L}_1 = \{(x,y) : (x,y) = P_1 + ta_1, t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(x,y) : (x,y) = P_2 + sa_2, s \in \mathbb{R}\}$ son perpendiculares si y sólo $a_1 \cdot a_2 = 0$.

Observe que dos rectas son perpendiculares si el ángulo formado a_1 y a_2 es $\pi/2$.

■ **Ejemplo 4.6** Determine si las rectas $\mathscr{L}_1 = \{(x,y) : (x,y) = (3,-1) + t(1,1), t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(x,y) : (x,y) = s(-1,1), s \in \mathbb{R}\}$ son perpendiculares.
Solución. Los vectores de dirección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son $a_1 = (1,1)$ y $a_2 = (-1,1)$ respectivamente. Se cumple entonces que

$$a_1 \cdot a_2 = (1,1) \cdot (-1,1) = -1 + 1 = 0.$$

Por lo tanto las rectas son perpendiculares. ■

Cuando está definida la pendiente de las rectas (es decir, cuando ninguna de las rectas es vertical) la ortogonalidad queda caracterizada por el siguiente lema.

Lema 4.3 Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a menos uno.

Demostración. Sean $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ dos rectas. Estas rectas tienen ecuaciones vectoriales $(x, y) = (0, b_1) + t(m_1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y) = (0, b_2) + s(m_2, 1)$, $s \in \mathbb{R}$, como puede comprobar el lector. El ángulo entre las rectas está dado por el producto punto:

$$(m_1, 1) \cdot (m_2, 1) = m_1m_2 + 1$$

por lo tanto las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$, que es lo que se quería demostrar. ■

Algunos detalles de la demostración así como la deducción trigonométrica del lema 4.3 se trabajan en el siguiente taller.

Actividad grupal 4.3 Algunos detalles de la demostración así como la demostración trigonométrica del lema 4.3 se trabajan en el siguiente taller.

1. Argumente porqué una ecuación vectorial de la recta $y = mx + b$, es
$$(x, y) = (0, b_1) + t(m_1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$
2. De la fórmula
$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v},$$
encuentre la identidad trigonométrica para $\cot(u - v)$.
3. Compruebe por medio de la identidad que obtenida en el ejercicio anterior que dos rectas son ortogonales si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

Acompañe sus argumentos con dibujos en los que queden expresados claramente los ángulos involucrados. La discusión de lo obtenido en estas actividades debe incluir a todo el grupo. ■

Normal a una recta en $\mathbb{R}^2$ y ángulo entre rectas

Consideramos una recta $Dx + Ey + F = 0$ y un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sobre ella, entonces las coordenadas de P_0 satisfacen la ecuación $Dx_0 + Ey_0 + F = 0$, al restar las ecuaciones obtenemos

$$D(x - x_0) + E(y - y_0) = 0.$$

Notamos primero que la ecuación anterior implica que el vector $(x - x_0, y - y_0)$ es ortogonal al vector (D, E). Si además recordamos que el vector $(x - x_0, y - y_0)$ es paralelo a la recta resulta que el vector (D, E) es ortogonal a todo vector paralelo a la recta, por lo que se le llama vector normal a la recta. Tiene entonces sentido la siguiente definición.

Definición 4.5 Sean $Dx + Ey + F = 0$ y $D'x + E'y + F' = 0$ las ecuaciones de dos rectas en $\mathbb{R}^2$. Se define el ángulo θ entre las rectas, como el ángulo entre sus normales, es decir,

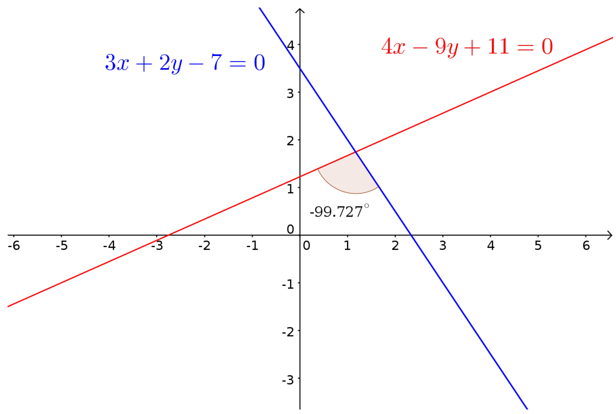
$$\cos\theta = \frac{(D,E)\cdot(D',E')}{\sqrt{D^2+E^2}\sqrt{(D')^2+(E')^2}}. \tag{4.8}$$

Recordamos que las ecuaciones $Dx+Ey+F=0$ y $D'x+E'y+F'=0$ corresponden a dos rectas si y solo si $D^2+E^2\neq 0$ y $(D')^2+(E')^2\neq 0$.

■ **Ejemplo 4.7** Calcule el ángulo entre las rectas $4x-9y+11=0$ y $3x+2y-7=0$.
Solución. La recta $4x-9y+11=0$ tiene normal $(4,-9)$ y la recta $3x+2y-7=0$ tiene normal $(3,2)$, por lo tanto el ángulo entre las rectas es

$$\cos\theta = \frac{(4,-9)\cdot(3,2)}{\sqrt{4^2+(-9)^2}\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{12-18}{\sqrt{(97)(13)}} = \frac{-6}{\sqrt{1261}}$$

al tomar coseno inverso se tiene $\theta=-99.7275°$. ■



Algunos teoremas puramente geométricos pueden demostrarse fácilmente por medio de la geometría analítica, por ejemplo:

Teorema 4.3 Dos rectas no paralelas en el plano $\mathbb{R}^2$ se intersectan en un y solamente en un punto.

La demostración de este teorema dentro del contexto de la geometría analítica puede resultar excesiva para estudiantes novicios y la dejaremos como un ejercicio para quienes pudieran estar interesados. A partir de este teorema, podemos presentar uno de los resultados fuertes de la relación entre el álgebra y la geometría analítica, nos referimos a la interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.4 El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=c_2, \end{cases} \tag{4.9}$$

a) no tiene solución si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ y no existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $c_1=kc_2$,

b) tiene solución única si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, en esta caso la solución está dada por

$$x = \frac{c_2a_{21}-c_1a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{4.10}$$

$$y = \frac{a_{11}c_2-a_{21}c_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{4.11}$$

Demostración. Supongamos que a_{12} y a_{22} son distintas de cero. Podemos escribir entonces

$$y=-\frac{a_{11}}{a_{12}}x+\frac{c_1}{a_{12}}, \tag{4.12}$$

y

$$y=-\frac{a_{21}}{a_{22}}x+\frac{c_2}{a_{22}}. \tag{4.13}$$

entonces las rectas son paralelas si tienen pendientes iguales, es decir, las rectas son paralelas si

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

o bien, son paralelas si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$. Claramente, si las rectas son paralelas y no existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $c_1=kc_2$ no existe ningún punto $(x,y)\in\mathbb{R}$ que pertenezca al mismo tiempo a ambas rectas y por lo tanto el sistema (4.9) no tiene solución. Por otra parte, si las rectas no son paralelas entonces $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ y entonces el sistema (4.9) tiene solución única. Si restamos (4.13) de (4.12) y despejamos x (lo cual puede hacerse ya que estamos suponiendo que $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$) se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}-\frac{a_{21}}{a_{22}}\right)x &= \frac{c_1}{a_{12}}-\frac{c_2}{a_{22}}\\
\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{22}}x &= \frac{c_1a_{22}-c_2a_{12}}{a_{12}a_{22}}\\
x &= \frac{c_1a_{22}-c_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.
\end{aligned}$$

Si sustituimos el valor obtenido de x en (4.12) o en (4.13) se obtiene

$$y=\frac{a_{11}c_2-a_{21}c_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

De esta manera como las rectas no son paralelas se obtiene una solución única dada por $x=\frac{c_1a_{22}-c_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$ y por $y=\frac{a_{11}c_2-a_{21}c_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$. ■

N Por supuesto, existe un recíproco del teorema 4.4, es decir, la existencia de una solución única del sistema (4.9) implica que las rectas no son paralelas, pero la demostración de este hecho es relevante en el contexto más amplio de sistemas de ecuaciones de n ecuaciones con n incógnitas, por lo que en este momento no es lo mas apropiado hacer una demostración particular del caso $n=2$, ni desde el punto de vista matemático ni del didáctico.

Actividad grupal 4.4 Verifique que la demostración del teorema 4.4 es válida si $a_{12} = 0$ y $a_{22} \neq 0$ y viceversa. ¿Cuáles serían las fórmulas a las que se llega para x y y? ¿ Se puede aplicar la regla de Cramer?
¿Qué pasa si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ y existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 = kc_2$?

Esta actividad puede realizarse con equipos de dos personas. ■

Notación 4.1. *A un arreglo rectangular de números*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

se le llama matriz, el tamaño de la matriz es el número de renglones por el número de columnas, en este ejemplo se trata de una matriz de 2×2. *El número*

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{4.15}$$

se conoce como determinante de la matriz A *y se denota por* $\det A$ *o bien* $|A|$.

Con la notación anterior, la solución del sistema (4.9) está dada por la llamada **regla de Cramer:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{4.16}$$

■ **Ejemplo 4.8** Encuentre la intersección de las rectas

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3 = 0, \\ -7x + 5y - 1 = 0. \end{cases}$$

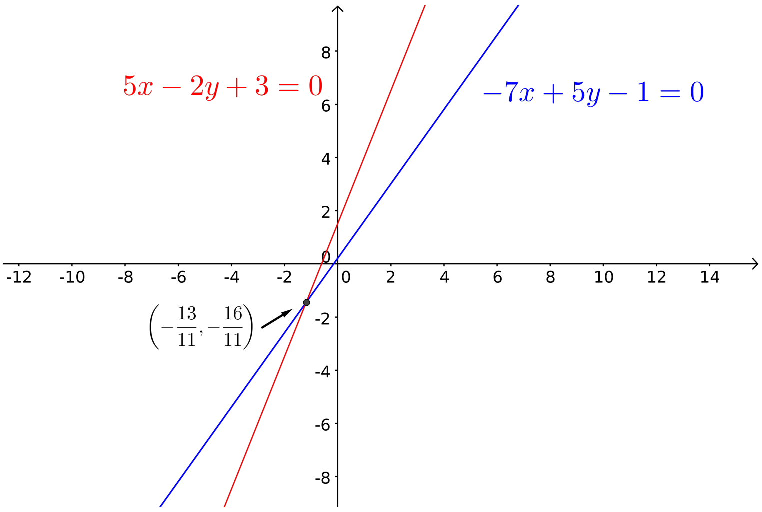
Solución. Escribimos las ecuaciones en la forma

$$\begin{cases} 5x - 2y = -3, \\ -7x + 5y = 1 \end{cases}$$

y procedemos a utilizar la regla de Cramer (4.16) para obtener

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{13}{11}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{16}{11}$$

lo cual da las coordenadas del punto de intersección de las rectas. ■



4.3 Planteamiento y resolución de problemas

En esta sección plantearemos y resolveremos problemas de mayor dificultad a los que aparecen como ejemplos a lo largo del capítulo. Recordamos que estos problemas sólo serán de utilidad si los estudiantes intentan resolverlos por sí mismos antes de consultar la solución que se da después de las actividades grupales correspondientes a cada problema.

■ **Ejemplo 4.9 — Distancia de un punto a una recta.** Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto fuera de la recta $Dx + Ey + F = 0$. Encuentre una fórmula para la longitud del segmento formado por P_0 y el punto de intersección P_l de la perpendicular bajada desde P_0 a la recta considerada.

Actividad grupal 4.5 Deben plantearse al estudiante las siguientes preguntas: ¿Cómo se puede construir una perpendicular a una recta dada que pase por un punto dado? ¿Tiene sentido llamar a la distancia entre P_0 y P_l *distancia entre la recta* $Dx + Ey + F = 0$ *y* P_0? ¿Por qué?

Una actividad que propicia que el estudiante comprenda que siempre es posible construir una perpendicular a una recta dada que pase por un punto determinado consiste en dibujar en papel transparente una recta y un punto, y por medio de un doblez del papel construir la perpendicular. Realice dicha actividad con los estudiantes. Proponga que los estudiantes enuncien como un teorema la existencia de una perpendicular a una recta que pasa por un punto dado. Realice una actividad don los estudiantes comparen entre ellos mismos los diversos métodos y resultados que hayan obtenido.

Para calcular la fórmula que se desea, pueden realizarse las siguientes actividades:

1. Encuentre la pendiente de una recta perpendicular a $Dx + Ey + F = 0$.
2. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P_0 y tiene por pendiente la calculada en el problema anterior.
3. Encuentre la intersección de la recta del inciso anterior y la recta $Dx + Ey + F = 0$ denotemos este punto por P_l.
4. Calcule la distancia entre P_0 y P_l. Esta distancia es la fórmula buscada.

En la solución del problema se da un método diferente al empleado en esta actividad grupal, pero debe llegarse a la misma fórmula. ■

Existen mucha formas de resolver este problema. Daremos una solución vectorial que es diferente a la dada por la actividad grupal 4.5, pero además el problema puede resolverse utilizando la proyección ortogonal vista en la actividad 2.11, pero no es necesario que el estudiante recuerde a cabalidad lo allí realizado.

Solución. Sabemos que un vector perpendicular a la recta $Dx+Ey+F=0$ es (D,E). Por lo que la ecuación vectorial de la recta que pasa por $P_0=(x_0,y_0)$ es

$$(x,y)=(x_0,y_0)+t(D,E), \quad t\in\mathbb{R}$$

Para encontrar la intersección de esta recta con la recta $Dx+Ey+F=0$ basta encontrar t_0 que satisfaga (¿por qué?) la ecuación

$$D(x_0+t_0D)+E(y_0+t_0E)+F=0$$

de donde se obtiene t_0:

$$t_0=\frac{-Dx_0-Ey_0-F}{D^2+E^2}$$

El punto P_l sobre la recta $Dx+Ey+F=0$ que está en la intersección con la perpendicular que pasa por P_0 tiene coordenadas $P_l=(x_0,y_0)+t_0(D,E)$ por lo que la distancia entre P_0 y P_l es simplemente

$$\begin{aligned} d(P_0,P_l)=\|t_0(D,E)\| &= \left\|\frac{-Dx_0-Ey_0-F}{D^2+E^2}(D,E)\right\| \\ &= \frac{|-Dx_0-Ey_0-F|}{D^2+E^2}\sqrt{D^2+E^2} \\ &= \frac{|Dx_0+Ey_0+F|}{\sqrt{D^2+E^2}}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

La fórmula (4.17) se conoce como **fórmula de la distancia de un punto $P_0=(x_0,y_0)$ a la recta $Dx+Ey+F=0$.** ■

Ejercicio 4.4 Compruebe que la fórmula (4.17) es realmente la distancia mas corta de P_0 a cualquier otro punto de la recta dada. Se requieren solamente argumentos que utilicen triángulos. ■

Dada una circunferencia con ecuación $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ y una recta dada por $y=mx+b$, ocurre una de las siguientes cosas:

a) La recta y la circunferencia no se intersectan.
b) La recta y la circunferencia se cortan en dos puntos.
c) La recta y la circunferencia se tocan en un punto, llamado punto de tangencia.

■ **Ejemplo 4.10 — Intersecciones de rectas y circunferencias.** Determine la pendiente m de la recta que pasa por $(0,3)$ para que sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-10x+2y+18=0$.

Actividad grupal 4.6 Los estudiantes deben responder las siguientes preguntas individualmente:

1. ¿Cuál forma de la ecuación de la recta es la más conveniente para resolver este problema?
2. ¿Qué debe ocurrir para que se intersecten la recta y la circunferencia?
3. Sea $P=(x,y)$ el punto de intersección de la recta y la circunferencia. Plantee una

ecuación para la variable x que dé la coordenada x de la intersección. Resuelva la ecuación. calcule la coordenada y de la intersección.

La siguiente actividad puede incluir a todo el grupo: Encuentre las condiciones para que la recta $y = mx+3$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-10x+2y+18=0$. Calcule el valor de m para tener tangencia. ■

Solución. La recta buscada tiene una ecuación de la forma $y = mx+3$ ya que el punto $(0,3)$ es la ordenada al origen de la recta y donde m es un parámetro por determinar. Sustituimos $y = mx+3$ en la ecuación de la circunferencia para obtener

$$x^2+(mx+3)^2-10x+2(mx+3)+18=0$$

Simplificando se obtiene

$$(1+m^2)x^2+(8m-10)x+33=0.$$

la cual es una ecuación cuadrática en la variable x por medio de la fórmula cuadrática se obtiene

$$x = \frac{-(8m-10)\pm\sqrt{(8m-10)^2-4(1+m^2)(33)}}{2(8m-10)}$$

Para que la recta $y = mx+3$ corte a la circunferencia $x^2+y^2-10x+2y+18=0$ en dos puntos se debe tener que $0 < (8m-10)^2-4(1+m^2)(33)$ y para que la recta sea tangente (¿por qué?) se debe tener

$$0 = (8m-10)^2-4(1+m^2)(33).$$

Se desarrolla la ecuación anterior para obtener ahora una cuadrática en la variable m, la cual, después de simplificar (compare con sus propios resultados) se reduce a

$$17m^2+40m+8=0.$$

Se tiene entonces que

$$m = \frac{-20\pm 2\sqrt{66}}{17}.$$

Es decir, hay dos rectas tangentes

$$y = \left(\frac{-20+2\sqrt{66}}{17}\right)x+3$$

y

$$y = \left(\frac{-20-2\sqrt{66}}{17}\right)x+3.$$

■

El siguiente ejercicio es un teorema clásico de la geometría euclidiana. La demostración analítica es interesante y utiliza conceptos vistos en este capítulo.

■ **Ejemplo 4.11 — Ángulo inscrito en una semicircunferencia.** En este ejercicio demostraremos el siguiente teorema:

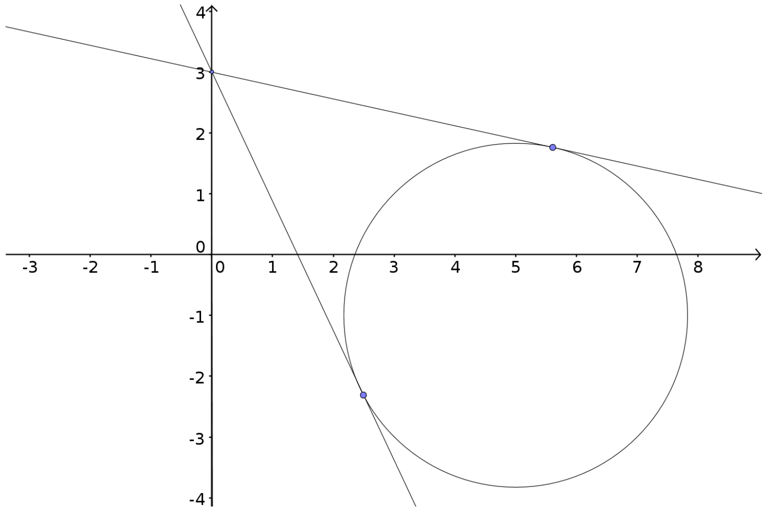


Figura 4.6: Gráfica que corresponde al ejemplo 4.10.

Teorema 4.5 El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Actividad grupal 4.7 1) ¿Qué significa que un ángulo sea inscrito?
2) Haga un dibujo que ilustre la afirmación del teorema 4.5.
3) Se afirma que la demostración del teorema 4.5 no pierde generalidad si la circunferencia tiene centro en el origen ¿por qué esto es verdadero? Construya una semicircunferencia de radio r e inscriba un ángulo dentro de ella y denote por P el vértice del ángulo.

4) Muestre que los segmentos que forman el ángulo son perpendiculares calculando las pendientes de las rectas que lo forman y use la fórmula $m_1 m_2 = -1$ para comprobar la perpendicularidad. ■

Solución. Consideramos la semicircunferencia $x^2 + y^2 = r$ con $y \geqslant 0$. Sea $P = (x_o, y_o)$ un punto cualquiera sobre la semicircunferencia. Los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, donde $A = (-r, 0)$ y $B = (0, r)$ forman un ángulo inscrito en la semicircunferencia. El Teorema afirma que la medida del ángulo APB es $\pi/2$. El teorema queda demostrado si la recta que pasa por A y P es perpendicular a la recta que pasa por P y B. La recta que pasa por $A = (-r, 0)$ y $P = (x_o, y_o)$ tiene pendiente

$$m_1 = \frac{y_o}{x_o + r};$$

la recta que pasa por P y $B = (r, 0)$ tiene pendiente

$$m_2 = \frac{y_o}{x_o - r}.$$

tenemos así que

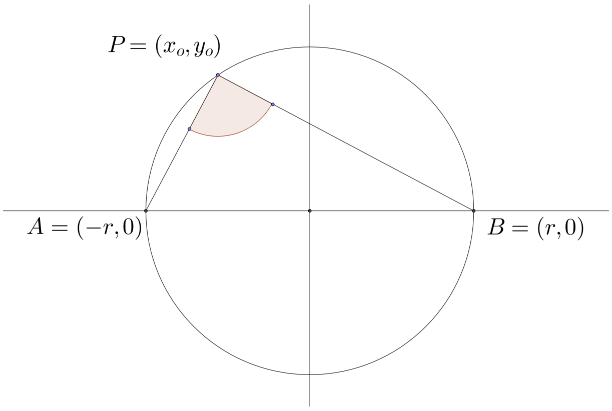
$$m_1 m_2 = \frac{y_o}{x_o + r}\frac{y_o}{x_o - r} = \frac{y_o^2}{x_o^2 - r^2}$$

pero como P pertenece a la circunferencia se tiene que $x_o^2 + y_o^2 = r^2$ o bien $x_o^2 - r^2 = -y_o^2$.

Por lo tanto

$$m_1 m_2 = \frac{y_0^2}{-y_o^2} = -1,$$

con lo cual queda demostrado el teorema. ■



4.3.1 Autoevaluación

1. ¿Qué es la pendiente de un segmento?
2. Defina *línea recta*, dé la ecuación general de la recta.
3. ¿Cómo se calculan las coordenadas del punto de intersección de dos rectas?
4. Cómo define una línea tangente a una circunferencia
5. ¿Cómo define el ángulo entre rectas? ¿Qué deben cumplir las pendientes de dos rectas perpendiculares?

4.4 Problemas y ejercicios del capítulo

Nivel básico:

1. Encuentre la distancia del punto $(-5, -4)$ a la recta $y = 3x - 2$.
2. Halle el punto de intersección de las rectas

$$3x - 4y - 29 = 0, \qquad 2x + 5y + 19 = 0.$$

3. Considere la recta $2x + 3y + 4 = 0$. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1)$ tal que:
   a) la recta es paralela a la recta dada;
   b) la recta es perpendicular a la recta dada.
4. Determine el ángulo entre las rectas siguientes:
   a) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$
   b) $x - 2y - 4 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$.
5. Determine si la recta es tangente, corta o pasa fuera de la circunferencia en los siguientes casos:
   a) $y = 1/2x - 1/2$, $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12$;
   b) $y = x + 10$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

6. Calcule la distancia del centro de la circunferencia $x^2+y^2-2x=0$ a la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2+y^2+5x-8y+1=0$ y $x^2+y^2-3x+7y-25=0$.

Nivel intermedio:

1. Halle la distancia mínima del punto$(6,-8)$ a la circunferencia $x^2+y^2=9$.
2. Determine para que valores de la pendiente m la recta $y=mx$ es:
   a) secante a la circunferencia $x^2+y^2-10x+16=0$
   b) es tangente a la circunferencia del inciso a)
   c) pasa fuera de la circunferencia.

Soluciones. 1) 7. 2a) $|m|<3/4$. 2b) $m=\mp 3/4$. 2c) $|m|>3/4$.

Nivel superior

1. El centro de una circunferencia está en la recta $x+y=0$. Halle la ecuación de esta circunferencia, si se sabe que pasa por un punto de intersección de las circunferencias $(x-1)^2+(y+5)^2=50$, $(x+1)^2+(y+1)^2=10$.
2. Muestre que las circunferencias $x^2+y^2-2mx-2ny-m^2+n^2=0$, $x^2+y^2-2nx+2my+m^2-n^2=0$, se cortan y forman un ángulo recto. *El ángulo formado por dos circunferencias es el ángulo formado por sus tangentes en el punto de intersección.*

Soluciones. 1) $(x+3)^2+(y-3)^2=10$.

5 La elipse, la parábola y la hipérbola

Estudiaremos ahora el estudio de otras curvas que aparecen al seccionar un cono circular recto. Comenzaremos con la elipse cuya ecuación en cierto sentido es una generalización de la ecuación del círculo.

5.1 Ecuación de la elipse

Actividad grupal 5.1 Una elipse puede generase con una cuerda anudada en sus extremos y dos barras, o palillos. Se fijan las barras separadas donde va a ser trazada la elipse de manera que queden perpendiculares a la superficie. Se debe cuidar que la longitud de la cuerda sea mayor que dos veces la distancia entre las barras. La cuerda se coloca con las barras en su interior y se tensa formado un triángulo. El punto que queda en el vértice que no toca las barras es un punto sobre la elipse.

¿Puede trazarse una curva continua manteniendo la cuerda tensa?

Los estudiantes deben de dibujar elipses mediante este método antes de proseguir con el estudio de este capítulo. ■

Presentamos a continuación la definición analítica de la elipse la cual esta basada en la actividad grupal 5.1.

Definición 5.1 — Elipse. Una elipse es un conjunto de puntos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1, F_2, llamados focos, es constante.

Supongamos para simplificar que los focos tienen coordenadas $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, con $c > 0$, entonces la distancia entre los focos es $2c$. Por la definición de elipse, la suma de las distancias

$$\|PF_1\| + \|PF_2\|,$$

debe ser un número fijo. Dado que como se describió en el la actividad grupal 5.1, la distancia entre los focos debe ser menor que la longitud de la cuerda usada para construirla

(¿por qué?), a tal número fijo lo denotaremos por $2a$ donde $a > c$. Se tiene así que los puntos P sobre la elipse deben satisfacer la ecuación

$$\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a. \tag{5.1}$$

Actividad grupal 5.2 Suponga que (x,y) es un punto sobre la elípse con focos en los puntos $F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$. Calcule la ecuación de la elipse mediante la relación dada en (5.1). Para este fin siga los siguientes pasos

a) Use la fórmala de distancia entre dos puntos para calcular $\|PF_1\|$, $\|PF_2\|$.

b) Sustituya en (5.1) las expresiones anteriores.

c) Piense un poco antes de desarrollar. Si eleva al cuadrado la suma de raíces el doble producto es una raíz cuadrada: $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 = \alpha^2+\beta^2+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ ¿Cómo puede evitar tener el término $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ en el desarrollo de lo obtenido en el inciso anterior?

■

Solución de la actividad grupal. a) Se tiene que

$$\|PF_1\| = \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{5.2}$$

$$\|PF_2\| = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{5.3}$$

b) De esta manera de la ecuación (5.1) se tiene que

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{5.4}$$

c) Para evitar tener el doble producto de raíces cuadradas se pasa uno de los sumandos del lado derecho de la igualdad (5.4):

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{5.5}$$

Ahora puede procederse a elevar al cuadrado ambos miembros de (5.5).

Bibliografía

[1] Hilbert, D., *Foundations of Geometry, second edition.* The Opera Court Publishing Company 1971.

[2] Kletenik D., *Problemas de geometría analítica.* Editorial Mir 1981.

[3] Serra, M., *Discovering Geometry: An investigative Approach, third edition.* Key Curriculum Press 2003.

Índice alfabético

V